

On Some Inadmissible Values of the Fourier Coefficients of Special Newforms with level 1 or 2

後藤 新裕 (九州大学)

1 序論と主結果

Ramanujan の τ 関数は

$$x \prod_{n=1}^{\infty} (1 - x^n)^{24} = \sum_{n=1}^{\infty} \tau(n) x^n$$

により定義される. 容易にわかるように, 各 $n \geq 1$ に対し, $\tau(n)$ は整数である. 複素数 z の虚部が正のとき $x = e^{2\pi iz}$ とおくと, これは重さ 12, レベル 1 の唯一つの newform $\Delta(z)$ を定める. Ramanujan は多くの $\tau(n)$ の値を計算し, 次の予想を立てた:

予想 1.1 (Ramanujan 予想, 1916 年). Ramanujan の τ 関数は次を満たす:

- (1) (乗法性) $\tau(nm) = \tau(n)\tau(m)$, ただし, $\gcd(n, m) = 1$.
- (2) (漸化式) $\tau(p^{m+1}) = \tau(p)\tau(p^m) - p^{11}\tau(p^{m-1})$, p は素数, $m \geq 1$.
- (3) (上界) $|\tau(p)| \leq 2p^{11/2}$, p は素数.

最初の二つ (1), (2) は 1917 年 Mordell [14] により証明された. 彼の証明では, ある作用素に関して Δ が固有関数であることを用いるものであった. その作用素は後に Hecke により一般化され「Hecke 作用素」とよばれるようになった. (3) は Deligne [6, 7] により証明された Weil 予想の系として従い, Ramanujan 予想は完全解決に至った.

1947 年, Lehmer は次の予想を立てた:

予想 1.2. すべての $n \geq 1$ に対して $\tau(n) \neq 0$ である.

こちらは現在も未解決である. Lehmer はさらに, もし $\tau(n) = 0$ となる n が存在すれば, そのような n で最小のものは素数であることを示した. その後 Serre により, $\tau(p) = 0$ となる素数 p の集合が素数全体の中で自然密度 0 をもつことを示した (これは現在では, 以下で述べる佐藤-Tate 予想の系として理解できる).

一方この予想に一見相反するような佐藤-Tate 予想について述べる. $\tau(p)$ は実数 (実際には整数) なので, ある $0 \leq \theta_p \leq \pi$ に対して

$$\tau(p) = 2p^{11/2} \cos \theta_p$$

と書ける. 佐藤-Tate 予想とは, 任意の $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\#\{p \leq x \mid p : \text{素数}, \alpha \leq \theta_p \leq \beta\}}{\#\{p \leq x \mid p : \text{素数}\}} = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^2 \theta \, d\theta$$

が成り立つというものである (ここでは, 簡単のため Δ の場合の記述であることをご了承ください). これは Barnett-Lamb, Geraghty, Harris, Taylor [4] によって解決された. したがって θ_p は $\pi/2$ 付近に分布しやすい. ところが, この記号を用いると, Lehmer 予想は θ_p が $\pi/2$ に完全に等しくなることはないということになる. このことが一見相反する理由である.

Thorner [17] は佐藤-Tate 予想 (定理) の剰余項を決定した. すなわち, 任意の $0 \leq \alpha < \beta \leq \pi$ に対し,

$$\frac{\#\{p \leq x \mid p: \text{素数}, \alpha \leq \theta_p \leq \beta\}}{\#\{p \leq x \mid p: \text{素数}\}} = \frac{2}{\pi} \int_{\alpha}^{\beta} \sin^2 \theta d\theta + O\left(\frac{\log(12 \log x)}{\sqrt{\log x}}\right), x \rightarrow \infty$$

である. これは, Newton と Thorne [16] の Δ (より一般に虚数乗法を持たない newform) のすべての $n \geq 1$ に対する n 次対称積 L 関数が保型的であるという結果の系として得られるものである. さらに, これを用いて Gafni, Thorner, Wong [9] は, 密度 0 の素数集合 $S(\Delta)$ を除いて

$$|\tau(p)| > \frac{2p^{11/2} \log \log p}{\sqrt{\log p}}$$

のような下界が成り立つことを示し, 次の Atkin-Serre 予想が密度 1 の素数で成り立つことを示唆した.

予想 1.3 (Atkin-Serre). 任意の $\varepsilon > 0$ に対して定数 $c_\varepsilon, c'_\varepsilon > 0$ が存在し, すべての素数 $p > c'_\varepsilon$ に対して

$$|\tau(p)| \geq c_\varepsilon p^{9/2-\varepsilon}$$

が成り立つ.

佐藤-Tate 予想に端を発した上記の成果はいずれも τ 関数の大域的な性質を述べたものである. これを踏まえ, 個々の n に関する $\tau(n)$ の値について, 考察を深めることが次の課題であり, Lehmer 予想のような主張に対する研究につながると思われる. そこで 2010 年代以降, $\tau(n)$ の個別の値に注目した研究が進められている. 特に, Lehmer 予想の変化版として, 0 以外の整数 a に対し

$$\tau(n) = a \tag{1.1}$$

となる n が存在するかどうか研究されている.

まず, a が奇数の場合についての主な先行研究を述べる. Murty-Murty-Shorey [15] は任意の奇数 a に対して方程式 (1.1) を満たす n は有限個しか存在しないことを示した.

表 1: a が奇数の場合

	τ の取り得ない値
Lygeros-Rozier [13]	$\pm 1 (\tau(1) \neq 1 \text{ 以外})$
Balakrishnan-Ono-Craig-Tsai [1, 2]	$\pm 3, \pm 5, \pm 7, \pm 13, \pm 17, -19, \pm 23, \pm 37, \pm 691$
Hanada-Madhukara [11]	$-9, \pm 15, \pm 21, -25, -27, -33, \pm 35, \pm 45$ $\pm 49, -55, \pm 63, \pm 77, -81, \pm 91$
Dembner-Jain [8]	$\pm \ell, \pm 5^m$
Bennett-Gherga-Patel-Siksek [5]	$\pm \ell^a, 3^b 5^c 7^d 11^e$

ただし, ℓ は 100 未満の奇素数, a, b, c, d, e は 0 以上の整数で, $(a, b, c, d, e) \neq (0, 0, 0, 0, 0)$ を満たすものとし, m は正の整数である.

Lin-Ma [12] は $n > 1$ に対し, $\tau(n)$ が奇数ならば, $|\tau(n)| > |\tau(3)| = 252$ であることを示した. これらの結果はすべて奇数の場合であった. このことは次の合同式

$$\Delta(z) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} q^{(2n+1)^2} \pmod{2}$$

より, $\tau(n)$ が奇数であることと n が奇数の平方であることと同値であることに基づいている. この合同式 Jacobi の三重積の等式より直ちに従う.

一方で (1.1) における a が偶数の場合の結果もある. Balakrishnan-Ono-Tsai [3] は奇素数 $\ell < 100$ に対し, すべての $n \geq 1$ で

$$\tau(n) \notin \{\pm 2\ell\} \cup \{\pm 2\ell^2\} \cup \{\pm 2\ell^3 : \ell \neq 59\}$$

であることを示した.

さらに, $\tau(n)$ の素因数の個数に関する二つの結果があるので合わせて紹介しておく:

定理 1.4 ([2]). $n \geq 1$ が $p \mid \tau(p)$ (このような素数 p を non-ordinary という) を満たすような素数 p で割れないとき,

$$\Omega(\tau(n)) \geq \sum_{i=1}^r (\sigma_0(d_i) - 1) \geq \omega(n)$$

が成り立つ. ただし, $\sigma_0(m) (= \sum_{0 < d \mid m} 1)$ は約数の個数, $\omega(m)$ は m の素因数の個数, $\Omega(m)$ は重複を含む素因数の総数を表すものとする.

注意 1.5. 不等式

$$\Omega(\tau(n)) \geq \omega(n)$$

は non-ordinary な素数で割れる場合でも成り立つことに注意する. これは, τ の乗法性および $\tau(n) \neq \pm 1, n > 1$ より容易に従う.

命題 1.6 ([2, Theorem 1.1]). $n \geq 1$ に対し, $\tau(n) = \pm \ell$ であるとする. ただし, ℓ は奇素数である. このとき, 二つの奇素数 p, d を用いて, $n = p^{d-1}$ となり, d は $d \mid \ell(\ell^2 - 1)$ を満たす.

本研究では, 上記の動機のもとで, τ 関数や重さ 8, レベル 2 の newform φ_8 の Fourier 係数の取り得ない値をさらに調べた. 特に, 奇素数 $\ell < 1000$ について $\pm \ell, \pm 2\ell, \pm 4\ell, \pm 8\ell$ の形の値が Fourier 係数として現れるかどうかについて考察し, ごく一部の例外を除いてこれらの値にはなり得ないことを示した:

定理 A (G. [10], 2024). $n \geq 1$ に対し,

$$\tau(n) = \varepsilon t \ell$$

とする. ただし, 奇素数 $\ell < 1000$, 符号 $\varepsilon = \pm$ および $t \in \{1, 2, 4, 8\}$ である. このとき, 次が成り立つ:

(a) (奇数) $t = 1$ のとき, $n = p^4$ となる素数 p が存在し, $\ell \in L(\Delta)_1^\varepsilon$ となる.

(b) (偶数) $t \in \{2, 4, 8\}$ のとき, 次のいずれか一つのみが成り立つ:

- (1) n 自身が素数であって, $\ell \in L(\Delta)_t^\varepsilon$ となる.
 (2) n を一回のみ割る素数 p が存在して, $\tau(p) = 2$ となる.

ただし,

$$\begin{aligned} L(\Delta)_1^+ &:= \{461\}, & L(\Delta)_1^- &:= \{599\}, \\ L(\Delta)_2^+ &:= \emptyset, & L(\Delta)_2^- &:= \{587\}, \\ L(\Delta)_4^+ &:= \{23, 449, 569, 863\}, & L(\Delta)_4^- &:= \{241, 397, 811\}, \\ L(\Delta)_8^+ &:= \{457\}, & L(\Delta)_8^- &:= \{3, 293, 983\} \end{aligned}$$

である. 先行研究との比較のため, 定理 A から直ちに得られる次の系を述べておく:

系 1.7. 次が成り立つ:

(a) (奇数)

$$\tau(n) \notin \{\pm \ell \mid \ell < 1000, \text{奇素数}\} \setminus \{461, -599\}$$

(b) (偶数) $t = 2, 4, 8$ および $\varepsilon = \pm$ に対し,

$$\frac{\tau(n)}{\varepsilon t} = \ell \notin \{\ell \mid \ell < 1000, \text{奇素数}\} \setminus (L(\Delta)_t^\varepsilon \cup L(\Delta)_{t/2}^\varepsilon \cup \dots)$$

ここで, 和集合は $t/2^k$ が $\varepsilon 1$ になるまでとるものとする.

実際に, Corollary 1.7 の (b) を得る議論を $\tau(n) = -4\ell$ の場合に行う. まず, 定理 A (b) より,

(1) n 自身が素数であって, $\ell \in L(\Delta)_4^-$ となる.

(2) n を一回のみ割る素数 p_1 が存在して, $\tau(p_1) = 2$ となる.

のいずれか一つのみが成り立つ. この (2) の場合, τ の乗法性から, $\tau(n/p_1) = -2\ell$ であることが従う. このとき, 再び定理 A (b) より,

(2-1) n/p_1 が素数 p_2 であって, $\ell \in L(\Delta)_2^-$ となる.

(2-2) n/p_1 を一回のみ割る素数 p_2 が存在して, $\tau(p_2) = 2$ となる.

のいずれか一つのみが成り立つ. この (2-2) の場合は, 同様に τ の乗法性から, $\tau(n/(p_1 p_2)) = -\ell$ である. ここで, 定理 A の (a) より, $n/(p_1 p_2) = p_3^4$ となる素数 p_3 が存在し, $\tau(p_3^4) = -599$ となる. 以上をまとめると, $\tau(n) = -4\ell$ とすると, 素数 p, p_1, p_2, p_3 を用いて

$$n = \begin{cases} p & \text{s.t. } \tau(p) = -4\ell \text{ かつ } \ell \in L(\Delta)_4^- = \{241, 397, 811\}, \\ p_1 p_2 & \text{s.t. } \tau(p_1) = 2 \text{ かつ } \tau(p_2) = -2\ell \text{ かつ } \ell \in L(\Delta)_2^- = \{587\}, \\ p_1 p_2 p_3^4 & \text{s.t. } \tau(p_1) = \tau(p_2) = 2 \text{ かつ } \tau(p_3^4) = -599 \end{cases}$$

の形となる. 従って, ℓ の可能性としては $L(\Delta)_4^- \cup L(\Delta)_2^- \cup L(\Delta)_1^- = \{241, 397, 587, 599, 811\}$ のみとなり, $t = 4, \varepsilon = -$ のときの Corollary 1.7 の (b) を得る.

注意 1.8. $\ell \in L(\Delta)_t^\varepsilon$ に対し, 実際に $\tau(n) = \varepsilon t \ell$ となる n が存在するかどうかはわからない. そのような n の存在が確認できているのは, $3 \in L(\Delta)_8^-$ のみである. ($\tau(2) = -24 = -8 \cdot 3$)

さらに, 重さ 8, レベル 2 の唯一つの newform φ_8 に関しても同様の結果を得た. φ_8 は Δ と同様に無限積表示

$$\varphi_8(z) := q \prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n)^8 (1 - q^{2n})^8, q := e^{2\pi iz}$$

で定義される. また, この n 番目の Fourier 係数を $\tau_8(n)$ あるいは $a_{\varphi_8}(n)$ とする (前者は一般的な記号ではないかもしれない). このとき, 定理 A と同様に次が成り立つ:

定理 B (G., to appear). $n \geq 1$ に対し,

$$\tau_8(n) = \varepsilon t \ell$$

とする. ただし, 奇素数 $\ell < 1000$, 符号 $\varepsilon = \pm$ および $t \in \{1, 2, 4, 8\}$ である. このとき, 次が成り立つ:

(a) (奇数) $t = 1$ のとき, $n = p^{d-1}$ となる素数 p が存在し, $(\ell, d) \in LD(\varphi_8)_1^\varepsilon$ となる.

(b) (偶数) $t \in \{2, 4, 8\}$ のとき, 次のいずれか一つのみが成り立つ:

(1) n 自身が素数であって, $\ell \in L(\varphi_8)_t^\varepsilon$ となる.

(2) n を一回のみ割る素数 p が存在して, $\tau_8(p) = 2, -4$ となる.

ただし,

$$LD(\varphi_8)_1^+ := \{(\ell, d) \mid d \in C(\ell) \setminus \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}\},$$

$$LD(\varphi_8)_1^- := \{(\ell, d) \mid d \in C(-\ell) \setminus \{7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37\}\},$$

$$L(\varphi_8)_2^+ := \{3, 13, 31, 43, 61, 73, 103, 151, 163, 181, 193, 211, 223, 241, 271, 283, 313, 331, 373, 421, \\ 433, 463, 523, 541, 571, 601, 613, 631, 643, 661, 673, 691, 733, 751, 811, 823, 853, 883, 991\},$$

$$L(\varphi_8)_2^- := \{7, 31, 37, 61, 67, 97, 127, 151, 157, 181, 211, 241, 271, 277, 307, 331, 337, 367, 397, 421, \\ 457, 487, 541, 547, 571, 577, 601, 607, 631, 661, 691, 727, 751, 757, 787, 811, 877, 907, 937, \\ 967, 991, 997\},$$

$$L(\varphi_8)_4^+ := \{3, 5, 23, 29, 53, 59, 83, 89, 113, 149, 173, 179, 233, 239, 263, 269, 293, 353, 359, 383, 389, 419, \\ 443, 449, 479, 503, 509, 563, 569, 593, 599, 653, 659, 683, 719, 743, 773, 809, 839, 863, 929, \\ 953, 983\},$$

$$L(\varphi_8)_4^- := \{7, 31, 37, 61, 67, 97, 127, 151, 157, 181, 211, 241, 271, 277, 307, 331, 337, 367, 397, 421, 457, \\ 487, 541, 547, 571, 577, 601, 607, 631, 661, 691, 727, 751, 757, 787, 811, 877, 907, 937, 967, \\ 991, 997\},$$

$$L(\varphi_8)_8^+ := \{7, 19, 37, 67, 79, 97, 109, 127, 139, 157, 199, 229, 277, 307, 337, 349, 367, 379, 397, 409, 439, \\ 457, 487, 499, 547, 577, 607, 619, 709, 727, 739, 757, 769, 787, 829, 859, 877, 907, 919, 937, \\ 967, 997\},$$

$$L(\varphi_8)_8^- := \{3, 5, 11, 23, 41, 53, 71, 83, 101, 113, 131, 173, 191, 233, 251, 263, 281, 293, 311, 353, 383, 401, \\ 431, 443, 461, 491, 503, 521, 563, 593, 641, 653, 683, 701, 743, 761, 773, 821, 863, 881, 911, \\ 941, 953, 971, 983\}$$

である.

参考文献

- [1] Jennifer S. Balakrishnan, William Craig, and Ken Ono. Variations of Lehmer’s conjecture for Ramanujan’s tau-function. *J. Number Theory*, 237:3–14, 2022.
- [2] Jennifer S. Balakrishnan, William Craig, Ken Ono, and Wei-Lun Tsai. Variants of Lehmer’s speculation for newforms. *Adv. Math.*, 428:Paper No. 109141, 31, 2023.
- [3] Jennifer S. Balakrishnan, Ken Ono, and Wei-Lun Tsai. Even values of Ramanujan’s tau-function. *Matematica*, 1(2):395–403, 2022.
- [4] Tom Barnet-Lamb, David Geraghty, Michael Harris, and Richard Taylor. A family of Calabi-Yau varieties and potential automorphy II. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, 47(1):29–98, 2011.
- [5] Michael A. Bennett, Adela Gherga, Vandita Patel, and Samir Siksek. Odd values of the Ramanujan tau function. *Math. Ann.*, 382(1-2):203–238, 2022.
- [6] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. I. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (43):273–307, 1974.
- [7] Pierre Deligne. La conjecture de Weil. II. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (52):137–252, 1980.
- [8] Spencer Dembner and Vanshika Jain. Hyperelliptic curves and newform coefficients. *J. Number Theory*, 225:214–239, 2021.
- [9] Ayla Gafni, Jesse Thorner, and Peng-Jie Wong. Almost all primes satisfy the Atkin-Serre conjecture and are not extremal. *Res. Number Theory*, 7(2):Paper No. 31, 5, 2021.
- [10] Akihiro Goto. On some values which do not belong to the image of ramanujan’s tau-function, 2024.
- [11] Mitsuki Hanada and Rachana Madhukara. Fourier coefficients of level 1 Hecke eigenforms. *Acta Arith.*, 200(4):371–388, 2021.
- [12] Wenwen Lin and Wenjun Ma. On values of Ramanujan’s tau function involving two prime factors. *Ramanujan J.*, 63(1):131–155, 2024.
- [13] Nik Lygeros and Olivier Rozier. Odd prime values of the Ramanujan tau function. *Ramanujan J.*, 32(2):269–280, 2013.
- [14] L.J. Mordell. On Mr. Ramanujan’s empirical expansions of modular functions. *Proc. Camb. Philos. Soc.*, (19):117–124, 1917.
- [15] M. Ram Murty, V. Kumar Murty, and T. N. Shorey. Odd values of the Ramanujan τ -function. *Bull. Soc. Math. France*, 115(3):391–395, 1987.

- [16] James Newton and Jack A. Thorne. Symmetric power functoriality for holomorphic modular forms, I, II. *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 134:1–152, 2021.
- [17] Jesse Thorner. Effective forms of the Sato-Tate conjecture. *Res. Math. Sci.*, 8(1):Paper No. 4, 21, 2021.