

Double descent in unitary groups

国立台湾大学 伊藤 望

Nozomi Ito

National Taiwan University

1 序

Ginzburg と Soudry は [5] において、特殊直交群、シンプレクティック群、およびメタプレクティック群の離散的保型表現で弱リフトがある良いクラスに属するようなものの構成法 (double descent) を提案した。さらに彼らはその弱リフトが generic な場合、構成法が実際に有効であることを示した。本稿では、弱リフトが generic であるという仮定を外しても彼らの構成が有効であるということを見る。便宜上、今回は彼らが扱わなかった (厳密には、当時は twisted doubling zeta 積分が十分に一般化されていなかったため扱えなかった) ユニタリ群のケースを扱うが、手法自体は彼らのケースにも問題なく適用できる (詳しくは [6] を参照せよ)。

2 設定

F を $\mathbb{Q}$ の有限次拡大、 E をその二次拡大、 c を $\text{Gal}(E/F)$ の非自明元とする。 m, n を正の整数とし、 $p, q \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ は $mn = 2p + q$ を満たすものとして、 $H_a \in \text{Mat}_{q \times q}(E)$ を ${}^t H_a^c = H_a$ を満たす anisotropic 行列 (エルミート行列として) とする。 J_p を 1 を反対角に p 個並べた行列とし、 $H = \begin{pmatrix} & J_p \\ & H_a \\ J_p & \end{pmatrix}$ とする。

$$G_a := \{g \in \text{Res}_{E/F} \text{GL}_q \mid {}^t g^c H_a g = H_a\}, \quad G := \{g \in \text{Res}_{E/F} \text{GL}_{2mn} \mid {}^t g^c H g = H\}$$

とし、 P_0 を Levi 部分群が $(\text{Res}_{E/F} \text{GL}_1)^p \times G_a$ であるような、ブロック上半三角行列からなる G の極小放物部分群とする。 P_0 を含む G の放物部分群を標準的放物部分群と呼ぶことにする。

$k \geq 0$ に対し、 $H_k \in \text{Mat}_{2mnk \times 2mnk}(E)$ を H を反対角に $2k$ 個並べた行列とする。

$$G_k := \{g \in \text{Res}_{E/F} \text{GL}_{2mnk} \mid {}^t g^c H_k g = H_k\}$$

とする。 $G \times G$ の G_1 への自然な埋め込みを ι と書き、 $G \times G$ の G_k への埋め込み ι_k を、

$$\iota(g, h) = \text{diag}(g, \iota(g, h), g), \quad (g, h) \in G \times G$$

によって帰納的に定める。

τ を $\text{GL}_m(\mathbb{A}_E)$ の既約カスプ的表現であって、 $mn - n$ が奇数の時は Asai L 関数 $L(s, \tau, \text{Asai})$ が、 $mn - n$ が偶数のときは捻られた Asai L 関数 $L(s, \tau, \text{Asai}^-)$ が $s = 1$ で pole を持つものとする。 τ の中心指標を χ_τ と書く。 $\text{GL}_{mk}(\mathbb{A}_E)$ の、isobaric sum として書かれた離散的保型表現

$$\tau \mid \det|_{\mathbb{A}_E}^{(k-1)/2} \boxplus \cdots \boxplus \tau \mid \det|_{\mathbb{A}_E}^{-(k-1)/2}$$

を $\text{Sp}(\tau, k)$ と略記する (大域的な Speh 表現)。

$H = G_{m^2n}$ とし、 $P = M_P U_P$ を H のブロック上半三角な放物部分群で $M_P \simeq \text{Res}_{E/F} \text{GL}_{m^2n}$ なるものとする。複素数 s に対し、 $M_P(\mathbb{A}_F)$ の保型表現 $\text{Sp}(\tau, mn) | \det |_{\mathbb{A}_F}^s$ の P に関する正規化された放物誘導表現を $I(s)$ と書くことにする ($H(\mathbb{A}_F)$ の固定された極大コンパクト部分群についての局所有限性を課す)。 $I(s)$ の section f_s に対して Eisenstein 級数 $E(f_s)$ を、

$$E(f_s)(g) = \sum_{\gamma \in P(F) \backslash H(F)} f_s(\gamma g), \quad g \in H(\mathbb{A}_F)$$

と定める。Res が十分大でこれは絶対収束し、 s に関する有理型函数に解析接続される。さらに [7] によると、 $E(f_s)$ は $s = n/2$ で高々 1 位の極を持ち、 f_s の取り方によっては実際に $\text{Res}_{s=n/2} E(f_s) \neq 0$ である。 $\text{Res}_{s=n/2} E(f_s)$ 全体が生成する空間を $\mathcal{E}$ と書く。

$Q = MU$ を H のブロック上半三角な放物部分群で $M \simeq (\text{Res}_{E/F} \text{GL}_{mn})^{m-1} \times G_1$ なるものとする。 $U(F)$ 上自明な $U(\mathbb{A}_F)$ の指標 ψ_U が、 M における ψ_U の stablizer が $\iota(G \times G)$ であるようにとれる ([3] を見よ)。 $H(F) \backslash H(\mathbb{A}_F)$ の関数 ϕ に対し、 $G(F) \times G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F) \times G(\mathbb{A}_F)$ の関数 $\mathcal{F}_{\psi_U}(\phi)$ を、

$$\mathcal{F}_{\psi_U}(\phi)(g, h) = \int_{U(F) \backslash U(\mathbb{A}_F)} \phi(ug, h) \psi_U(u) du, \quad g, h \in G(\mathbb{A}_F)$$

で定め、 $\{\mathcal{F}_{\psi_U}(\phi) \mid \phi \in \mathcal{E}\}$ が生成する空間を $\mathcal{DD}$ と書く。

double descent の理論とは大まかに言えば「 $\mathcal{DD}$ は弱リフトが $\text{Sp}(\tau, n)$ となる $G(\mathbb{A}_F)$ のカスプ的保型表現全てを実現する」というものである。そしてそれは以下の 3 つのステップ

- (1). twisted doubling zeta 積分の理論で弱リフトが $\text{Sp}(\tau, n)$ である全てのカスプ的保型表現は $\mathcal{DD}$ に現れることを示す
- (2). 十分多くの v に対し $\mathcal{E}_v$ の $(\psi_U)_v^{-1}$ に関する捻り付き Jacquet 加群を計算することで、弱リフトが $\text{Sp}(\tau, n)$ でない任意の離散的保型表現は $\mathcal{DD}$ に現れないことを示す
- (3). 何らかの方法で $\mathcal{DD}$ の二乗可積分性を示す

によって達成される。(3) は、[5] に倣うと、 $n = 1$ に限れば

- (3)'. $\mathcal{DD}$ の定数項を詳しく調べ、その消滅を見ることで $\mathcal{DD}$ がカスプ的であることを示す

ことで達成できるはずだが、計算の量が膨大であり、加えて $n > 1$ の場合への一般化も明らかでない（少なくともカスプ的にはならない）。しかし、今回紹介する

- (3)". 不分岐計算と Arthur 分類から $\mathcal{DD}$ の元が（狭義の）保型形式であることを示し、square-integrability criterion で二乗可積分性を示す

方法ならば、証明はもっと簡潔で、なおかつ $n = 1$ の仮定が不要である。

以下、各ステップの概要を見ていく。

3 twisted doubling zeta 積分

σ_1, σ_2 を $G(\mathbb{A}_F)$ のカスプ的保型表現とする。 f_s を $I(s)$ の section とし、 $\varphi_i \in \sigma_i$ として

$$Z(f_s, \varphi_1, \varphi_2) = \int_{G(F) \times G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F) \times G(\mathbb{A}_F)} \varphi_1(g) \varphi_2(h) \mathcal{F}_{\psi_U}(E(f_s))(g, h) dg dh$$

と定める。これは twisted doubling zeta 積分 ([3] を見よ) である。これについて、次の作業仮説を考える。

(*) $Z(f_s, \varphi_1, \varphi_2)$ は $\sigma_1 = \overline{\sigma}_2 \chi_\tau^{-1}(\det_G)$ では $L(s + 1/2, \tau \boxtimes \text{BC}(\sigma_2))$ を（正規化因子を除いて）実現し、それ以外では消える（BC は弱リフトを意味する）。

注意 1. これは [10, 4] の結果の外挿を考えると成り立っていると期待されるが、今のところ適切な引用先がないので仮説としている。

この仮説を認めると次が従う。

命題 2. σ を $\text{BC}(\sigma) = \text{Sp}(\tau, n)$ を満たすカスプ的保型表現とする。このとき、 $\text{Res}_{s=n/2} Z(f_s, \varphi_1, \varphi_2) \neq 0$ となる *section* f_s , $\varphi_1 \in \sigma \chi_\tau^{-1}(\det_G)$, $\varphi_2 \in \overline{\sigma}$ が存在する。

証明. $L(s + 1/2, \tau \boxtimes \text{BC}(\overline{\sigma}))$ が $s = n/2$ で 1 位の極を持つことから従う。 $\square$

4 不分岐計算

F の素点 v が E で w と w' に分裂するとする。 F_v の加法指標 ψ を適切に固定する。正方行列 X が対角に k 個並んだものを $[X]_k$ と書く。このとき、同型 $H(F_v) \simeq \text{GL}_{2m^2n}(F_v)$ の下

$$\iota(g, h) = \text{diag}([g]_m, h, [g]_{m-1}), \quad g, h \in \text{GL}_{m^2n}(F_v),$$

$$(\psi_U)_v \left(\begin{pmatrix} 1_{mn} & X_1 & * & * & * & * & * & * \\ & \ddots & X_{m-2} & * & * & * & * & * \\ & & 1_{mn} & Y_1 & Y_2 & * & * & * \\ & & & 1_{mn} & 0 & Z_1 & * & * \\ & & & & 1_{mn} & Z_2 & * & * \\ & & & & & 1_{mn} & W_1 & * \\ & & & & & & \ddots & W_{m-2} \\ & & & & & & & 1_{mn} \end{pmatrix} \right) = \psi(\text{Tr}(\sum_i (X_i + W_i) + Y_1 + Z_1))$$

である。

[2] などにあるように、 $\text{GL}_{k_1}(F_v)$ の表現 π_1 と $\text{GL}_{k_2}(F_v)$ の表現 π_2 に対し、 $\pi_1 \boxtimes \pi_2$ の、ブロック上半三角行列に関する正規化された放物誘導表現を $\pi_1 \times \pi_2$ と書く。 $\tau_v = \tau_w \boxtimes \tau_{w'}$ が不分岐であるとする。このとき、 m 個の $F_v^\times$ の不分岐指標 $\{\chi_i\}_{i=1}^m$ によって $\tau_w = \chi_1 \times \chi_2 \cdots \times \chi_m$ と書けば、 $\mathcal{E}_v$ は $H(F_v) \simeq \text{GL}_{2m^2n}(F_v)$ の表現として

$$\mathcal{E}_v = (\times_{i=1}^m \chi_i(\det_{mn+n})) \times (\times_{i=1}^m \chi_i(\det_{mn-n}))$$

である。あとは geometric lemma による標準的な計算で、次がわかる（証明は省略）。

命題 3. $\mathcal{E}_v$ の捻り付き *Jacquet* 加群 $J_{(\psi_U)_v^{-1}}(\mathcal{E}_v)$ は

$$J_{(\psi_U)_v^{-1}}(\mathcal{E}_v) \simeq (\chi_1 \cdots \chi_m)^2(\det_{mn}) (\times_{i=1}^m \chi_i^{-1}(\det_n)) \boxtimes (\times_{i=1}^m \chi_i(\det_n))$$

を満たす。

注意 4. G が F_v 上分裂ではないケースについても述べるべきと思われるかも知れない。しかし、Ramakrishnan の一般化された強重複度 1 定理 ([9]) によれば、 $\text{GL}_k(\mathbb{A}_E)$ の isobaric 保型表現 Π は E で分裂する殆ど全ての v に対する Π_v ($\text{Res}_{E/F} \text{GL}_k(\mathbb{A}_F)$ の保型表現とみなしている) によって一意的に決定される。この事実を用いると、今回に関しては上に述べた結果だけで十分である。

5 3-有限性、二乗可積分性

ここで、狭義の保型形式の定義を振り返る。 $\mathrm{Lie}G(F \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ の包絡環の中心を $\mathfrak{Z}$ と書く。 $G(\mathbb{A}_F)$ の極大コンパクト部分群 $K = \prod_v K_v$ を固定しておく。

定義 5. ϕ を $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$ 上の滑らかな複素数値関数とする。 ϕ が以下の性質

- (1). ϕ は moderate growth
- (2). ϕ は K -有限
- (3). ϕ は $\mathfrak{Z}$ -有限

を全て満たすとき、 ϕ は $G(\mathbb{A}_F)$ の保型形式であるという（詳しくは [8] を参照）。

Arthur 分類が有効な限り、十分に Hecke 固有的な関数が狭義の保型形式であることを導くことができる。具体的には以下が成り立つ。

補題 6. ϕ を $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$ 上の滑らかで K -有限な複素数値関数とする。 $G(F_v) \simeq \mathrm{GL}_{m^2 n}(F_v)$ となる殆ど全ての F の素点 v において、 ϕ は球ヘッケ環の作用に関して固有的であるとする。このとき、 ϕ は保型形式である。

証明. moderate growth であることは [1] から従う。あとは $\mathfrak{Z}$ -有限性を考えればよい。

G の標準的放物部分群で、それに関する ϕ の定数項が消えないもののうち極小のものを一つとり、 $R = LV$ と書く。このとき、定数項 ϕ_R はカスプ的である。 ϕ_R は $L(\mathbb{A}_F)$ のカスプ的表現の放物誘導表現の元の（無限）和になっているが、それらの弱リフトが全て一致することがヘッケ環の作用に関する条件（と [8]）から従う。特に ϕ_R は、アルキメデスの局所 A パッケージが（少なくともユニタリ群については）常に有限 multi-set であることから $\mathfrak{Z}$ -有限になる。すると $\mathfrak{Z}$ のネーター性より

$$\mathfrak{Z} = \mathbb{C}y_1 + \cdots + \mathbb{C}y_{l_1} + \mathfrak{Z}z_1 + \cdots + \mathfrak{Z}z_{l_2}$$

と、ある $y_i \in \mathfrak{Z}$ と $z_i \phi_R = 0$ なる $z_i \in \mathfrak{Z}$ によって書ける。つまり

$$\mathfrak{Z}\phi = \sum_i \mathbb{C}y_i \phi + \sum_j \mathfrak{Z}z_j \phi$$

となる。ここで、 $(z_j \phi)_R = z_j \phi_R = 0$ に注意する。 $z_j \phi$ に ϕ と同じ手続きを帰納的に繰り返すことで、 ϕ の $\mathfrak{Z}$ -有限性を得る。□

保型形式については cuspidal support を用いた二乗可積分性の必要十分条件が知られていて（[8, §1.4.11] を見よ）、それを用いると以下が従う。

命題 7. ϕ を $G(F) \backslash G(\mathbb{A}_F)$ 上の滑らかで K -有限な複素数値関数とする。 ϕ は $G(F_v) \simeq \mathrm{GL}_{mn}(F_v)$ なる殆ど全ての v において不分岐既約表現を生成し、それらの Satake パラメータたちは（[9] に基づき） $\mathrm{Sp}(\tau, n)$ に対応するとする（特に ϕ は保型形式）。このとき、 ϕ は二乗可積分である。

証明. Arthur 分類を踏まえると、 ϕ の cuspidal support は常に、正の整数 $M, \{r_i\} = \{(n-1)/2, \dots, (n-2M+1)/2\}$ となる実数 $r_1, \dots, r_M$, $\mathrm{BC}(\sigma') = \mathrm{Sp}(\tau, n-2M)$ となるカスプ的保型表現により

$$(\tau | \det |_{\mathbb{A}_E}^{r_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \tau | \det |_{\mathbb{A}_E}^{r_M} \boxtimes \sigma', L)$$

と書ける（ L は G の適当な標準的放物部分群の Levi 部分群）。また、 $\tau | \det |_{\mathbb{A}_E}^{r_1} \boxtimes \cdots \boxtimes \tau | \det |_{\mathbb{A}_E}^{r_M} \boxtimes \sigma'$ の放物誘導表現の、 $G(F_v) \simeq \mathrm{GL}_{mn}(F_v)$ なる殆ど全ての v における局所成分が不分岐表現を部分表現に持たなければならないという要請から、任意の i について $r_i < 0$ がわかる（[2] などを見よ）。するとこれは、square-integrability criterion から二乗可積分である。□

6 結論

ここまで見てきたものをまとめると、次のようになる。

定理 8. (*) を仮定すると、 $\mathcal{DD}$ は次を満たす。

- (1). $\mathcal{DD}$ は $G(\mathbb{A}_F) \times G(\mathbb{A}_F)$ の離散的保型表現の直和である (命題 3 と命題 7)。
- (2). σ_1, σ_2 を $G(\mathbb{A}_F)$ の離散的保型表現としたとき、 $\sigma_1 \boxtimes \sigma_2$ が $\mathcal{DD}$ の部分空間になるには、 σ_2 の弱リフトが $\mathrm{Sp}(\tau, n)$ であり、かつ σ_1 の弱リフトが $\mathrm{Sp}(\bar{\tau}, n)(\chi_\tau^2)(\det)$ となる必要がある (命題 3)。
- (3). σ_1, σ_2 を $G(\mathbb{A}_F)$ のカスプ的保型表現としたとき、 $\sigma_1 \boxtimes \sigma_2$ が $\mathcal{DD}$ の部分空間になるには、 σ_2 の弱リフトが $\mathrm{Sp}(\tau, n)$ であり、かつ $\sigma_1 = \bar{\sigma}_2 \chi_\tau(\det_G)$ となることが必要十分である (命題 2)。

注意 9. 上記の通り、 $\mathcal{DD}$ には弱リフトが $\mathrm{Sp}(\tau, n)$ となる $G(\mathbb{A}_F)$ のカスプ的保型表現全てが現れ、弱リフトが $\mathrm{Sp}(\tau, n)$ とならない離散的保型表現は一切現れない。しかし、弱リフトが $\mathrm{Sp}(\tau, n)$ となる residual 保型表現については何も述べていない。これを打開するには、twisted doubling zeta 積分が residual な保型形式にも拡張される必要がある。

謝辞

講演の機会および本稿執筆の機会をくださった軍司圭一先生と武田秀一郎先生に、この場をお借りして感謝申し上げます。

参考文献

- [1] V. Averbuch. Remark on the definition of an automorphic form. *Compositio Math.*, 59(1):3–13, 1986.
- [2] J. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive p -adic groups. I. *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4)*, 10:441–472, 1977.
- [3] Yuanqing Cai. Twisted doubling integrals for classical groups. *Math. Z.*, 297(3-4):1075–1104, 2021.
- [4] Yuanqing Cai, Solomon Friedberg, David Ginzburg, and Eyal Kaplan. Doubling constructions and tensor product L -functions: the linear case. *Invent. Math.*, 217(3):985–1068, 2019.
- [5] David Ginzburg and David Soudry. Double descent in classical groups. *J. Number Theory*, 235:1–156, 2022.
- [6] Nozomi Ito. The square-integrability of double descent. preprint. arXiv:2508.12489.
- [7] Dihua Jiang, Baiying Liu, and Lei Zhang. Poles of certain residual Eisenstein series of classical groups. *Pacific J. Math.*, 264(1):83–123, 2013.
- [8] Colette Moeglin and Jean-Loup Waldspurger. *Spectral decomposition and Eisenstein series*, volume 113 of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [9] Dinakar Ramakrishnan. A theorem on $\mathrm{gl}(n)$ a la tchebotarev. preprint. arXiv:1806.08429.
- [10] Shunsuke Yamana. L -functions and theta correspondence for classical groups. *Invent. Math.*, 196(3):651–732, 2014.