

関係付き叢を用いたヤン・バクスター方程式の解の特徴付け

— 叢上のヤン・バクスター方程式のガーサイド理論 —

北海道大学理学部数学 澁川 陽一

Youichi Shibukawa

Department of Mathematics, Faculty of Science

Hokkaido University

1 イントロダクション

Garside は、学位論文で Artin ブレイド群に対する共役問題 (Conjugacy Problem) を解決した [7]. 1970 年代に入り, Brieskorn-Saito [2] および Deligne [5] は, Garside の得た結果を有限コクセター群に付随したブレイド群 (Artin-Tits group of spherical type) へと拡張した.

現在も発展しているこのガーサイド理論の研究で培われた手法を, 圏論の言葉で纏めたのが [4] である.

ここで, 通常のベクトルの和に関する自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ ($n = 1, 2, \dots$) を例にとる [4, I.1.1].

$$\mathbb{Z}^n = \left\{ \begin{pmatrix} g(1) \\ g(2) \\ \vdots \\ g(n) \end{pmatrix} \mid g(1), g(2), \dots, g(n) \in \mathbb{Z} \right\}.$$

自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ の部分モノイド $\mathbb{N}^n$ を

$$\mathbb{N}^n = \{g \in \mathbb{Z}^n \mid g(i) \in \mathbb{N} (:= \{0, 1, 2, \dots\})\}$$

とし, 2^n 個の元からなる $\mathbb{N}^n$ の部分集合 E_n を, $E_n := \{g \in \mathbb{N}^n \mid g(i) = 0, 1\}$ と定める. $f, g \in \mathbb{N}^n$ に対し

$$f \leq g \Leftrightarrow f(i) \leq g(i) \quad (\forall i = 1, 2, \dots, n)$$

と定めると, $\leq$ は順序関係となる. この順序関係に関し, $\mathbb{N}^n$ は normal decomposition と呼ばれる良い性質を持つ (定理 6.3 (2) 参照).

命題 1.1. $f \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$ ならば

$$\begin{cases} f = f_1 + f_2 + \dots + f_p; \\ i < p, s \leq g + f_i + f_{i+1} \ (s \in E_n, g \in \mathbb{N}^n) \Rightarrow s \leq g + f_i \end{cases}$$

を満たすような $f_1, f_2, \dots, f_p \in E_n \setminus \{0\}$ が一意的存在する.

$$f = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{N}^4 \text{ を例にすると, } f \text{ の normal decomposition は次のようになる.}$$

$$f = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, f_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix})$$

つまり、この分解は「 f の各成分を $3 = 1 + 1 + 1$, $2 = 1 + 1$ と考え、1 を左づめに書いて $f_1, f_2, \dots$ を得る」となっている。

部分モノイド $\mathbb{N}^n$ に関するこの分解を反映して、自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ も (symmetric) normal decomposition を持つ (命題 6.6 参照)。

命題 1.2. $f \in \mathbb{Z}^n$ ならば

$$\begin{cases} f = -g_q - g_{q-1} - \dots - g_1 + f_1 + f_2 + \dots + f_p; \\ i < p, s \leq g + f_i + f_{i+1} \ (s \in E_n, g \in \mathbb{Z}^n) \Rightarrow s \leq g + f_i; \\ i < q, s \leq g + g_i + g_{i+1} \ (s \in E_n, g \in \mathbb{Z}^n) \Rightarrow s \leq g + g_i; \\ h' \leq h + g_1, h' \leq h + f_1 \ (h, h' \in \mathbb{Z}^n) \Rightarrow h' \leq h \end{cases}$$

を満たすような $g_1, g_2, \dots, g_q, f_1, f_2, \dots, f_p \in E_n$ が存在する。

この分解は、まず $f \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}$ を成分が 0 以下の部分と成分が $\mathbb{N}$ の部分の 2 つに分け、次にその各部分を命題 1.1 のように分解すればよい。例えば

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

このような良い性質を持つ群 $\mathbb{Z}^n$ は、 $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ を生成元として

$$\mathbb{Z}^n = \langle \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \mid \{e_i + e_j = e_j + e_i \mid i, j = 1, 2, \dots, n\} \rangle$$

という表示を持つ。この関係式 $\{e_i + e_j = e_j + e_i \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}$ から写像

$$\sigma : \{e_1, \dots, e_n\} \times \{e_1, \dots, e_n\} \ni (e_i, e_j) \mapsto (e_j, e_i) \in \{e_1, \dots, e_n\} \times \{e_1, \dots, e_n\} \quad (1.1)$$

が定義され、これは集合上のヤン・バクスター方程式

$$(\sigma \times \mathbf{1})(\mathbf{1} \times \sigma)(\sigma \times \mathbf{1}) = (\mathbf{1} \times \sigma)(\sigma \times \mathbf{1})(\mathbf{1} \times \sigma)$$

を満たす ($\mathbf{1} = \text{id}_{\{e_1, \dots, e_n\}}$)。

逆に式 (1.1) の集合上のヤン・バクスター方程式の解 σ を出発点とすれば、この解 $(\sigma(e_i, e_j) = (e_j, e_i))$ が定める関係式 $\{e_i + e_j = e_j + e_i \mid i, j = 1, 2, \dots, n\}$ を通じて、写像 σ が自由アーベル群 $\mathbb{Z}^n$ を決定しているので、ヤン・バクスター方程式の解 σ が群 $\mathbb{Z}^n$ の持つ良い性質を導いていると言える。

この立場から、Chouraqui [3] は集合上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造群のガーサイド理論的性質を研究した。これを構造圏・構造亜群にまで一般化したのが [6] である。

本稿では、[6] に従い、簾 (クイバー) 上のヤン・バクスター方程式の解に対する関係付き簾を用いた特徴付けに主眼をおいて紹介する。これは、時間の関係上、講演ではこの部分を簡単にしか説明できなかったためである。また、簾上のヤン・バクスター方程式の解が定める構造圏のガーサイド理論的性質の説明には [4, II, III, IV] の大部分の内容を必要とするため、少ない予備知識で紹介することのできる「解の特徴付け」に焦点を絞ったこともある。

本稿の構成は以下の通りである。

第 2 章では簾上のヤン・バクスター方程式を紹介する。その解が非退化・対合的であることの定義も与える。第 3 章では、圏のイデアルと関係付き簾を紹介し、商圏や道圏 (path category) の定義を与えた。よく知られた商圏における合同関係の別表示についても記載している [1, A.1]。第 4 章では、簾上のヤン・バクスター方程式の非退化かつ対合的である解が定める関係付き簾の満たす性質について纏めた。第 5 章では、第 4 章の逆を示した。すなわち、適切な性質を持つ関係付き簾からヤン・バクスター方程式の非退化かつ対合的な解が構成できることを示した。これら第 4, 5 章が本稿の中核を成す。

第 6 章で構造圏および構造亜群について簡単に説明して、本稿は終わる。

2 簾上のヤン・バクスター方程式

$Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を簾 (クイバー) とする。すなわち

定義 2.1. 頂点 (vertex) の集合 Q_0 と矢 (arrow) の集合 Q_1 に、始点写像 $s : Q_1 \rightarrow Q_0$ と終点写像 $t : Q_1 \rightarrow Q_0$ を伴った有向多重グラフ $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ を簾と呼ぶ。

本章では簾上のヤン・バクスター方程式を紹介する。

$n \in \mathbb{N}$ に対し、簾 Q から構成される長さ n の道 (path) 全体を $Q_{(n)}$ とする。

$$Q_{(n)} = \{a_1|a_2|\cdots|a_n \mid a_i \in Q_1, s(a_{i+1}) = t(a_i) \ (i = 1, 2, \dots, n-1)\}.$$

$Q_{(0)}$ は長さ 0 の道 (空語) ε_x ($x \in Q_0$) からなる $Q_{(0)} := \{\varepsilon_x \mid x \in Q_0\} (\simeq Q_0)$ という集合である。さらに、集合 $Q_{(n)}$ の和を $Q_{(\geq 0)} := \coprod_{n \in \mathbb{N}} Q_{(n)}$ と書く。これにより、新たに簾 $\mathbb{P}Q = (Q_0, Q_{(\geq 0)}, s, t)$ が構成される。ここで、 $s : Q_{(\geq 0)} \rightarrow Q_0, t : Q_{(\geq 0)} \rightarrow Q_0$ は、それぞれ、道の始点と終点に対応させる写像である。この簾 $\mathbb{P}Q$ は、長さ 0 の道 ε_x を恒等射、道の連結 (concatenation) を合成とすることで自由圏と呼ばれる圏になる。

注意 2.2. 圏の定義において、射 $f : x \rightarrow y, g : y \rightarrow z$ の合成を $g \circ f : x \rightarrow z$ と書くことが多いが、自由圏の道の合成 (例えば、 $t(c) = s(d)$ のとき $(a|b|c)(d|e|f|g) = a|b|c|d|e|f|g$ など) と合わせるため、本稿では、 $fg : x \rightarrow z$ と逆順に書く。道 (path) を含め、この記法は [1] とは異なっている。

以下

$$a|b \in Q_{(2)} \Rightarrow s(\tau(a|b)) = s(a|b)(= s(a)), t(\tau(a|b)) = t(a|b)(= t(b)) \quad (2.1)$$

を満たす写像 $\tau : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ を考える。

定義 2.3. 写像 $\tau \times \mathbf{1}, \mathbf{1} \times \tau : Q_{(3)} \rightarrow Q_{(3)}$ を

$$(\tau \times \mathbf{1})(a|b|c) = \tau(a|b)|c, (\mathbf{1} \times \tau)(a|b|c) = a|\tau(b|c) \quad (a|b|c \in Q_{(3)})$$

と定義する。

さらに

定義 2.4. 写像 $\tau : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ に関する $Q_{(3)}$ 上の方程式

$$(\tau \times \mathbf{1})(\mathbf{1} \times \tau)(\tau \times \mathbf{1}) = (\mathbf{1} \times \tau)(\tau \times \mathbf{1})(\mathbf{1} \times \tau) \quad (2.2)$$

を簾 Q 上のヤン・バクスター方程式といい、 τ をその解という。

集合 $\{e_1, \dots, e_n\}$ を, 頂点集合が 1 点集合である籐 (この籐の矢の集合が $\{e_1, \dots, e_n\}$) とみなせば, 式 (1.1) の写像は, この籐上のヤン・バクスター方程式の解となる.

以下, $a|b \in Q_{(2)}$ に対し

$$(a \rightarrow b)|(a \leftarrow b) := \tau(a|b) \quad (2.3)$$

という記号 $a \rightarrow b, a \leftarrow b (a|b \in Q_{(1)})$ を用いる.

命題 2.5. 次は同値である.

- (1) $\tau : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ は籐 Q 上のヤン・バクスター方程式の解.
- (2) $a|b|c \in Q_{(3)}$ ならば

$$\begin{cases} (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c) = a \rightarrow (b \rightarrow c); \\ (a \rightarrow b) \leftarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c) = (a \leftarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \leftarrow c); \\ (a \leftarrow b) \leftarrow c = (a \leftarrow (b \rightarrow c)) \leftarrow (b \leftarrow c). \end{cases} \quad (2.4)$$

証明. $a|b|c \in Q_{(3)}$ に対して $(\tau \times \mathbf{1})(\mathbf{1} \times \tau)(\tau \times \mathbf{1})(a|b|c)$ および $(\mathbf{1} \times \tau)(\tau \times \mathbf{1})(\mathbf{1} \times \tau)(a|b|c)$ を計算し, その各成分を比較することにより (1) $\Leftrightarrow$ (2) を得る. $\square$

定義 2.6. $x \in Q_0$ に対し, 記号 ${}_x Q_1, Q_{1x}$ を, ${}_x Q_1 := \{a \in Q_1 \mid s(a) = x\}, Q_{1x} := \{a \in Q_1 \mid t(a) = x\}$ と定める.

定義 2.7. 任意の $a, b \in Q_1$ に対し, 写像 $a \rightarrow _ : {}_{t(a)} Q_1 \ni b \mapsto a \rightarrow b \in {}_{s(a)} Q_1$ と $_ \leftarrow b : Q_{1s(b)} \ni a \mapsto a \leftarrow b \in Q_{1t(b)}$ が共に全単射であるとき, 写像 $\tau : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ は非退化 (non-degenerate) であるという.

定義 2.8. 写像 $\tau : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ が $\tau^2 = \mathbf{1}$ を満たすとき, 写像 τ は対合的 (involutive) であるという.

式 (1.1) の写像 σ は非退化かつ対合的である. 実際, 写像 $a \rightarrow _$ と $_ \leftarrow b$ が共に恒等写像となるので全単射であるし, また, 容易に $\sigma^2 = \mathbf{1}$ も確かめられる.

直接計算により次を得る.

命題 2.9. 次は同値.

- (1) τ は対合的.
- (2) $a|b \in Q_{(2)} \Rightarrow (a \rightarrow b) \rightarrow (a \leftarrow b) = a, (a \rightarrow b) \leftarrow (a \leftarrow b) = b.$

3 商圏

本章では商圏についてまとめる. 記号などは主として [1] に従う (が, 射の合成には注意すること (注意 2.2)).

定義 3.1. 圏 $\mathcal{C}$ の射 a, b が, $s(a) = s(b), t(a) = t(b)$ を満たすとき, 組 (a, b) は平行であるという. 圏 $\mathcal{C}$ の平行な射の組全体を $\text{Par}(\mathcal{C})$ と書く.

定義 3.2. $R \subset \text{Par}(\mathcal{C})$ が次の条件 (1)–(4) を満たすとき, R を圏 $\mathcal{C}$ のイデアルといい, $R \trianglelefteq \mathcal{C}$ (もしくは $\mathcal{C} \supseteq R$) と書く.

- (1) a が圏 $\mathcal{C}$ の射ならば, $(a, a) \in R$.
- (2) $(a, b) \in R \Rightarrow (b, a) \in R$.
- (3) $(a, b), (b, c) \in R \Rightarrow (a, c) \in R$.
- (4) $(a, b) \in R$ と圏 $\mathcal{C}$ の射 f, g に対し射 fag が存在するならば, $(fag, fbg) \in R$.

条件 (4) を合同関係という (条件 (1), (2), (3) は同値関係である).

$\text{Par}(\mathcal{C})$ は圏 $\mathcal{C}$ のイデアルである. 圏のイデアルは次の性質を持つ.

命題 3.3. I を空でない集合とする. 各 $R_i (\subset \text{Par}(\mathcal{C}))$ ($i \in I$) が圏 $\mathcal{C}$ のイデアルならば, $R = \bigcap_{i \in I} R_i$ も圏 $\mathcal{C}$ のイデアルとなる.

$R \subset \text{Par}(\mathcal{C})$ に対し, $\mathcal{J}_R(\mathcal{C}) := \{s \mid R \subset s \leq \mathcal{C}\}$ とおく. $(R \subset) \text{Par}(\mathcal{C})$ が $\mathcal{C}$ のイデアルであるから $\mathcal{J}_R(\mathcal{C}) \neq \emptyset$ であって, 上の命題により, $\langle R \rangle := \bigcap \mathcal{J}_R(\mathcal{C})$ は圏 $\mathcal{C}$ のイデアルとなるが, 特に, $\langle R \rangle$ は R を含む最小のイデアルとなる. この $\langle R \rangle$ を, R により生成される圏 $\mathcal{C}$ のイデアルと呼ぶ.

定義 3.4. 圏 $\mathcal{C}$ のイデアル R に対し, 商圏 $\mathcal{C}/R$ を次のように定義する (イデアル R が圏 $\mathcal{C}$ の射全体における同値関係であることに注意).

- (1) $\mathcal{C}/R$ の対象は, 圏 $\mathcal{C}$ の対象と同一.
- (2) 対象 x から対象 y への $\mathcal{C}/R$ の射は, $\bar{f} := [f]_R$ (f は, 圏 $\mathcal{C}$ での対象 x から対象 y への射).
- (3) 対象 x 上の $\mathcal{C}/R$ の恒等射は, 圏 $\mathcal{C}$ の恒等射の類 $[1_x]_R$.
- (4) $\bar{f}\bar{g} := \overline{fg}$.

合同関係 (4) により, 商圏 $\mathcal{C}/R$ での合成 $\bar{f}\bar{g} := \overline{fg}$ は well-defined となっている.

定義 3.5. $R \subset \text{Par}(\mathbb{P}Q)$ に対し, R を Q の関係, 組 (Q, R) を関係付き範という. さらに, 自由圏 $\mathbb{P}Q$ から定まる圏

$$\mathbb{P}(Q, R) := \begin{cases} \mathbb{P}Q / \langle R \rangle & (R \neq \emptyset), \\ \mathbb{P}Q & (R = \emptyset) \end{cases}$$

を関係付き範 (Q, R) の道圏 (path category) という.

$\mathcal{C}$ を圏, $R \subset \text{Par}(\mathcal{C})$, x, y を圏 $\mathcal{C}$ の対象とする. $\mathcal{C}(x, y)$ を $s(a) = x, t(a) = y$ となる圏 $\mathcal{C}$ の射 a 全体とし

$$\begin{aligned} R(x, y) &:= \{(a, b) \in R \mid a, b \in \mathcal{C}(x, y)\}, \\ C_R(x, y) &:= \{(fag, fbg) \in \text{Par}(\mathcal{C}) \mid \exists u, v \text{ (}\mathcal{C} \text{ の対象) s.t. } f \in \mathcal{C}(x, u), g \in \mathcal{C}(v, y), (a, b) \in R(u, v)\} \end{aligned} \quad (3.1)$$

とおくと, $R(x, y) \subset C_R(x, y)$. さらに

$$C_R^{-1}(x, y) := \{(b, a) \in \text{Par}(\mathcal{C}) \mid (a, b) \in C_R(x, y)\}, \quad (3.2)$$

$$\Delta_{\mathcal{C}}(x, y) := \{(a, a) \in \text{Par}(\mathcal{C}) \mid a \in \mathcal{C}(x, y)\}, \quad (3.3)$$

$$R^{\#}(x, y)^1 := C_R(x, y) \cup C_R^{-1}(x, y) \cup \Delta_{\mathcal{C}}(x, y), \quad (3.4)$$

$n = 2, 3, \dots$ に対し

$$R^\#(x, y)^n := \{(a, c) \in \text{Par}(\mathcal{C}) \mid \exists b \in \mathcal{C}(x, y) \text{ s.t. } (a, b) \in R^\#(x, y)^{n-1}, (b, c) \in R^\#(x, y)^1\},$$

$$R^\#(x, y) := \coprod_{n \geq 1} R^\#(x, y)^n$$

と定めると、次が同値になる。

- (1) $(a, b) \in R^\#(x, y)$;
- (2) $(a, b) \in \text{Par}(\mathcal{C})$ は、条件 $\exists n \geq 1 \exists a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathcal{C}(x, y)$ s.t. $a_0 = a, a_n = b, (a_i, a_{i+1}) \in R^\#(x, y)^1$ ($i = 0, 1, \dots, n-1$) を満たす。

これより、よく知られた次の命題を得る [1, 命題 A.1.3].

命題 3.6. $R \subset \text{Par}(\mathcal{C}) \Rightarrow \langle R \rangle = R^\#$. ただし, $R^\# := \coprod_{(x,y)} R^\#(x, y)$.

4 ヤン・バクスター方程式の解が定める関係付き簾の性質

簾 (クイバー) $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 上の写像 $\tau : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ が

- 性質 (2.1)
- ヤン・バクスター方程式 (2.2)
- 非退化 (定義 2.7)
- 対合的 (定義 2.8)

を満たしているとする。このとき、性質 (2.1) より $R_\tau := \{(a|b, \tau(a|b)) \mid a|b \in Q_{(2)}\} \subset \text{Par}(\mathbb{P}Q)$ となる。

以下、本章では関係付き簾 (Q, R_τ) の性質を明らかにする。

命題 4.1. 関係付き簾 (Q, R_τ) は、 $R = R_\tau$ とした性質 (C1) を満たす。

$$(f, g) \in R \Rightarrow f, g \text{ は長さ } 2;$$

$$(C1) \quad (f, g), (f', g') \in R, f = f' \Rightarrow g = g';$$

$$(f, g), (f', g') \in R, f = g' \Rightarrow g = f';$$

$$(f, g), (f', g') \in R, g = g' \Rightarrow f = f'.$$

証明. R_τ の定義より、 $(f, g) \in R_\tau$ ならば f, g の長さがそれぞれ 2 となることはよい。

次に、 $(f, g), (f', g') \in R_\tau$ とする。すると、 $(f, g) = (a|b, \tau(a|b)), (f', g') = (a'|b', \tau(a'|b'))$ となる $a|b, a'|b' \in Q_{(2)}$ が存在する。

まず $f = f'$ とすると、 $a|b = a'|b'$ 。よって、 $g = \tau(a|b) = \tau(a'|b') = g'$ 。

今度は $f = g'$ とする。すると $a|b = \tau(a'|b')$ 。 τ が対合的だから、 $g = \tau(a|b) = \tau^2(a'|b') = a'|b' = f'$ 。

最後に $g = g'$ とする。すると τ が対合的だから $f = a|b = \tau^2(a|b) = \tau(g) = \tau(g') = \tau^2(a'|b') = a'|b' = f'$ 。 □

命題 4.2. 関係付き簾 (Q, R_τ) は、 $R = R_\tau$ とした性質 (C2) を満たす。

(C2) $a, b \in Q_1$ ($s(a) = s(b), a \neq b$) $\Rightarrow \exists_1 v, w \in Q_1$ s.t. $(a|v, b|w) \in R$ or $(b|w, a|v) \in R$.

証明. 以下、式 (2.3) の記号を用いる. τ が非退化だから、定義 2.7 より $v := (a \rightarrow _)^{-1}(b)(\in {}_{t(a)}Q_1)$ とおくと、 $a \rightarrow v = b$. さらに、 τ が対合的であることから命題 2.9 を用いると、 $(a \rightarrow v) \rightarrow (a \leftarrow v) = a$ 、つまり、 $a \leftarrow v = ((a \rightarrow v) \rightarrow _)^{-1}(a) = (b \rightarrow _)^{-1}(a)$. そこで $w := (b \rightarrow _)^{-1}(a)(\in {}_{t(b)}Q_1)$ とすると、 $\tau(a|v) = (a \rightarrow v)|(a \leftarrow v) = b|w$ となるから、 $(a|v, b|w) \in R_\tau$.

このような v, w は一意的である. 実際、 $(a|v, b|w) = (a|v', b|w') \in R_\tau$ とすると $b = a \rightarrow v = a \rightarrow v'$ となる. ここで τ が非退化だから、定義 2.7 より写像 $a \rightarrow _ : {}_{t(a)}Q_1 \rightarrow {}_{s(a)}Q_1$ が全単射となるので $v = v'$. これより、 $w = a \leftarrow v = a \leftarrow v' = w'$. $\square$

同様の証明から次の命題を得る.

命題 4.3. 関係付き簇 (Q, R_τ) は、 $R = R_\tau$ とした性質 (C2') を満たす.

(C2') $a, b \in Q_1$ ($t(a) = t(b), a \neq b$) $\Rightarrow \exists_1 v, w \in Q_1$ s.t. $(v|a, w|b) \in R$ or $(w|b, v|a) \in R$.

命題 4.4. 関係付き簇 (Q, R_τ) は、 $R = R_\tau$ とした性質 (C3) を満たす.

(C3) $a \in Q_1 \Rightarrow \exists_1 z_a \in Q_1$ s.t.

(C3-0) $s(z_a) = t(a)$.

(C3-1) $v \in Q_1, s(v) = t(a), v \neq z_a \Rightarrow \exists b, w \in Q_1$ ($s(b) = s(a), b \neq a$) s.t. $(a|v, b|w) \in R$ or $(b|w, a|v) \in R$.

(C3-2) $(a|z_a, b|w) \in R$ or $(b|w, a|z_a) \in R \Rightarrow b = a, w = z_a$.

証明. $z_a := (a \rightarrow _)^{-1}(a)$ とおく. $a \rightarrow _ : {}_{t(a)}Q_1 \rightarrow {}_{s(a)}Q_1$ だから、 $s(z_a) = t(a)$.

$v \in Q_1, s(v) = t(a), v \neq z_a$ と仮定する. このとき、 $b := a \rightarrow v, w := a \leftarrow v$ とおく. すると、 $s(b) = s(a)$. $b = a$ と仮定すると、 $a = a \rightarrow v$ となるから $v = (a \rightarrow _)^{-1}(a) = z_a$ で、 $v \neq z_a$ に矛盾する. よって $b \neq a$. さらに $(a|v, b|w) = (a|v, (a \rightarrow v)|(a \leftarrow v)) = (a|v, \tau(a|v)) \in R_\tau$.

$(a|z_a, b|w) \in R_\tau$ と仮定すると、 $b|w = \tau(a|z) = (a \rightarrow z_a)|(a \leftarrow z_a)$ 、よって、 $b = a \rightarrow z_a$ となる. $z_a := (a \rightarrow _)^{-1}(a)$ だったから、 $b = a \rightarrow ((a \rightarrow _)^{-1}(a)) = a$. 一方、 τ が対合的であることから命題 2.9 を用いると、

$$\begin{aligned} w &= a \leftarrow z_a \\ &= ((a \rightarrow z_a) \rightarrow _)^{-1}(a) \\ &= ((a \rightarrow ((a \rightarrow _)^{-1}(a))) \rightarrow _)^{-1}(a) \\ &= (a \rightarrow _)^{-1}(a) \\ &= z_a. \end{aligned}$$

$(b|w, a|z_a) \in R_\tau$ ならば $a|z_a = \tau(b|w)$ なので、定義 2.7 より $\tau(a|z_a) = \tau^2(b|w) = b|w$ となり、 $(a|z_a, b|w) \in R_\tau$ となるので、この場合も上と同様に、 $b = a, w = z_a$ となる.

条件 (C3) (つまり、(C3-0), (C3-1), (C3-2)) を満たす $z'_a \in Q_1$ が存在したと仮定する. $z'_a \neq z_a$ と仮定すると、条件 (C3-1) の v を z'_a とすることにより、 $(a|z'_a, b|w) \in R_\tau$ または $(b|w, a|z'_a) \in R_\tau$ となる $b, w \in Q_1$ ($s(b) = s(a), b \neq a$) が存在する. すると、 z'_a に関する条件 (C3-2) より $b = a$ となるが、これは $b \neq a$ に反する. よって $z'_a = z_a$ となり、条件 (C3) を満たす z_a の存在は一意的. $\square$

命題 4.5. 関係付き叢 (Q, R_τ) は, $R = R_\tau$ とした性質 (C3') を満たす.

(C3') $a \in Q_1 \Rightarrow \exists_1 z^a \in Q_1$ s.t.

(C3'-0) $t(z^a) = s(a)$.

(C3'-1) $v \in Q_1, t(v) = s(a), v \neq z^a \Rightarrow \exists b, w \in Q_1 (t(b) = t(a), b \neq a)$ s.t. $(v|a, w|b) \in R$ or $(w|b, v|a) \in R$.

(C3'-2) $(z^a|a, w|b) \in R$ or $(w|b, z^a|a) \in R \Rightarrow b = a, w = z^a$.

証明. $z^a := (_ \leftarrow a)^{-1}(a)$ とすれば上と同様に証明できる. □

定義 4.6. $a, b \in Q_1 (s(a) = s(b))$ に対し, $a \star b := (a \rightarrow _)^{-1}(b) \in {}_{t(a)}Q_1$ と定める.

写像 τ が対合的であることから, 命題 2.9 (2) より

命題 4.7. $a|b \in Q_{(2)} \Rightarrow a \leftarrow b = (a \rightarrow b) \star a$.

命題 4.8. $s(a) = s(b) = s(c)$ を満たす $a, b, c \in Q_1$ に対し

$$(a \star b) \star (a \star c) = (b \star a) \star (b \star c). \quad (4.1)$$

この式 (4.1) を RC (Right Cyclic) 則という.

証明. $s(a) = s(b) = s(c)$ を満たす $a, b, c \in Q_1$ に対し, $x := a, y := a \star b, z := (a \star b) \star (a \star c)$ とおく. $s(a \star b) = t(a), s((a \star b) \star (a \star c)) = t(a \star b)$ であることから, $x|y|z \in Q_{(3)}$. また, 定義 4.6 と命題 4.7 より $\tau(a|a \star b) = (a \rightarrow (a \star b))|(a \leftarrow (a \star b)) = b|((a \rightarrow (a \star b)) \star a) = b|b \star a$ となるので, 性質 (2.1) から $t(a \star b) = t(b \star a)$ となる.

ヤン・バクスター方程式 (2.2) が成立していることと命題 2.5 より, 式 (2.4) が成り立つ. さらに定義 4.6 と命題 4.7 も合わせて用いると

$$\begin{aligned} b \rightarrow ((b \star a) \rightarrow ((a \star b) \star (a \star c))) &= (a \rightarrow (a \star b)) \rightarrow (((a \rightarrow (a \star b)) \star a) \rightarrow ((a \star b) \star (a \star c))) \\ &= (a \rightarrow (a \star b)) \rightarrow ((a \leftarrow (a \star b)) \rightarrow ((a \star b) \star (a \star c))) \\ &= (x \rightarrow y) \rightarrow ((x \leftarrow y) \rightarrow z) \\ &= x \rightarrow (y \rightarrow z) \\ &= a \rightarrow ((a \star b) \rightarrow ((a \star b) \star (a \star c))) \\ &= a \rightarrow (a \star c) \\ &= c. \end{aligned}$$

上式に再び定義 4.6 を適用すると

$$\begin{aligned} b \rightarrow ((b \star a) \rightarrow ((a \star b) \star (a \star c))) &= c \Leftrightarrow (b \star a) \rightarrow ((a \star b) \star (a \star c)) = b \star c \\ &\Leftrightarrow (a \star b) \star (a \star c) = (b \star a) \star (b \star c) \end{aligned}$$

となる. □

注意 4.9. 正の整数の補数は RC 則 (4.1) を満たす. ただし, 2 つの正の整数 x, y に対し, $x \star y := x^{-1}\text{lcm}(x, y) (\in \mathbb{Z}_{>0})$ とおき, これを y に関する x の補数という. 実際, $f, g_1, g_2 \in \mathbb{Z}_{>0}$ に対し, $g_1 f_1 = \text{lcm}(f, g_1), g_2 f_2 = \text{lcm}(f_1, g_2)$ とおくと $(f_1, f_2 \in \mathbb{Z}_{>0})$, 「すべての公倍数を割り切る公倍数」という最小公倍

数の定義から $\text{lcm}(f, g_1 g_2) = g_1 g_2 f_2$ となる [4, Proposition II.2.12]. これにより $(g_1 g_2) \star f = f_2 = g_2 \star f_1 = g_2 \star (g_1 \star f)$ が得られ, $f = c, g_1 = a, g_2 = a \star b$ とすると, $(a \star b) \star (a \star c) = (a(a \star b)) \star c = \text{lcm}(a, b) \star c$. この右辺は a, b を入れ替えても値が変わらないから, RC 則が成り立つ. つまり, この場合の RC 則は補数の compatibility 条件である.

条件 (C2) の $v(\in Q_1)$ を用いて, $s(a) = t(a), a \neq b$ を満たす $a, b \in Q_1$ に対し, $a \star' b := v$ と定める.

命題 4.10. $a, b \in Q_1$ ($s(a) = t(a), a \neq b$) $\Rightarrow a \star' b = a \star b$.

証明. $s(a) = t(a), a \neq b$ を満たす $a, b \in Q_1$ に対し, 条件 (C2) より $(a|a \star' b, b|w) = (a|v, b|w) \in R_\tau$ または $(b|w, a|a \star' b) = (b|w, a|v) \in R_\tau$ となる $w \in Q_1$ が (一意的に) 存在する. だから, $b|w = \tau(a|a \star' b)$ または $a|a \star' b = \tau(b|w)$. 写像 τ が対合的だから, どちらにしても $b|w = \tau(a|a \star' b)$, よって, $a \rightarrow (a \star' b) = b$ となる. したがって, $a \star b$ の定義から $a \star' b = a \star b$. $\square$

系 4.11. 関係付き箴 (Q, R_τ) は次の性質 (C4) を満たす.

(C4) $a, b, c \in Q_1$ ($s(a) = s(b) = s(c)$, a, b, c はどの 2 つも互いに相異なる)
 $\Rightarrow (a \star' b) \star' (a \star' c) = (b \star' a) \star' (b \star' c)$.

証明. $a, b, c \in Q_1$ ($s(a) = s(b) = s(c)$) は, どの 2 つも互いに相異なるので, $a \star' b, a \star' c, b \star' a, b \star' c$ は定義されている.

また, $a \star' b = a \star' c$ と仮定すると, 命題 4.10 より $(a \rightarrow _)^{-1}(b) = a \star b = a \star' b = a \star' c = a \star c = (a \rightarrow _)^{-1}(c)$ となるので, $b = c$. これは $a, b, c \in Q_1$ が, どの 2 つも互いに相異なることに矛盾する. よって $a \star' b \neq a \star' c$. さらに $s(a \star' b) = t(a) = s(a \star' c)$ だから, $(a \star' b) \star' (a \star' c)$ は定義されている.

同様に, $(b \star' a) \star' (b \star' c)$ も定義されている.

ここで, 再び命題 4.10 を用いることにより

$$(a \star' b) \star' (a \star' c) = (a \star b) \star (a \star c); \quad (b \star' a) \star' (b \star' c) = (b \star a) \star (b \star c).$$

命題 4.8 を用いると, $(a \star' b) \star' (a \star' c) = (b \star' a) \star' (b \star' c)$ を得る. $\square$

5 関係付き箴の定めるヤン・バクスター方程式の解

本章では, 条件 (C1), (C2), (C2'), (C3), (C3'), (C4) を満たす関係付き箴 (Q, R) ($Q = (Q_0, Q_1, s, t), R \subset \text{Par}(\mathbb{P}Q)$) から

- 性質 (2.1)
- ヤン・バクスター方程式 (2.2)
- 非退化 (定義 2.7)
- 対合的 (定義 2.8)

を満たす箴 Q 上のヤン・バクスター方程式の解 $\sigma: Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ を構成する. すなわち, 第 4 章で得られた条件 (C1), (C2), (C2'), (C3), (C3'), (C4) が, 性質 (2.1) を満たす非退化かつ対合的な (箴 Q 上の) ヤン・バクスター方程式の解を特徴づけていることを示す.

条件 (C2) の $v, w \in Q_1$ を, 以下 $v := a \star' b, w := b \star' a$ と表す. よって, $(a|a \star' b, b|b \star' a) \in R$ または $(b|b \star' a, a|a \star' b) \in R$ となる.

このとき次が成り立つ.

命題 5.1. $a \in Q_1$ に対し, 写像 $a \star' _ : {}_{s(a)}Q_1 \setminus \{a\} \rightarrow {}_{t(a)}Q_1 \setminus \{z_a\}$ は全単射.

証明. 条件 (C3-1) より, 写像 $a \star' _ : {}_{s(a)}Q_1 \setminus \{a\} \rightarrow {}_{t(a)}Q_1 \setminus \{z_a\}$ は全射. さらに, この写像は単射でもある. 実際, 条件 (C2) より

$$\begin{aligned} b, b' \in {}_{s(a)}Q_1 \setminus \{a\} \Rightarrow (a|a \star' b, b|b \star' a) \in R \text{ or } (b|b \star' a, a|a \star' b) \in R; \\ (a|a \star' b', b'|b' \star' a) \in R \text{ or } (b'|b' \star' a, a|a \star' b') \in R. \end{aligned}$$

したがって, 条件 (C1) から

$$a \star' b = a \star' b' \Rightarrow a|a \star' b = a|a \star' b' \Rightarrow b|b \star' a = b'|b' \star' a \Rightarrow b = b'$$

となる. □

定義 5.2. $a, b \in Q_1$ ($s(a) = s(b)$) に対し,

$$a \star b = \begin{cases} a \star' b & (b \in {}_{s(a)}Q_1 \setminus \{a\}) \\ z_a & (b = a) \end{cases}$$

と定める.

すると, 命題 5.1 から

系 5.3. 写像 $a \star _ : {}_{s(a)}Q_1 \rightarrow {}_{t(a)}Q_1$ は全単射.

定義 5.4. $a|b \in Q_{(2)}$ に対し, $a \rightarrow b := (a \star _)^{-1}(b)$ とする ($a|b \in Q_{(2)}$ より $b \in {}_{t(a)}Q_1$ であることに注意).

この定義より

命題 5.5. $s(a \rightarrow b) = s(a)$.

さらに

定義 5.6. $a|b \in Q_{(2)}$ に対し, $a \leftarrow b := (a \rightarrow b) \star a$ と定義する.

この定義より, $a|b \in Q_{(2)}$ に対し $t(a \rightarrow b) = s(a \leftarrow b)$ となるので

命題 5.7. $(a \rightarrow b)|(a \leftarrow b) \in Q_{(2)}$.

そこで

定義 5.8. 写像 $\sigma : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ を $\sigma(a|b) := (a \rightarrow b)|(a \leftarrow b)$ と定める.

命題 5.9. $t(a \leftarrow b) = t(b)$.

証明. まず, $b = z_a$ のときを考える. $b = z_a$ ならば, $a \leftarrow b = (a \rightarrow b) \star a = (a \rightarrow z_a) \star a$. 定義 5.4 より $a \rightarrow z_a = c \Leftrightarrow z_a = a \star c$ で, 定義 5.2 より $z_a = a \star a$ だから, $a \star a = a \star c$. 系 5.3 から, $a = c$ となる. よっ

て $a \rightarrow z_a = a$ で

$$a \leftarrow b = (a \rightarrow z_a) \star a = a \star a = z_a.$$

$b = z_a$ だったから, $t(a \leftarrow b) = t(z_a) = t(b)$.

次に, $b \neq z_a$ のときを考える. $c := a \rightarrow b$ とおく. 定義 5.4 より, これは $b = a \star c$ と同値で, もし $c = a$ なら, $b = a \star a = z_a$ となり $b \neq z_a$ に矛盾するから, $c \neq a$. したがって, 定義 5.2 より $b = a \star c = a \star' c$. これから $t(b) = t(a \star' c)$.

一方, 命題 5.5 より $s(c) = s(a \rightarrow b) = s(a)$. $c \neq a$ だったから, 条件 (C2) より, $(a|a \star' c, c|c \star' a) \in R$ または $(c|c \star' a, a|a \star' c) \in R$ となり, どちらの場合でも定義 5.6 より, $t(a \star' c) = t(c \star' a) = t(c \star a) = t((a \rightarrow b) \star a) = t(a \leftarrow b)$. したがって, $t(a \leftarrow b) = t(b)$. $\square$

命題 5.5, 5.9 より

系 5.10. 定義 5.8 の写像 $\sigma : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ は式 (2.1) を満たす.

命題 5.11. $s(a) = s(b) = s(c)$ を満たす任意の $a, b, c \in Q_1$ に対し, RC 則 (4.1) が成り立つならば, 定義 5.8 の写像 $\sigma : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ は籓上のヤン・バクスター方程式 (2.2) の解である.

証明. 命題 2.5 (2) を示す. そこで, $a|b|c \in Q_{(3)}$ とする.

まず

$$(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c) = a \rightarrow (b \rightarrow c) \quad (5.1)$$

を証明する. 左辺を $d := (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c)$, さらに $e := a \rightarrow b$ とおく. $a \leftarrow b = (a \rightarrow b) \star a = e \star a$ となることに注意すると, 定義 5.4 より

$$e \star d = (a \rightarrow b) \star d = (a \rightarrow b) \star ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c)) = (a \leftarrow b) \rightarrow c = (e \star a) \rightarrow c.$$

よって, 再び定義 5.4 を用いると $(e \star a) \star (e \star d) = (e \star a) \star ((e \star a) \rightarrow c) = c$. ここで, $s(e) = s(a \rightarrow b) = s(a) = s((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c)) = s(d)$ に注意して RC 則 (4.1) を用いると, $c = (a \star e) \star (a \star d)$. $a \star e = a \star (a \rightarrow b) = b$ だから, $c = b \star (a \star d)$. よって, $b \rightarrow c = a \star d$, さらに, $a \rightarrow (b \rightarrow c) = d$ となる. したがって, $(a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c) = d = a \rightarrow (b \rightarrow c)$.

次に $(a \leftarrow (b \rightarrow c)) \leftarrow (b \leftarrow c) = (a \leftarrow b) \leftarrow c$ を証明する. 左辺を $f := (a \leftarrow (b \rightarrow c)) \leftarrow (b \leftarrow c)$ とおくと, 定義 5.6 より, $f = (((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a) \rightarrow ((b \rightarrow c) \star b)) \star ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a)$ と計算できる.

$s(a \rightarrow b) = s(a) = s(a \rightarrow (b \rightarrow c))$ に注意して $(b \rightarrow c) \star b = (a \star (a \rightarrow (b \rightarrow c))) \star (a \star (a \rightarrow b))$ に RC 則を適用すると, $(b \rightarrow c) \star b = ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a) \star ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star (a \rightarrow b))$ を得る. したがって定義 5.4 から, $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a) \rightarrow ((b \rightarrow c) \star b) = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star (a \rightarrow b)$ を得る. よって, $f = ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star (a \rightarrow b)) \star ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a)$. $s(a \rightarrow b) = s(a) = s(a \rightarrow (b \rightarrow c))$ に注意して RC 則を適用し, さらに式 (5.1) を用いると, 定義 5.6 から

$$\begin{aligned} f &= ((a \rightarrow b) \star (a \rightarrow (b \rightarrow c))) \star ((a \rightarrow b) \star a) \\ &= ((a \rightarrow b) \star ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c))) \star ((a \rightarrow b) \star a) \\ &= ((a \leftarrow b) \rightarrow c) \star ((a \rightarrow b) \star a) \\ &= ((a \leftarrow b) \rightarrow c) \star (a \leftarrow b) \\ &= (a \leftarrow b) \leftarrow c. \end{aligned}$$

最後に $(a \rightarrow b) \leftarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c) = (a \leftarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \leftarrow c)$ を証明する. 左辺を $g := (a \rightarrow b) \leftarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c)$ とおくと, 定義 5.6 と式 (5.1) より, $g = ((a \rightarrow b) \rightarrow ((a \leftarrow b) \rightarrow c)) \star (a \rightarrow b) = (a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star (a \rightarrow b)$.

さらに, $s(a \rightarrow b) = s(a) = s(a \rightarrow (b \rightarrow c))$ に注意して RC 則を適用すると, $((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a) \star g = ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a) \star ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star (a \rightarrow b)) = (a \star (a \rightarrow (b \rightarrow c))) \star (a \star (a \rightarrow b)) = (b \rightarrow c) \star b = b \leftarrow c$. したがって, $g = ((a \rightarrow (b \rightarrow c)) \star a) \rightarrow (b \leftarrow c) = (a \leftarrow (b \rightarrow c)) \rightarrow (b \leftarrow c)$. $\square$

定理 5.12. $s(a) = s(b) = s(c)$ を満たす $a, b, c \in Q_1$ に対し RC 則 (4.1) が成り立つ.

証明. $a, b, c \in Q_1$ ($s(a) = s(b) = s(c)$) が, どの 2 つも異なっていると仮定する. すると, $(a \star b) \star (a \star c) = (a \star' b) \star (a \star' c)$. $a \star' b = a \star' c$ と仮定すると, 命題 5.1 より $b = c$ となり $b \neq c$ という仮定に矛盾するから, $a \star' b \neq a \star' c$. したがって, $(a \star' b) \star (a \star' c) = (a \star' b) \star' (a \star' c)$. 条件 (C4) より, これは $(b \star' a) \star' (b \star' c)$ となるから, 結局, $(a \star b) \star (a \star c) = (a \star' b) \star' (a \star' c) = (b \star' a) \star' (b \star' c) = (b \star a) \star (b \star c)$.

次に $a = b$ と仮定する. すると, $(a \star b) \star (a \star c) = (a \star a) \star (a \star c) = (b \star a) \star (b \star c)$.

最後に $a \neq b$ と仮定する. すると $t(a \star' b) = t(b \star' a)$. 実際, $(a|a \star' b, b|b \star' a) \in R$ または $(b|b \star' a, a|a \star' b) \in R$ なので, $t(a \star' b) = t(a|a \star' b) = t(b|b \star' a) = t(b \star' a)$.

これより $t_{(a \star' b)} Q_1 = t_{(b \star' a)} Q_1$ となる. 系 5.3 より, $t_{(a \star' b)} Q_1 = (a \star' b) \star (s_{(a \star' b)} Q_1)$. 命題 5.1 から $s(a \star' b) = t(a)$ となるので, $s_{(a \star' b)} Q_1 = t_{(a)} Q_1 = a \star (s_{(a)} Q_1)$. まとめて, $t_{(a \star' b)} Q_1 = (a \star' b) \star (a \star (s_{(a)} Q_1))$. $s_{(b)} Q_1 = s_{(a)} Q_1 = \{a\} \amalg \{b\} \amalg \{c' \in s_{(a)} Q_1 \mid c' \neq a, b\}$ だから, 系 5.3 を考慮すると

$$\begin{aligned} t_{(a \star' b)} Q_1 &= (a \star' b) \star (a \star (\{a\} \amalg \{b\} \amalg \{c' \in s_{(a)} Q_1 \mid c' \neq a, b\})) \\ &= (a \star' b) \star (\{a \star a\} \amalg \{a \star b\} \amalg \{a \star c' \mid c' \in s_{(a)} Q_1 \setminus \{a, b\}\}). \end{aligned}$$

z_a の定義より $a \star a = z_a$, $a \neq b$ より $a \star b = a \star' b$, さらに, $c' \in s_{(a)} Q_1 \setminus \{a, b\}$ ならば $a \star c' = a \star' c'$ だから, 結局

$$\begin{aligned} t_{(a \star' b)} Q_1 &= \{(a \star' b) \star z_a\} \amalg \{(a \star' b) \star (a \star' b)\} \amalg \{(a \star' b) \star (a \star' c') \mid c' \in s_{(a)} Q_1 \setminus \{a, b\}\} \\ &= \{(a \star' b) \star z_a\} \amalg \{z_{a \star' b}\} \amalg \{(a \star' b) \star' (a \star' c') \mid c' \in s_{(a)} Q_1 \setminus \{a, b\}\}. \end{aligned}$$

同様に考えると

$$t_{(b \star' a)} Q_1 = \{(b \star' a) \star z_b\} \amalg \{z_{b \star' a}\} \amalg \{(b \star' a) \star' (b \star' c') \mid c' \in s_{(a)} Q_1 \setminus \{a, b\}\}$$

となるので, 条件 (C4) を考慮すると

$$t_{(a \star' b)} Q_1 = t_{(b \star' a)} Q_1 \Leftrightarrow \{(a \star' b) \star z_a\} \amalg \{z_{a \star' b}\} = \{(b \star' a) \star z_b\} \amalg \{z_{b \star' a}\}. \quad (5.2)$$

補題 5.13. $a, b \in Q_1$ ($s(a) = s(b), a \neq b$) $\Rightarrow (a \star' b) \star z_a = z_{b \star' a}$.

ここではこの補題の成立を認めて証明を続ける (補題の証明は後に行う).

$a \neq b, a = c$ の場合, 補題 5.13 より

$$(a \star b) \star (a \star c) = (a \star' b) \star (a \star a) = (a \star' b) \star z_a = z_{b \star' a} = (b \star' a) \star (b \star' a) = (b \star a) \star (b \star c).$$

$a \neq b, b = c$ の場合, 補題 5.13 より

$$(a \star b) \star (a \star c) = (a \star' b) \star (a \star' b) = z_{a \star' b} = (b \star' a) \star z_b = (b \star' a) \star (b \star b) = (b \star a) \star (b \star c).$$

よって、定理は証明できた。 □

補題 5.13 を証明するため、いくつか補題を用意する。

補題 5.14. $(v|a, w|a) \in R \ (a, v, w \in Q_1) \Rightarrow v = w = z^a$.

証明. $(v|a, w|a) \in R \ (a, v, w \in Q_1)$ となる $v \neq z^a$ が存在したと仮定する。すると、条件 (C3'-1) より、 $(v|a, w'|b) \in R$ または $(w'|b, v|a) \in R$ となる $b(\neq a), w' \in Q_1$ が存在する。 $(v|a, w|a) \in R$ だったから、条件 (C1) より $w|a = w'|b$ 。よって $a = b$ となるが、これは $b \neq a$ に反する。

したがって $(v|a, w|a) \in R \ (a, v, w \in Q_1)$ となる $v \neq z^a$ は存在しないから、 $(v|a, w|a) \in R \ (a, v, w \in Q_1) \Rightarrow v = z^a$ 。結局 $(z^a|a, w|a) = (v|a, w|a) \in R$ となるが、条件 (C3'-2) から $w = z^a$ となる。 □

条件 (C2') において、 $a, b \in Q_1 \ (t(a) = t(b), a \neq b)$ に対し存在する唯 1 つの $v, w (\in Q_1)$ を、 $v := a \bullet' b, w := b \bullet' a$ と書くことにする。よって、 $(a \bullet' b|a, b \bullet' a|b) \in R$ または $(b \bullet' a|b, a \bullet' b|a) \in R$ となる。

命題 5.1 の証明と同様にして次を得る。

補題 5.15. 写像 $a \bullet' _ : Q_{1 \ t(a)} \setminus \{a\} \rightarrow Q_{1 \ s(a)} \setminus \{z^a\}$ は全単射。

さらに、系 5.3 と同様に

補題 5.16. 写像 $a \bullet _ : Q_{1 \ t(a)} \rightarrow Q_{1 \ s(a)}$ は全単射。ただし、

$$a \bullet b := \begin{cases} a \bullet' b & (b \in Q_{1 \ t(a)} \setminus \{a\}) \\ z^a & (b = a) \end{cases}$$

と定める。

補題 5.17. $a \in Q_1 \Rightarrow (a \star a) \bullet (a \star a) = a$ 。

証明. $z_a \bullet' b = a$ となる $b \in Q_{1 \ t(z_a)} \setminus \{z_a\}$ が存在したと仮定する。すると、条件 (C2') より $(a|z_a, b \bullet' z_a|b) = (z_a \bullet' b|z_a, b \bullet' z_a|b) \in R$ または $(b \bullet' z_a|b, a|z_a) = (b \bullet' z_a|b, z_a \bullet' b|z_a) \in R$ となるので、条件 (C3-2) から $b \bullet' z_a|b = a|z_a$ となる。これより $b = z_a$ となるが、これは $b \in Q_{1 \ t(z_a)} \setminus \{z_a\}$ に反する。したがって、 $z_a \bullet' b = a$ となる $b \in Q_{1 \ t(z_a)} \setminus \{z_a\}$ は存在しない。

補題 5.16 より写像 $z_a \bullet _ : Q_{1 \ t(z_a)} \rightarrow Q_{1 \ s(z_a)}$ が全単射だから、 $z_a \bullet z_a = a$ となる。 $z_a = a \star a$ なので、 $(a \star a) \bullet (a \star a) = a$ 。 □

補題 5.18. $z_{a \star' b} = z_{b \star' a} \Rightarrow a \star' b = b \star' a$ 。

証明. 補題 5.17 より

$$a \star' b = ((a \star' b) \star (a \star' b)) \bullet ((a \star' b) \star (a \star' b)) = z_{a \star' b} \bullet z_{a \star' b}.$$

仮定より $z_{a \star' b} = z_{b \star' a}$ だから

$$z_{a \star' b} \bullet z_{a \star' b} = z_{b \star' a} \bullet z_{b \star' a} = ((b \star' a) \star (b \star' a)) \bullet ((b \star' a) \star (b \star' a)) = b \star' a.$$

したがって $a \star' b = b \star' a$ 。 □

補題 5.13 の証明. 背理法で証明する. そこで, $(a \star' b) \star z_a \neq z_{b \star' a}$ と仮定する. すると, 式 (5.2) より $z_{a \star' b} = z_{b \star' a}$. したがって, 補題 5.18 から $a \star' b = b \star' a$ となる. これより $(a|a \star' b, b|a \star' b) = (a|a \star' b, b|b \star' a) \in R$ もしくは $(b|a \star' b, a|a \star' b) = (b|b \star' a, a|a \star' b) \in R$ だから, 補題 5.14 より $a = b = z^{a \star' b}$ となるが, これは, $a \neq b$ という仮定に反する. $\square$

命題 5.19. 定義 5.8 の写像 $\sigma : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ は対合的.

証明. 定義 5.4, 5.6 より, $a|b \in Q_{(2)}$ に対し

$$\begin{aligned} (a \rightarrow b) \rightarrow (a \leftarrow b) &= (a \rightarrow b) \rightarrow ((a \rightarrow b) \star a) = ((a \rightarrow b) \star _)^{-1}((a \rightarrow b) \star _)(a) = a, \\ (a \rightarrow b) \leftarrow (a \leftarrow b) &= ((a \rightarrow b) \rightarrow (a \leftarrow b)) \star (a \leftarrow b) \\ &= a \star (a \rightarrow b) \\ &= a \star ((a \star _)^{-1}(b)) \\ &= b \end{aligned}$$

となる. 命題 2.9 から σ は対合的. $\square$

命題 5.20. 定義 5.8 の写像 $\sigma : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ は非退化.

証明のため補題をいくつか用意する.

補題 5.21. $a, b \in Q_1$ ($s(a) = s(b)$) $\Rightarrow (a \star b) \bullet (b \star a) = a$.

証明. 補題 5.17 より, $a = b$ のときこの補題は成立する.

以下, $a \neq b$ とする. すると, 定義 5.2 より $(a \star b) \bullet (b \star a) = (a \star' b) \bullet (b \star' a)$.

ここで $a \star' b = b \star' a$ と仮定する. すると, $(a|a \star' b, b|a \star' b) = (a|a \star' b, b|b \star' a) \in R$ もしくは $(b|a \star' b, a|a \star' b) = (b|b \star' a, b|a \star' b) \in R$ となるので, 補題 5.14 より $a = b = z^{a \star' b}$ となるが, これは $a \neq b$ に反する.

よって $a \star' b \neq b \star' a$ となり, 補題 5.16 内の定義から $(a \star b) \bullet (b \star a) = (a \star' b) \bullet' (b \star' a)$.

条件 (C2) より $(a|a \star' b, b|b \star' a) \in R$ もしくは $(b|b \star' a, a|a \star' b) \in R$ なので, 条件 (C2') と $(a \star' b) \bullet' (b \star' a)$ の定義から $(a \star' b) \bullet' (b \star' a) = a$, つまり $(a \star b) \bullet (b \star a) = a$. $\square$

補題 5.22. $(a|v, a|w) \in R$ ($a, v, w \in Q_1$) $\Rightarrow v = w = z_a$.

証明. $(a|v, a|w) \in R$ で $v \neq z_a$ と仮定する. すると, 条件 (C3-1) より $(a|v, b|w') \in R$ または $(b|w', a|v) \in R$ となる $b(\neq a), w' \in Q_1$ が存在する. すると条件 (C1) から $a|w = b|w'$. 結局 $a = b$ となって, $b \neq a$ に反する.

したがって, $(a|v, a|w) \in R \Rightarrow v = z_a$. これより $(a|z_a, a|w) \in R$ となって, 条件 (C3-2) から $w = z_a$ を得る. $\square$

補題 5.23. $b \in Q_1, v \in Q_1$ $t(b) \Rightarrow (b \bullet v) \star (v \bullet b) = b$.

証明. まず $b = v$ の場合を考える. ここで, $z^b \star' c = b$ となる $c \in {}_{s(z^b)}Q_1 \setminus \{z^b\}$ が存在したと仮定すると, $c \neq z^b$ と条件 (C2) より $(z^b|b, c|c \star' z^b) = (z^b|z^b \star' c, c|c \star' z^b) \in R$ または $(c|c \star' z^b, z^b|b) = (c|c \star' z^b, z^b|z^b \star' c) \in R$ となる. すると, 条件 (C3'-2) から $c = z^b$ となるが, これは $c \in {}_{s(z^b)}Q_1 \setminus \{z^b\}$ に反する. よって, $z^b \star' c = b$ となる $c \in {}_{s(z^b)}Q_1 \setminus \{z^b\}$ は存在しない. したがって, 定義 5.2 と系 5.3 より $z^b \star z^b = b$ となる.

補題 5.16 内の定義から $b \bullet b = z^b$ なので, $b = v$ であることを考慮すると, $(b \bullet v) \star (v \bullet b) = (b \bullet b) \star (b \bullet b) = b$.
 以下, $b \neq v$ とする. このとき, 補題 5.16 内の定義から $b \bullet v = b \bullet' v, v \bullet b = v \bullet' b$ となるので,
 $(b \bullet v) \star (v \bullet b) = (b \bullet' v) \star (v \bullet' b)$.

もし $b \bullet' v = v \bullet' b$ だったとすると, 条件 (C2') から $((b \bullet' v)|b, (b \bullet' v)|v) = ((b \bullet' v)|b, (v \bullet' b)|v) \in R$ または $((b \bullet' v)|v, (b \bullet' v)|b) = ((v \bullet' b)|v, (b \bullet' v)|b) \in R$. 補題 5.22 より $b = v$ となるが, これは $b \neq v$ に反する.

よって $b \bullet' v \neq v \bullet' b$ となり, 結局, $(b \bullet v) \star (v \bullet b) = (b \bullet' v) \star' (v \bullet' b)$. $b \neq v$ と条件 (C2') より $((b \bullet' v)|b, (v \bullet' b)|v) \in R$ または $((v \bullet' b)|v, (b \bullet' v)|b) \in R$ となるから, $b \bullet' v \neq v \bullet' b$ と条件 (C2) より $(b \bullet' v) \star' (v \bullet' b) = b$, つまり, $(b \bullet v) \star (v \bullet b) = b$. $\square$

命題 5.20 の証明. 定義 5.4 から $a \rightarrow b = (a \star _)^{-1}(b)$ なので, $a \in Q_1$ に対し $a \rightarrow _ : {}_{t(a)}Q_1 \rightarrow {}_{s(a)}Q_1$ は全単射である.

次に, $b \in Q_1$ に対し $_ \leftarrow b : Q_1 {}_{s(b)} \rightarrow Q_1 {}_{t(b)}$ が単射であることを示す. 定義 5.4, 5.6 より, $b \bullet (a \leftarrow b) = b \bullet ((a \rightarrow b) \star a) = (a \star (a \rightarrow b)) \bullet ((a \rightarrow b) \star a)$. 補題 5.21 から $(a \star (a \rightarrow b)) \bullet ((a \rightarrow b) \star a) = a$ となるので, $b \bullet (a \leftarrow b) = a$.

$a \leftarrow b = a' \leftarrow b$ とする ($a, a', b \in Q_1, t(a) = t(a') = s(b)$). すると $a = b \bullet (a \leftarrow b) = b \bullet (a' \leftarrow b) = a'$ となり, $_ \leftarrow b : Q_1 {}_{s(b)} \rightarrow Q_1 {}_{t(b)}$ は単射である.

最後に, $_ \leftarrow b : Q_1 {}_{s(b)} \rightarrow Q_1 {}_{t(b)}$ が全射であることを示す. $v \in Q_1 {}_{t(b)}$ とする. 定義 5.6 より $(b \bullet v) \leftarrow b = ((b \bullet v) \rightarrow b) \star (b \bullet v)$. 定義 5.4 と補題 5.23 から $(b \bullet v) \rightarrow b = v \bullet b$ となるので, 定義 5.6 と補題 5.23 より $(b \bullet v) \leftarrow b = (v \bullet b) \star (b \bullet v) = v$. したがって, $_ \leftarrow b : Q_1 {}_{s(b)} \rightarrow Q_1 {}_{t(b)}$ は全射である. $\square$

以上により, 性質 (2.1) を満たす非退化 (定義 2.7) かつ対合的 (定義 2.8) な簾 Q 上のヤン・バクスター方程式 (2.2) の解 $\sigma : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ が構成できた.

以下では, 解 σ を用いて道圏 $\mathbb{P}(Q, R)$ を表す.

命題 5.24. $R \subset \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\}$.

証明. $(f, g) \in R$ とする. 条件 (C1) より, $f = a|b, g = c|d$ となる $a, b, c, d \in Q_1$ ($t(a) = s(b), t(c) = s(d)$) が存在する.

$a \neq c$ のとき, 条件 (C2) より $b = a \star' c = a \star c, d = c \star' a = c \star a$ だから, $c = (a \star _)^{-1}(b) = a \rightarrow b$. よって, $d = c \star a = (a \rightarrow b) \star a = a \leftarrow b$. すると, $g = c|d = (a \rightarrow b)|(a \leftarrow b) = \sigma(a|b)$ となり, 結局, $(f, g) = (a|b, \sigma(a|b))$.

以下, $a = c$ とする. このとき, $b = z_a$ となる. 実際, $b \neq z_a$ ならば, 条件 (C3-1) より $(a|b, c'|d') \in R$ または $(c'|d', a|b) \in R$ となる $c', d' \in Q_1$ ($s(c') = s(a), c' \neq a$) が存在する. $(a|b, c|d) = (f, g) \in R$ だから, 条件 (C1) より $c|d = c'|d'$, つまり $c' = c$ となるが, $a = c$ より $c' = a$ が得られ, これは c' の条件 ($c' \neq a$) に矛盾する.

したがって $(a|z_a, a|d) = (a|b, c|d) = (f, g) \in R$ となり, 条件 (C3-2) より, $d = z_a$. 結局, $(f, g) = (a|z_a, a|z_a)$.

一方, $a \rightarrow z_a = a \rightarrow (a \star a) = (a \star _)^{-1}(a \star a) = a$, $a \leftarrow z_a = (a \rightarrow z_a) \star a = a \star a = z_a$ であるから, $\sigma(a|z_a) = a|z_a$, つまり, $(f, g) = (a|z_a, \sigma(a|z_a))$. $\square$

命題 5.25. $a|b \neq a|z_a \Rightarrow (a|b, \sigma(a|b)) \in R$ または $(\sigma(a|b), a|b) \in R$.

証明. $a|b \neq a|z_a$ とすると, $b \neq z_a$ である. このとき $a \neq a \rightarrow b$ となる ($a = a \rightarrow b$ ならば $b = a \star a = z_a$ となり $b \neq z_a$ に矛盾するから).

したがって, 条件 (C2) より $(a|a \star' (a \rightarrow b), (a \rightarrow b)|(a \rightarrow b) \star' a) \in R$ または $((a \rightarrow b)|(a \rightarrow b) \star' a, a|a \star' (a \rightarrow b)) \in R$. $a \star' (a \rightarrow b) = a \star (a \rightarrow b) = b$, $(a \rightarrow b) \star' a = (a \rightarrow b) \star a = a \leftarrow b$ と計算できるから, $a|b = a|a \star' (a \rightarrow b)$, $(a \rightarrow b)|(a \rightarrow b) \star' a = (a \rightarrow b)|(a \leftarrow b) = \sigma(a|b)$. 結局, $(a|b, \sigma(a|b)) \in R$ または $(\sigma(a|b), a|b) \in R$. $\square$

系 5.26. (1) $\langle R \rangle = \langle \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\} \rangle$.

(2) $\mathbb{P}(Q, R) = \mathbb{P}(Q, \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\})$.

証明. $\mathbb{P}(Q, R) = \mathbb{P}Q / \langle R \rangle$, $\mathbb{P}(Q, \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\}) = \mathbb{P}Q / \langle \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\} \rangle$ であるので, (1) のみを示せば十分である. 命題 5.24 より, $\langle R \rangle \subset \langle \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\} \rangle$. 一方, 命題 5.25 から $\{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}, a|b \neq a|z_a\} \subset \langle R \rangle$. さらに, 計算すると $\sigma(a|z_a) = (a \rightarrow z_a)|(a \leftarrow z_a) = (a \star _)^{-1}(a \star a)|(a \rightarrow z_a) \star a = a|a \star a = a|z_a$ となるので, $(a|z_a, \sigma(a|z_a)) = (a|z_a, a|z_a) \in \langle R \rangle$. 結局 $\{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\} \subset \langle R \rangle$ だから, $\langle \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\} \rangle \subset \langle R \rangle$. まとめると, $\langle R \rangle = \langle \{(a|b, \sigma(a|b)) \in \text{Par}(\mathbb{P}Q) \mid a|b \in Q_{(2)}\} \rangle$. $\square$

6 終わりに—構造圏・構造亜群—

籠 (クイバー) $Q = (Q_0, Q_1, s, t)$ 上の写像 $\tau : Q_{(2)} \rightarrow Q_{(2)}$ が, 第 4 章と同様に

- 性質 (2.1)
- ヤン・バクスター方程式 (2.2)
- 非退化 (定義 2.7)
- 対合的 (定義 2.8)

を満たしているとする. このとき, 関係 $R_\tau = \{(a|b, \tau(a|b)) \mid a|b \in Q_{(2)}\} (\subset \text{Par}(\mathbb{P}Q))$ の定める関係付き籠 (Q, R_τ) は, 第 4 章の条件 (C1), (C2), (C2'), (C3), (C3'), (C4) すべてを満たす.

定義 6.1. 道圏 $\mathcal{C}(\tau) := \mathbb{P}(Q, R_\tau)$ を τ の構造圏と呼ぶ.

命題 6.2. 構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ には, 非自明な可逆元が存在しない.

証明. 以下の証明は [4, Lemma II.1.42] に従う. $\bar{f} \in \mathcal{C}(\tau)$ ($f \in (\mathbb{P}Q)_1 (= Q_{(\geq 0)})$) を $\mathcal{C}(\tau)$ の可逆元とする (記号 $\bar{f}$ に関しては, 定義 3.4 参照). すると, $\bar{f}\bar{g} = \bar{\varepsilon}_x$ ($x := s(f)$) を満たす $\bar{g} \in \mathcal{C}(\tau)$ ($g \in (\mathbb{P}Q)_1$) が存在する. $\bar{f}\bar{g} = \bar{\varepsilon}_x$ より, $(f|g, \varepsilon_x) \in \langle R \rangle$. 命題 3.6 から $\langle R_\tau \rangle = R_\tau^\#$ なので, $a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{P}Q(x, x)$ と $f|g = a_0, \varepsilon_x = a_n, (a_0, a_1), \dots, (a_{n-1}, a_n) \in R_\tau^\#(x, x)^1$ を満たす $n = 1, 2, \dots$ が存在する. 式 (3.4) と $(a_{n-1}, \varepsilon_x) = (a_{n-1}, a_n) \in R_\tau^\#(x, x)^1$ より, $(a_{n-1}, \varepsilon_x) \in C_{R_\tau}(x, x)$ または $(a_{n-1}, \varepsilon_x) \in C_{R_\tau}^{-1}(x, x)$ または $(a_{n-1}, \varepsilon_x) \in \Delta_{\mathbb{P}Q}(x, x)$ となる.

$(a_{n-1}, \varepsilon_x) \in \Delta_{\mathbb{P}Q}(x, x)$ のとき, 式 (3.3) より $a_{n-1} = \varepsilon_x$.

$(a_{n-1}, \varepsilon_x) \in C_{R_\tau}(x, x)$ のとき, 式 (3.1) より $a_{n-1} = f'|a'|g', \varepsilon_x = f'|b'|g'$ となるような $f' \in \mathbb{P}Q(x, u), g' \in$

$\mathbb{P}Q(v, x), (a', b') \in R_\tau(u, v)$ が存在する. $\varepsilon_x = f'|b'|g'$ から $f' = b' = g' = \varepsilon_x$ となり, これを用いると $a_{n-1} = f'|a'|g' = a'$ となる. これから $(a_{n-1}, \varepsilon_x) = (a', b') \in R_\tau$ となるが, R_τ の定義より $\varepsilon_x = \tau(a_{n-1})$ となり, 矛盾する.

$(a_{n-1}, \varepsilon_x) \in C_{R_\tau}^{-1}(x, x)$ のとき, 式 (3.2) より $(\varepsilon_x, a_{n-1}) \in C_{R_\tau}(x, x)$ となるが, これは $(a_{n-1}, \varepsilon_x) \in C_{R_\tau}(x, x)$ のときの議論と同様にして矛盾する.

結局 $a_{n-1} = \varepsilon_x$ となるので, $(a_{n-2}, \varepsilon_x) = (a_{n-2}, a_{n-1}) \in R_\tau^\#(x, x)^1$. 上の議論より, $a_{n-2} = \varepsilon_x$ を得る. これを繰り返すと $f|g = a_0 = \varepsilon_x$ となる. これは $f = g = \varepsilon_x$ を意味するから, $\bar{f} = \bar{\varepsilon}_x$. つまり, 構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ の可逆元は (自明な) 恒等射のみである. $\square$

以下の定理も成り立つ [6, Theorem 6.4].

定理 6.3. (1) 構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ は左簡約的. すなわち, $\mathcal{C}(\tau)$ の射 x, y, y' が $xy = xy'$ を満たすならば $y = y'$.

(2) 構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ にはガーサイド族 E が存在する. ただし, 恒等射ではない $\mathcal{C}(\tau)$ の任意の射 f に対して

- $f = f_1 f_2 \cdots f_p$;
- $s \in E, g \in \mathcal{C}(\tau), s \leq g f_i f_{i+1} \Rightarrow s \leq g f_i \ (i = 1, 2, \dots, p-1)$

となる恒等射ではない $f_1, f_2, \dots, f_p \in E$ が存在するとき, $E(\subset \mathcal{C}(\tau))$ をガーサイド族であるという (この分解 $f = f_1 f_2 \cdots f_p$ を normal decomposition と呼ぶ [4, Definition III.1.17 の直後]). なお, $\mathcal{C}(\tau)$ の射 x, y に対し $xy' = y$ となる $\mathcal{C}(\tau)$ の射 y' が存在するとき, $x \leq y$ と定める.

上記定理の証明には, ガーサイド理論で重要な役割を果たす RC 則 (4.1) (より正確には条件 (C4)) が必須である. すでに紹介した RC 則とヤン・バクスター方程式の対応を通じて, ヤン・バクスター方程式が構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ に定理 6.3 のような良い性質をもたらしている.

注意 6.4. (1) 定理 6.3 (2) の normal decomposition には非自明な可逆元分の不定性がある [4, Proposition III.1.25] が, 命題 6.2 より, 構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ には非自明な可逆元が存在しないので, 構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ では normal decomposition が一意的に存在する.

(2) 構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ の射全体が $\mathcal{C}(\tau)$ のガーサイド族となることもあり, より「小さい」ガーサイド族の存在が重要である. [6, Section 6.2] では, Dehornoy による RC-calculus を活用した定理 6.3 (2) のガーサイド族 E の具体的な構成方法 [4, Section XIII.2.2] を紹介している. これを利用して, 性質 $x \in Q_0 \Rightarrow |{}_x Q_1| \leq n$ を満たす $n (= 1, 2, \dots)$ が始点 x に依存しないで存在する場合 (例えば, 矢が有限個しか存在しない簾) に, ガーサイド族 E が $E \subsetneq \mathcal{C}(\tau)$ となることを示している [6, Corollary 6.11].

構造圏を拡張して構造垂群と呼ばれる垂群 (groupoid) を考えることもできる. まず, $\overline{Q}_1 = \{a^{-1} \mid a \in Q_1\}$ (Q_1 のコピー) を用いて簾 $Q \amalg \overline{Q}$ を

$$\begin{aligned} & \bullet (Q \amalg \overline{Q})_0 = Q_0 \\ & \bullet (Q \amalg \overline{Q})_1 = Q_1 \amalg \overline{Q}_1 \\ & \bullet s(a) = \begin{cases} s_Q(a) & (a \in Q_1) \\ t_Q(b) & (a = b^{-1} \in \overline{Q}_1, b \in Q_1) \end{cases} \\ & \bullet t(a) = \begin{cases} t_Q(a) & (a \in Q_1) \\ s_Q(b) & (a = b^{-1} \in \overline{Q}_1, b \in Q_1) \end{cases} \end{aligned}$$

と定める．なお s_Q, t_Q は、それぞれ箭 Q の始点写像、終点写像である．

定義 6.5. $F = \{(a|a^{-1}, \varepsilon_{s(a)}), (a^{-1}|a, \varepsilon_{t(a)}) \in \text{Par}(\mathbb{P}(Q \amalg \overline{Q})) \mid a \in Q_1\}$ を用いて、道圏 $\mathcal{G}(\tau)$ を $\mathcal{G}(\tau) = \text{P}(Q \amalg \overline{Q}, R_\tau \cup F)$ と定める ($R_\tau \subset \text{Par}(\mathbb{P}Q) \subset \text{Par}(\mathbb{P}(Q \amalg \overline{Q}))$) に注意)．これを τ の構造亜群という．

構造圏 $\mathcal{C}(\tau)$ は構造亜群 $\mathcal{G}(\tau)$ に埋め込まれており、 $\mathcal{C}(\tau)\mathcal{C}(\tau)^{-1} \subset \mathcal{G}(\tau)$ の元は symmetric normal decomposition を持つ [6, Propositions 4.7, 6.5]．この意味で、構造亜群 $\mathcal{G}(\tau)$ もガーサイド的である．

命題 6.6. $\mathcal{C}(\tau)\mathcal{C}(\tau)^{-1}$ の元 f に対し

- $f = g_q^{-1}g_{q-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}f_1f_2 \cdots f_p$;
- $s \in E, g \in \mathcal{C}(\tau), s \preccurlyeq gf_i f_{i+1} \Rightarrow s \preccurlyeq gf_i \ (i = 1, 2, \dots, p-1)$;
- $s \in E, g \in \mathcal{C}(\tau), s \preccurlyeq gg_i g_{i+1} \Rightarrow s \preccurlyeq gg_i \ (i = 1, 2, \dots, q-1)$;
- $h' \preccurlyeq hg_1, h' \preccurlyeq hf_1 \ (h, h' \in \mathcal{C}(\tau)) \Rightarrow h' \preccurlyeq h$

となる定理 6.3 (2) のガーサイド族 E の元 $f_1, f_2, \dots, f_p, g_1, g_2, \dots, g_q \ (p, q = 1, 2, \dots)$ が存在する．この分解 $f = g_q^{-1}g_{q-1}^{-1} \cdots g_1^{-1}f_1f_2 \cdots f_p$ を symmetric normal decomposition という [4, Definition III.2.9]．

第 1 章の集合 E_n は、式 (1.1) が定めるヤン・バクスター方程式の解 σ の構造圏である $\mathbb{N}^n$ のガーサイド族となっており、 E_n は $\mathbb{N}^n$ の構造亜群 $\mathbb{Z}^n$ に symmetric normal decomposition をもたらしめている [4, Example III.2.10]．

謝辞

講演の機会をいただいたことに関し、本研究集会主催者の仲田研登先生に深く感謝いたします．なお、本研究は、京都大学に設置された国際共同利用・共同研究拠点である数理解析研究所の助成を受けたものです．

参考文献

- [1] 浅芝秀人: グラフ表現で可視化する圏論 (Category Theory Visualized by Quiver Representations). 共立出版, 2024.
- [2] Brieskorn, Egbert; Saito, Kyoji: Artin-Gruppen und Coxeter-Gruppen. Invent. Math. **17** (1972), 245–271.
- [3] Chouraqui, Fabienne: Garside groups and Yang-Baxter equation. Comm. Algebra **38** (2010), no. 12, 4441–4460.
- [4] Dehornoy, Patrick; Digne, François; Godelle, Eddy; Krammer, Daan; Michel, Jean: Foundations of Garside theory. EMS Tracts Math., 22 European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2015. xviii+691 pp.
- [5] Deligne, Pierre: Les immeubles des groupes de tresses généralisés. Invent. Math. **17** (1972), 273–302.
- [6] Ferri, Davide; Shibukawa, Youichi: Structure groupoids of quiver-theoretic Yang-Baxter maps. J. Algebra **690** (2026), 146–201.
- [7] Garside, F. A.: The braid group and other groups. Quart. J. Math. Oxford Ser. (2) **20** (1969), 235–254.