

Berele の行挿入と量子対称対

立教大学 理学部 渡邊 英也

Hideya Watanabe

College of Science, Rikkyo University

1 イントロダクション

本稿の主結果は、Berele の行挿入と、AII 型量子対称対の行挿入が一致するということである。正確な定義は後回しにして、まずは主結果を概説する。

Berele の行挿入は、King の斜交盤 [Kin76, §4] T と数字 x の組 (T, x) を、別の斜交盤 $T \xrightarrow{B} x$ に対応させるアルゴリズムである。斜交盤や斜交 Lie 代数 $\mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C})$ の有限次元既約表現の組合せ論的モデルであることが知られている。この観点において Berele の行挿入は、有限次元既約表現とベクトル表現のテンソル積の既約分解の組合せ論的モデルであると言える。ところが、斜交盤や Berele の行挿入が実際の表現と本当に対応していることを示す結果は無かった。

最近、筆者は AII 型量子対称対の表現論に、斜交盤が自然に現れることを発見した ([Wat25])。AII 型量子対称対とは、対称対 $(\mathfrak{sl}_{2n}(\mathbb{C}), \mathfrak{sp}_{2n}(\mathbb{C}))$ の量子化である。A 型量子群 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の有限次元既約表現の結晶基底として自然に半標準版が現れるように、AII 型量子対称対の有限次元既約表現の基底の極限として斜交盤が現れるのである (AII 型量子対称対にはまだ結晶基底の理論がないので、このような言い回しをしている)。このことから、斜交盤に対する行挿入は、AII 型量子対称対の有限次元既約表現とベクトル表現のテンソル積の既約分解と定義するのが妥当である。これが実は Berele の行挿入に一致するというのが、本稿の主結果である。結果として Berele の行挿入が、単に数勘定が合うというだけでなく、実際の表現と本当に対応していることが明らかになった。

謝辞

本研究集会の開催にご尽力くださりました世話人の仲田研登さんに、この場をお借りして感謝申し上げます。本研究は JSPS 科研費 JP24K16903 の助成を受けたものです。

2 Schensted の行挿入

分割とは、正整数の有限広義単調減少列である。分割 λ の Young 図形を $D(\lambda)$ で表す。

例 2.1. 分割 $\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)$ の Young 図形は

$$D(\lambda = (5, 4, 3, 3, 1)) = \begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline \square & \square & \square & \square & \square \\ \hline \square & \square & \square & \square & \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & \square & \square & & \\ \hline \square & & & & \\ \hline \end{array}.$$

分割全体の集合を Par で表し、長さ l 以下の分割全体の集合を $\text{Par}_{\leq l}$ で表す。

型 $\lambda \in \text{Par}$ の半標準盤とは、Young 図形 $D(\lambda)$ に正整数を書き込んだもので、以下を満たすものである：

1. 各行は、左から右に向かって広義単調増加
2. 各列は、上から下に向かって狭義単調増加

例えば

1	1	2	3	3
3	3	4	8	
6	6	8		
8	8	9		
9				

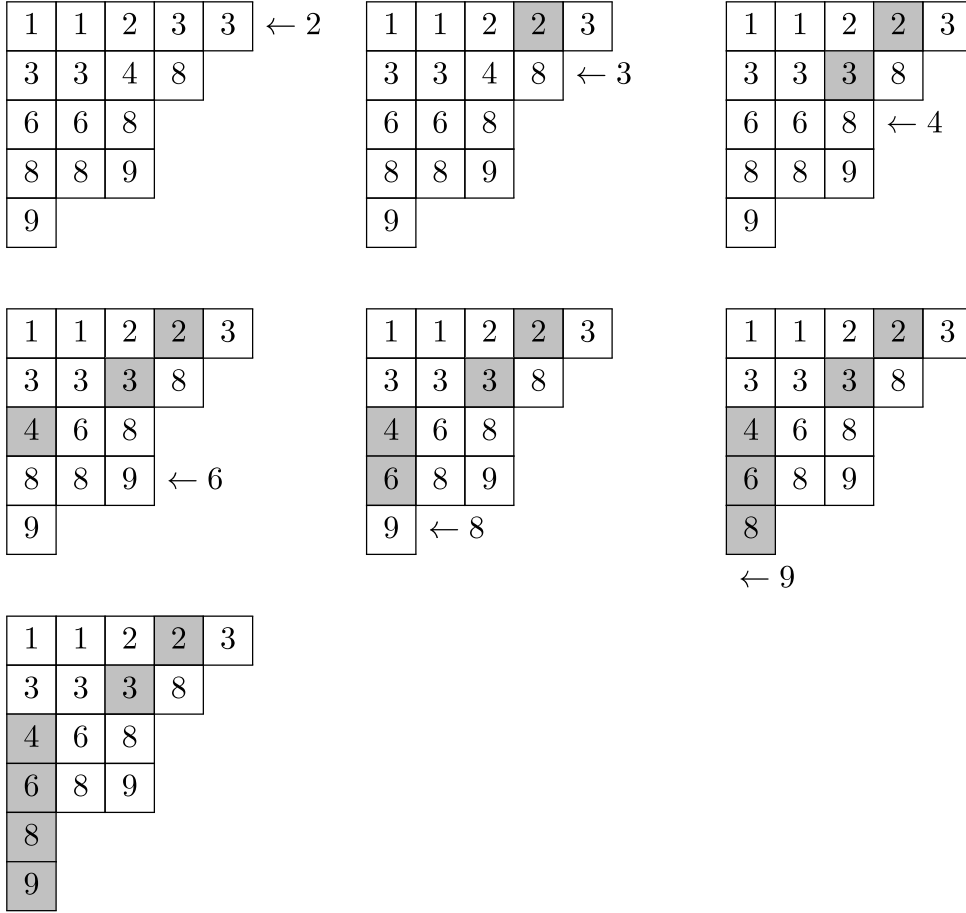
は、型 $(5, 4, 3, 3, 1)$ の半標準盤である。

型 λ 、成分が $[n] := \{1, \dots, n\}$ の半標準盤全体の集合を $\text{SST}_n(\lambda)$ で表す。

Schensted の行挿入とは、各 $(T, x) \in \text{SST}_n(\lambda) \times [n]$ を $T \leftarrow x \in \bigsqcup_{\mu \in \text{Par}} \text{SST}_n(\mu)$ に対応させるアルゴリズムである：

1. T の 1 行目を左から読み、初めて x より大きい成分 y を持つ箱の成分を x に置き換える。そのような箱がなければ、1 行目の右端に、 x を成分に持つ新しい箱を追加して終了する。
2. T の 2 行目と y について同じことをし、終了するまで繰り返す。

例 2.2.



定理 2.3 ([Ful97, §1.1]). *Schensted* の行挿入は、次の全単射を与える:

$$\text{SST}_n(\lambda) \times [n] \rightarrow \bigsqcup_{\substack{\mu \in \text{Par}_{\leq n} \\ \mu \succ \lambda}} \text{SST}_n(\mu); (T, x) \mapsto T \leftarrow x.$$

ここで、 $\mu \succ \lambda$ は、 μ が λ に箱を一つ追加して得られることを表している。

Schensted の行挿入は組合せ論的に定義されているが、 A 型量子群の表現論的解釈が知られている。 $\mathfrak{gl}_n$ を複素数体上の一般線形 Lie 代数、 $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ を Drinfeld–Jimbo の量子群とする。 $\lambda \in \text{Par}_{\leq n}$ を最高ウェイトに持つ $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ の既約最高ウェイト加群を $V^{U_q}(\lambda)$ で表し、その標準基底を $B(\lambda)$ で表す。 $B(\lambda)$ は $\text{SST}_n(\lambda)$ でパラメータ付けられる:

$$B(\lambda) = \{b_T \mid T \in \text{SST}_n(\lambda)\}.$$

定理 2.4 (cf. [Kwo09]). 次を満たす $U_q(\mathfrak{gl}_n)$ 加群同型写像

$$\psi : V^{U_q}(\lambda) \otimes V^{U_q}(1) \rightarrow \bigoplus_{\substack{\mu \in \text{Par}_{\leq n} \\ \mu \succ \lambda}} V^{U_q}(\mu)$$

が存在する:

$$\psi(b_T \otimes b_x) \equiv b_{T \leftarrow x} \pmod{q^{-1}} \quad \text{for all } T \in \text{SST}_n(\lambda).$$

3 Berele の行挿入

定義 3.1 ([Kin76, §4]). $T \in \text{SST}_{2n}(\nu)$ は、次を満たすとき**斜交盤**であるという:

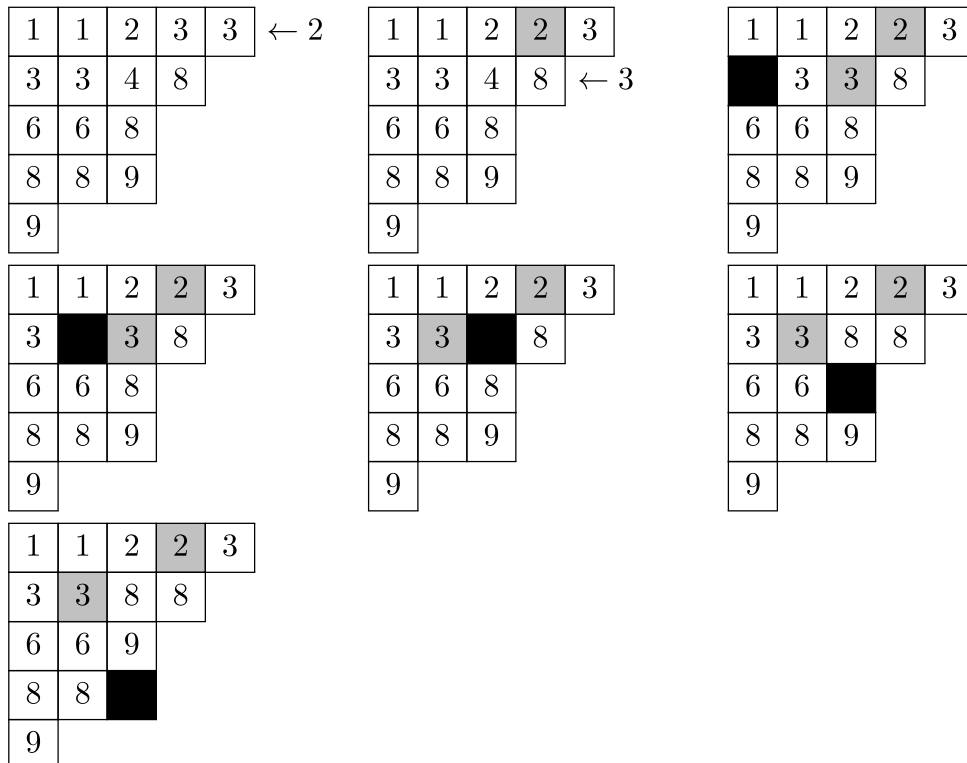
$$T(k, 1) \geq 2k - 1 \quad \text{for all } k = 1, 2, \dots$$

型 ν 、成分 $[2n]$ の斜交盤全体の集合を $SpT_{2n}(\nu)$ で表す。

Berele の行挿入とは、各 $(T, x) \in SpT_{2n}(\nu) \times [2n]$ を $T \xleftarrow{B} x \in \bigsqcup_{\mu \in \text{Par}} SpT_{2n}(\nu)$ に対応させるアルゴリズムである ([Ber86, §2]):

1. Schensted の行挿入をする。但し、 r 行目で $2r - 1$ が $2r$ を置き換える状況になったら $r + 1$ 行目には進まず、 r 行目の左端の箱を空にする。そのような状況にならない場合は $T \leftarrow x$ を返す。
2. 空箱ができたら jeu de taquin をする。つまり、空箱を右または下に動かしていく。各ステップで半標準盤の条件を保つようにする。
3. 空箱が動かせなくなったら、空箱を除去した半標準盤を返す。

例 3.2.



定理 3.3 (cf. [Ber86, Theorem 2]). *Berele* の行挿入は、次の全単射を与える:

$$SpT_{2n}(\nu) \times [2n] \rightarrow \bigsqcup_{\substack{\xi \in \text{Par}_{\leq n} \\ \xi > \nu \text{ or } \xi \leq \nu}} SpT_{2n}(\xi); (T, x) \mapsto T \xleftarrow{B} x.$$

$\mathfrak{sp}_{2n}$ を複素数体上の斜交 Lie 代数、 $U^i(\mathfrak{sp}_{2n})$ を AII_{2n-1} 型 i 量子群とする。 $(U_q(\mathfrak{gl}_{2n}), U^i(\mathfrak{sp}_{2n}))$ は量子対称対をなす: 普遍包絡代数の組 $(U(\mathfrak{gl}_{2n}), U(\mathfrak{sp}_{2n}))$ の量子化である。 $\nu \in \text{Par}_{\leq n}$ を最高ウェイトに持つ $U^i(\mathfrak{sp}_{2n})$ の既約最高ウェイト加群を $V^{U^i}(\nu)$ で表す。

定理 3.4 ([Wat25, Proposition 6.4.1]). $V^{U^i}(\nu)$ は、以下を満たす基底 $B^i(\nu)$ を持つ:

1. $B^i(\nu)$ は $SpT_{2n}(\nu)$ でパラメータ付けられる:

$$B^i(\nu) = \{b_T^i \mid T \in SpT_{2n}(\nu)\}.$$

2. $b_T^i \equiv b_T \pmod{q^{-1}}$ for all $T \in SpT_{2n}(\nu)$.

定理 3.5 ([Wat25, Theorem 7.2.1]). 各 $\lambda \in \text{Par}_{\leq 2n}$ に対し、次を満たす $U^i(\mathfrak{sp}_{2n})$ 加群同型写像

$$\psi : V^{U_q}(\lambda) \simeq \bigoplus_{\substack{\nu \in \text{Par}_{\leq n} \\ \nu \subseteq \lambda}} (V^{U^i}(\nu) \otimes \mathbb{Q}(q)\text{Rec}_{2n}(\lambda/\nu))$$

が存在する:

$$b_T \mapsto b_{P^{AII}(T)}^i \otimes Q^{AII}(T) \pmod{q^{-1}} \quad \text{for all } T \in SST_{2n}(\lambda).$$

ここで、 $P^{AII}(T)$ は斜交盤で、 $Q^{AII}(T)$ はある組合せ論的对象である。

Schensted の行挿入の表現論的解釈を逆に読めば、 $U^i(\mathfrak{sp}_{2n})$ の表現論に基づいて次のアルゴリズムを考えるのは自然である。

定義 3.6 ([Wat25b, Definition 5.4.1]). **AII 型行挿入**とは、対応

$$SpT_{2n}(\nu) \times [2n] \rightarrow \bigsqcup_{\xi \in \text{Par}_{\leq n}} SpT_{2n}(\xi); (T, x) \mapsto T \xleftarrow{AII} x := P^{AII}(T \leftarrow x)$$

である。

定理 3.7 ([Wat25b, Theorem 5.4.3]). AII 型行挿入は、*Berele* の行挿入に他ならない:

$$T \xleftarrow{AII} x = T \xleftarrow{B} x \quad \text{for all } (T, x) \in SpT_{2n}(\nu) \times [2n].$$

証明は、各組合せ論的对象の定義やアルゴリズムを詳細に解析して、AII 型行挿入と *Berele* の行挿入が同じことをしていることを確認すればよい。

参考文献

- [Ber86] A. Berele, A Schensted-type correspondence for the symplectic group, *J. Combin. Theory Ser. A* 43 (1986), no. 2, 320–328.
- [Ful97] W. Fulton, *Young Tableaux. With Applications to Representation Theory and Geometry*, London Math. Soc. Stud. Texts, 35, Cambridge University Press, Cambridge, 1997. x+260 pp.
- [Kin76] R. C. King, Weight multiplicities for the classical groups, *Group theoretical methods in physics (Fourth Internat. Colloq., Nijmegen, 1975)*, pp. 490–499, *Lecture Notes in Phys.*, Vol. 50, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.
- [Kwo09] J. Kwon, Crystal graphs and the combinatorics of Young tableaux, *Handbook of algebra*. Vol. 6, 473–504, *Handb. Algebr.*, 6, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2009.
- [Wat25] H. Watanabe, Symplectic tableaux and quantum symmetric pairs, *J. Comb. Algebra* (2025), published online first, DOI 10.4171/JCA/113.
- [Wat25b] H. Watanabe, Berele row-insertion and quantum symmetric pairs, arXiv:2509.00853, 32 pp.