

Refinements of Bounded Littlewood Identities*

名古屋大学多元数理科学研究科

岡田 聡一

Soichi Okada

Graduate School of Mathematics, Nagoya University

1 はじめに

Schur 関数は対称関数（無限変数の対称式）の中で最も基本的なものであり，Schur 関数などの関係式は，表現論，組合せ論をはじめとする多くの分野で重要な役割を果たしている．例えば，古典群の表現論において既約分解に現れる既約表現の重複度などに関する情報を引き出したり，数え上げ組合せ論において標準盤などの個数に関する公式を導いたりすることができる．本稿では，そのような Schur 関数を含む関係式の中で，Schur 関数の分割全体にわたる無限和を無限積として表す Schur–Littlewood の公式に着目し，分割の列数に制限を課した和に関する公式（制限付き Littlewood の公式）の精密化を与え，標準盤と揺動盤・振動盤に関する数え上げ組合せ論に応用する．

1.1 定義

まず，分割，Schur 関数などに関する定義，記号をまとめておく．（対称関数とその組合せ論との関係についての詳細は [17, Chapter 7] を参照されたい．）非負整数の広義単調減少列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ で $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ が有限となるものを分割 (partition) という．分割 λ に対して， $|\lambda| = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i$ を λ の大きさ (size)， $l(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \neq 0\}$ を λ の高さ (height) あるいは長さ (length) と呼び， λ_1 を λ の幅 (width) と呼ぶ．また， λ の Young 図形 $D(\lambda)$ を

$$D(\lambda) = \{(i, j) \in \mathbb{Z}^2 : 1 \leq i \leq l(\lambda), 1 \leq j \leq \lambda_i\}$$

とおいて定め，格子点の代わりに単位正方形をおいて図示する．分割 λ とその Young 図形 $D(\lambda)$ を同一視することもある．例えば，分割 $(4, 3, 1) = (4, 3, 1, 0, 0, \dots)$ の Young 図形は図 1 の左のようになる．分割全体のなす集合を Par と表す．

分割 λ の Young 図形の各正方形に正整数を 1 つずつ，次の 2 条件 (i), (ii) をみたすように書き込んだものを， λ を枠とする半標準盤 (semistandard tableau) という：

- (i) 各行の成分は左から右に広義単調増加である；
- (ii) 各列の成分は上から下に狭義単調増加である．

*本稿は，J. Huh, J. Kim, C. Krattenthaler との共同研究 [6] に基づくものである．

1	1	2	3
2	3	3	
4			

1	3	6	8
2	4	7	
5			

図 1: Young 図形, 半標準盤, 標準盤

半標準盤は $D(\lambda)$ から正整数全体のなす集合 $\mathbb{P}$ への写像ともみなすことができる．分割 λ を枠とする半標準盤全体のなす集合を $\text{SSTab}(\lambda)$ と表す．さらに， n の分割 λ を枠とする半標準盤のうちで $1, 2, \dots, n$ が 1 回ずつ現れるものを， λ を枠とする標準盤 (standard tableau) と呼び， λ を枠とする標準盤全体のなす集合を $\text{STab}(\lambda)$ と表す．例えば，図 1 の中央，右はそれぞれ，分割 $\lambda = (4, 3, 1)$ を枠とする半標準盤，標準盤である．半標準盤あるいは標準盤 T に対して，その枠 λ の大きさ，幅をそれぞれ T の大きさ，幅と呼ぶことにする．非負整数 n に対して大きさ n の標準盤全体のなす集合を STab_n と表し，非負整数 n, m に対して大きさが n で幅が m 以下であるような標準盤全体のなす集合を $\text{STab}_{n,m}$ と表す：

$$\text{STab}_n = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in \text{Par} \\ |\lambda|=n}} \text{STab}(\lambda), \quad \text{STab}_{n,m} = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in \text{Par} \\ |\lambda|=n, \lambda_1 \leq m}} \text{STab}(\lambda).$$

可算無限個の変数 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$ に関する（完備化された有理数係数の）対称関数環を $\hat{\Lambda}$ と表す．つまり， $\hat{\Lambda}$ は $\mathbf{x}$ に関する形式的べき級数で変数の置換に関して不変なものの全体のなす環である．分割 λ に対応する **Schur** 関数 (Schur function) $s_\lambda(\mathbf{x}) \in \hat{\Lambda}$ は， λ を枠とする半標準盤の母関数として

$$s_\lambda(\mathbf{x}) = \sum_{T \in \text{SSTab}(\lambda)} \mathbf{x}^T \quad (1)$$

(ここで, $\mathbf{x}^T = \prod_{(i,j) \in D(\lambda)} x_{T(i,j)}$) と定義される. また, 非負整数 k に対して, k 次基本対称関数 (elementary symmetric function) $e_k(\mathbf{x})$, k 次べき和対称関数 (power-sum symmetric function) $p_k(\mathbf{x})$ を

$$e_k(\mathbf{x}) = \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_k} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k} = s_{(1^k)}(\mathbf{x}), \quad p_k(\mathbf{x}) = \sum_{i \geq 1} x_i^k$$

と定めて定める.

1.2 Schur–Littlewood の公式とその制限版

分割全体にわたる Schur 関数の和について, $\hat{\Lambda}$ において次の Schur-Littlewood の公式が成り立つ.

定理 1.1. (Schur [16], Littlewood [11, p. 238])

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}} s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \prod_i \frac{1}{1-x_i} \prod_{i < j} \frac{1}{1-x_i x_j}. \quad (2)$$

ここで，和は分割 λ 全体をわたる.

この Schur–Littlewood の公式の左辺において和をとる範囲を $\lambda_1 \leq m$ をみたす分割 λ に制限したときは、次の制限付き Littlewood の公式 (bounded Littlewood identities) が知られている。

定理 1.2. ([18, Theorem 7.1]) 非負整数 m に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq m} s_\lambda(\mathbf{x}) \\ &= \begin{cases} \sum_{k=0}^{\infty} e_k(\mathbf{x}) \cdot \det \left(f_{i-j}(\mathbf{x}) - f_{i+j}(\mathbf{x}) \right)_{1 \leq i, j \leq w} & (m = 2w + 1 \text{ が奇数のとき}), \\ \det \left(f_{i-j}(\mathbf{x}) + f_{i+j-1}(\mathbf{x}) \right)_{1 \leq i, j \leq w} & (m = 2w \text{ が偶数のとき}). \end{cases} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $f_r(\mathbf{x}) \in \widehat{\Lambda}$ ($r \in \mathbb{Z}$) は基本対称関数 $e_k(\mathbf{x})$ を用いて

$$f_r(\mathbf{x}) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} e_k(\mathbf{x}) e_{k+r}(\mathbf{x}) \quad (4)$$

と定義される。

1.3 標準盤の数え上げ問題

定義 (1) から、Schur 関数 $s_\lambda(\mathbf{x})$ における $x_1 x_2 \cdots x_n$ ($n = |\lambda|$) の係数は λ を枠とする標準盤の個数に等しい。よって、Schur–Littlewood の公式 (2)、制限付き Littlewood の公式 (3) の両辺における $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数を比較することによって、標準盤の個数に関する関係式を導くことができる。

対称関数における $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数を取り出す 1 つの方法は、次で定義される環準同型写像 $\theta : \widehat{\Lambda} \rightarrow \mathbb{Q}[[t]]$ の利用である。

$$\theta(p_r) = \begin{cases} t & (r = 1 \text{ のとき}), \\ 0 & (r \geq 2 \text{ のとき}). \end{cases} \quad (5)$$

このとき、 $f \in \widehat{\Lambda}$ に対して、

$$\theta(f) = \sum_{n \geq 0} (f \text{ における } x_1 x_2 \cdots x_n \text{ の係数}) \frac{t^n}{n!}$$

となる (例えば [17, Proposition 7.8.4] を見よ)。この θ を Schur–Littlewood の公式 (2) の両辺に施すと、

$$\sum_{n \geq 0} \# \text{STab}_n \frac{t^n}{n!} = \exp \left(t + \frac{1}{2} t^2 \right) \quad (6)$$

が得られる (導出は例えば [17, Example 7.8.5] を見よ。) このことから、大きさ n の標準盤の個数について次の定理が得られる。

定理 1.3. 非負整数 n に対して、次の 3 つの集合の濃度は等しい :

- (a) 大きさ n の標準盤全体のなす集合 STab_n ;
- (b) 対称群 S_n に含まれる対合全体のなす集合 $\{\sigma \in S_n : \sigma^2 = 1\}$;
- (c) $\emptyset$ から $\emptyset$ に至る長さ n の揺動盤全体のなす集合 $\text{VT}_n(\emptyset, \emptyset)$ (揺動盤の定義は定義 3.1 を見よ) .

この定理は, (b), (c) の個数が (6) と同じ指数型母関数をもつことを示すことによって証明できる (例えば, (b) については [17, (5.32)] を, (c) については [17, Exercise 7.24] を参照されたい) が, Robinson–Schensted 対応とその対称性 ([17, Corollary 7.13.9] を見よ) を用いることで (a) と (b) の間の全単射を, Sundaram [19, Lemma 8.3] のアルゴリズムによって (b) と (c) の間の全単射を与えることもできる.

標準同型写像 θ を制限付き Littlewood の公式 (3) の両辺に施すと,

$$\sum_{n \geq 0} \# \text{STab}_{n,m} \frac{t^n}{n!} = \begin{cases} e^t \cdot \det \left(I_{i-j}(2t) - I_{i+j}(2t) \right)_{1 \leq i, j \leq w} & (m = 2w + 1 \text{ のとき}), \\ \det \left(I_{i-j}(2t) + I_{i+j-1}(2t) \right)_{1 \leq i, j \leq w} & (m = 2w \text{ のとき}). \end{cases} \quad (7)$$

ここで, $I_r(2t)$ は

$$I_r(2t) = I_{-r}(2t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k+r}}{k!(k+r)!} \quad (r \in \mathbb{Z}_{\geq 0})$$

によって定義される変形 Bessel 関数 (第 1 種双曲型 Bessel 関数とも呼ばれる) である. これを用いると, m が小さい場合に $\# \text{STab}_{n,m}$ の二項係数や Catalan 数を用いた具体的な表示式が得られる ([17, Exercise 7.16 (c)] を見よ).

定理 1.3 で標準盤の幅に制限をつけると, 次の定理が成り立つ.

定理 1.4. 非負整数 m に対して, 次の 2 つの集合の濃度は等しい :

- (a) 大きさ n であり幅が m 以下であるような標準盤全体のなす集合 $\text{STab}_{n,m}$;
- (b) 対称群 S_n に含まれる対合で, 最長の単調増加部分列の長さが m 以下であるものの全体なす集合.

さらに, $m = 2w + 1$ が奇数であるときは, 集合 (a), (b) は次の集合とも濃度が等しい :

- (c) $\emptyset$ から $\emptyset$ に至る長さ n の揺動盤 $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^n$ で, $l(\lambda^{(i)}) \leq w$ ($0 \leq i \leq n$) をみたすものの全体のなす集合.

また, $m = 2w$ が偶数であるときは, 集合 (a), (b) は次の集合とも濃度が等しい :

- (c') $\emptyset$ から $\emptyset$ に至る長さ n の揺動盤 $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^n$ で, $l(\lambda^{(i)}) \leq w$ ($0 \leq i \leq n$) をみたし, $\lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i)}$ ならば $l(\lambda^{(i)}) < w$ となるようなものの全体のなす集合.

この定理の (a), (b) が同じ濃度であることは, Robinson–Schensted 対応における Schensted の定理 (例えば [17, Corollary 7.23.11] を見よ) からわかる. また, (a), (c) が同じ濃度であることは, Zeilberger [21] が (3) と Grabiner–Magyar [5, (38)] の結果を組み合わせることで導いている. さらに, Chen–Deng–Du–Stanley–Yan [1, Theorem 3.2] は定理 1.3 の (b), (c) の間の全単射の制限が定理 1.4 の (b), (c) の間の全単射を与えることを示し, Eu–Fu–Hou–Hsu [2, Theorem 1.3] は (a) と (c) あるいは (c') の間の全単射を与えている.

1.4 本稿の目的と構成

本稿の目的は、制限付き Littlewood の公式（定理 1.2）の、Young 図形 $D(\lambda)$ における長さ奇数の行の個数 $r(\lambda)$ 、行の個数 $c(\lambda)$ に関する精密化を与えるとともに、標準盤の数え上げ組合せ論に応用することである。第 2 節では、

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq m} u^{r(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x}), \quad \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq m} u^{c(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x})$$

の形の和を行列式で表す公式を与えるとともに、その証明の概要を解説する。第 3 節では、この精密化された制限付き Littlewood の公式を用いて、幅と奇数行の個数、あるいは奇数列の個数に制限を課した標準盤の個数とある種の分割の列（揺動盤など）の個数が等しいことを導く。最後に、第 4 節では、精密化された制限付き Littlewood の公式とそこから導かれる組合せ論的等式と、表現論との関係を説明する。

2 制限付き Littlewood の公式の精密化

この節では、制限付き Littlewood の公式（定理 1.2）の精密化を与え、その証明の概要と表現論との関係を説明する。

2.1 制限付き Littlewood の公式の精密化

分割 λ に対して、Young 図形 $D(\lambda)$ における長さ奇数の行の個数を $r(\lambda)$ 、列の個数を $c(\lambda)$ とする：

$$r(\lambda) = \#\{i : \lambda_i \text{ は奇数}\}, \quad c(\lambda) = \#\{i : \iota\lambda_i \text{ は奇数}\}$$

ここで、 $\iota\lambda$ は λ の共役分割、つまり、 $D(\iota\lambda) = \{(j, i) : (i, j) \in D(\lambda)\}$ となる分割である。このとき、Schur–Littlewood の公式（定理 1.1）の精密化は、次で与えられる。

定理 2.1.（例えば [12, I, Ex. 5.7, 5.8] を参照）変数 u に対して

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}} u^{r(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \prod_i \frac{1 + ux_i}{1 - x_i^2} \prod_{i < j} \frac{1}{1 - x_i x_j}, \quad (8)$$

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}} u^{c(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x}) = \prod_i \frac{1}{1 - ux_i} \prod_{i < j} \frac{1}{1 - x_i x_j}. \quad (9)$$

この定理において $u = 1$ を代入すると、Schur–Littlewood の公式 (2) が復元される。

制限付き Littlewood の公式の奇数行の個数 $r(\lambda)$ に関する精密化は、Goulden によって得られている。

定理 2.2.（Goulden [4, Theorems 2.4, 2.6]）非負整数 m と変数 u に対して、

$$\sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq m} u^{r(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x})$$

$$= \begin{cases} \sum_{k \geq 0} e_k(\mathbf{x}) u^k \cdot \det \left(f_{i-j}(\mathbf{x}) - f_{i+j}(\mathbf{x}) \right)_{1 \leq i, j \leq w} & (m = 2w + 1 \text{ が奇数のとき}), \\ \det \left(\begin{cases} f_{i-j}(\mathbf{x}) - f_{i+j}(\mathbf{x}) & (1 \leq i \leq w-1) \\ \sum_{k \geq 0} (f_{i-j+k}(\mathbf{x}) - f_{i+j+k}(\mathbf{x})) u^k & (i = w) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w} & (m = 2w \text{ が偶数のとき}). \end{cases} \quad (10)$$

奇数列の個数 $c(\lambda)$ に関する精密化を与える次の定理が、本稿の主定理の 1 つである。

定理 2.3. (Huh–Kim–Krattenthaler–岡田 [6, Theorem 1.3])

(1) 正整数 w と変数 u に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq 2w} (u^{c(\lambda)} + u^{2w-c(\lambda)}) s_\lambda(\mathbf{x}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^w (u^k + u^{2w-k}) \det \left(\begin{cases} f_{i-j}(\mathbf{x}) + f_{i+j-2}(\mathbf{x}) & (i \leq w-k) \\ f_{i-j+1}(\mathbf{x}) + f_{i+j-1}(\mathbf{x}) & (i > w-k) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq 2w} (u^{c(\lambda)} - u^{2w-c(\lambda)}) s_\lambda(\mathbf{x}) \\ &= e(\mathbf{x}) \bar{e}(\mathbf{x}) \\ & \quad \times \sum_{k=0}^{w-1} (u^k - u^{2w-k}) \det \left(\begin{cases} f_{i-j}(\mathbf{x}) - f_{i+j}(\mathbf{x}) & (i < w-k) \\ f_{i-j+1}(\mathbf{x}) - f_{i+j+1}(\mathbf{x}) & (i \geq w-k) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w-1}. \end{aligned} \quad (12)$$

(2) 非負整数 w と変数 u に対して、

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq 2w+1} (u^{c(\lambda)} + u^{2w+1-c(\lambda)}) s_\lambda(\mathbf{x}) \\ &= e(\mathbf{x}) \cdot \sum_{k=0}^w (u^k + u^{2w+1-k}) \det \left(\begin{cases} f_{i-j}(\mathbf{x}) - f_{i+j-1}(\mathbf{x}) & (i \leq w-k) \\ f_{i-j+1}(\mathbf{x}) - f_{i+j}(\mathbf{x}) & (i > w-k) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w}, \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq 2w+1} (u^{c(\lambda)} - u^{2w+1-c(\lambda)}) s_\lambda(\mathbf{x}) \\ &= \bar{e}(\mathbf{x}) \cdot \sum_{k=0}^w (u^k - u^{2w+1-k}) \det \left(\begin{cases} f_{i-j}(\mathbf{x}) + f_{i+j-1}(\mathbf{x}) & (i \leq w-k) \\ f_{i-j+1}(\mathbf{x}) + f_{i+j}(\mathbf{x}) & (i > w-k) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w}. \end{aligned} \quad (14)$$

ここで、

$$e(\mathbf{x}) = \sum_{r \geq 0} e_r(\mathbf{x}), \quad \bar{e}(\mathbf{x}) = \sum_{r \geq 0} (-1)^r e_r(\mathbf{x})$$

である。

2.2 制限付き Littlewood の公式の精密化の証明

前小節の定理 2.1, 2.2, 2.3 はいずれも石川–若山の小行列式の和公式を用いて証明することができる．証明は基本的に次の 2 段階で実行できる：

(1) 行列を適切に定め，石川–若山の小行列式の和公式を用いることによって，Schur 関数の重み付き和を 1 つのパフィアンで表す；

(2) (1) で得られたパフィアンを積の形，あるいは行列式の形に変形する．

ここでは，主定理（定理 2.3）の 4 つの等式のうち (11) の証明を説明する．（他の証明も同様である．また，定理 2.1 の小行列式の和公式を用いた証明と一般化については [7, Section 4] を参照されたい．）行列 $M = (m_{i,j})_{i \in I, j \in J}$ と行添え字，列添え字の列 $R = (r_1, \dots, r_p)$ ， $S = (s_1, \dots, s_q)$ に対して，

$$M_S^R = (m_{r_i, s_j})_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q}$$

とおく．このとき，石川–若山の小行列式の和公式は次のように述べることができる．

命題 2.4. （石川–若山 [8, Theorem 1]） m を偶数とする．反対称行列 $A = (a_{r,s})_{r,s=1,2,\dots}$ と m 行からなる行列 $T = (t_{i,r})_{i=1,\dots,m, r=1,2,\dots}$ に対して，

$$\sum_K \text{Pf } A_K^K \cdot \det T_K^{(1,2,\dots,m)} = \text{Pf } (TA^tT).$$

ここで，和は長さ m の正整数の単調増加列 $K = (k_1, \dots, k_m)$ 全体にわたる．

この小行列式の和公式を応用するためには，行列 A, T をうまく定める必要がある．長さ m 以下の分割 μ に対して，

$$I_m(\mu) = (\mu_m + 1, \mu_{m-1} + 2, \dots, \mu_1 + m)$$

とおく．

補題 2.5. （Jacobi–Trudi の公式） $T = (e_{r-i}(\mathbf{x}))_{1 \leq i \leq m, r=1,2,\dots}$ とおくと，長さ m 以下の分割 μ に対して，

$$\det T_{I_m(\mu)}^{(1,2,\dots,m)} = s_{t_\mu}(\mathbf{x}).$$

補題 2.6. 数列 $(\alpha_r)_{r \in \mathbb{Z}}$ を

$$\alpha_r = -\alpha_{-r} = \begin{cases} 1 + u^2 & (r \text{ が奇数のとき}) \\ 2u & (r \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \quad (r > 0), \quad \alpha_0 = 0$$

で定め， α_{s-r} を (r, s) 成分とする反対称行列を $A = (\alpha_{s-r})_{r,s=1,2,\dots}$ とする．このとき，長さ $2m$ 以下の分割 μ に対して，

$$\text{Pf } A_{I_{2m}(\mu)}^{I_{2m}(\mu)} = 2^{m-1} (u^{r(\mu)} + u^{2m-r(\mu)}).$$

証明の概要. より一般に, 変数 $u_1, \dots, u_{2m}$ と符号の列 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2m}) \in \{1, -1\}^{2m}$ が与えられたとき,

$$m_{i,j} = \begin{cases} 1 + u_i u_j & (\varepsilon_i \varepsilon_j = (-1)^{i+j+1} \text{ のとき}), \\ u_i + u_j & (\varepsilon_i \varepsilon_j = (-1)^{i+j} \text{ のとき}) \end{cases}$$

を (i, j) 成分とする反対称行列 $M_{2m}^\varepsilon(u_1, \dots, u_{2m})$ に対して,

$$\text{Pf } M_{2m}^\varepsilon(u_1, \dots, u_{2m}) = 2^{m-1} \left(\prod_{i:\varepsilon_i=1} u_i + \prod_{i:\varepsilon_i=-1} u_i \right) \quad (15)$$

となることを, 両辺における $u^I = \prod_{i \in I} u_i$ の係数を比較することで証明する. すると, 補題の主張は, $u_1 = \dots = u_{2m} = u$, $\varepsilon_i = (-1)^{\mu_{2m+1-i}}$ と特殊化することで得られる. $\square$

定理 2.3 の等式 (11) の証明の第 1 段階として, 次のようにして左辺の Schur 関数の重み付き和を 1 つのパフィアンで表す. 石川-若山の小行列式の和公式 (命題 2.4) を補題 2.5 の行列 T と補題 2.6 の反対称行列 A に対して適用すると,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq 2w} (u^{c(\lambda)} + u^{2w-c(\lambda)}) s_\lambda(\mathbf{x}) &= \sum_{\mu \in \text{Par}, l(\mu) \leq 2w} (u^{r(\mu)} + u^{2w-r(\mu)}) s_{t\mu}(\mathbf{x}) \\ &= 2^{-(w-1)} \sum_{l(\mu) \leq 2w} \text{Pf } A_{I_{2w}(\mu)}^{I_{2w}(\mu)} \cdot \det T_{I_{2w}(\mu)}^{[2w]} \\ &= 2^{-(w-1)} \text{Pf } (TA^t T). \end{aligned}$$

ここで, $c_r = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \alpha_k f_{r-k}$ とおくとき, $TA^t T$ の (i, j) 成分は c_{j-i} で与えられる.

次に, 証明の第 2 段階として, このパフィアンを行列式に書き直す. そのために, 次の 2 つの補題を用いる.

補題 2.7. (Gordon [3, Lemma 1] を参照) $z_{-i} = -z_i$ をみたす変数列 $(z_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ に対して,

$$\text{Pf } (z_{j-i})_{1 \leq i, j \leq 2w} = \frac{1}{2} \det \left(\begin{cases} z_i - z_{i-2} & (j=1) \\ z_{i-j+1} - z_{i-j-1} + z_{i+j-1} - z_{i+j-3} & (2 \leq j \leq w) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w}.$$

補題 2.8. $(n+1)$ 個の長さ n の行ベクトル $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ とスカラー $\beta_1, \dots, \beta_n, \gamma_1, \dots, \gamma_n$ に対して,

$$\det \begin{pmatrix} \beta_1 \mathbf{v}_0 + \gamma_1 \mathbf{v}_1 \\ \beta_2 \mathbf{v}_1 + \gamma_2 \mathbf{v}_2 \\ \vdots \\ \beta_n \mathbf{v}_{n-1} + \gamma_n \mathbf{v}_n \end{pmatrix} = \sum_{k=0}^n \prod_{i=1}^k \beta_i \prod_{j=k+1}^n \gamma_j \cdot \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_0 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{k-1} \\ \mathbf{v}_{k+1} \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n \end{pmatrix}.$$

定理 2.3 の等式 (11) の証明の第 2 段階では, まず補題 2.7 を適用して $\text{Pf } (c_{j-i})_{1 \leq i, j \leq w}$ を行列式に直し, $c_r - c_{r-2} = 2(1 + u^2)f_{r-1} + 2u(f_{r-2} + f_r)$ に注意して行列式の基本変形を行うと,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq 2w} (u^{c(\lambda)} + u^{2w-c(\lambda)}) s_\lambda(\mathbf{x}) &= 2^{-(w-1)} \text{Pf}(c_{j-i})_{1 \leq i, j \leq 2w} \\ &= \det \left(\begin{cases} (1+u^2)(f_{1-j} + f_{j-1}) + 2u(f_{2-j} + f_j) & (i=1) \\ \frac{1+u^{2i}}{1+u^{2i-2}}(f_{i-j} + f_{i+j-2}) + u(f_{i-j+1} + f_{i+j-1}) & (i \geq 2) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w}. \end{aligned}$$

次に補題 2.8 をベクトル $\mathbf{v}_i = (f_{i-j+1} + f_{i+j-1})_{1 \leq j \leq w}$ ($1 \leq i \leq w$) とスカラー $\beta_1 = 1+u^2$, $\beta_i = (1+u^{2i})/(1+u^{2i-2})$ ($2 \leq i \leq w$), $\gamma_1 = 2u$, $\gamma_i = u$ ($2 \leq i \leq w$) に対して適用すると,

$$\begin{aligned} \sum_{\lambda \in \text{Par}, \lambda_1 \leq 2w} (u^{c(\lambda)} + u^{2w-c(\lambda)}) s_\lambda(x) \\ = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^w (u^k + u^{2w-k}) \det \left(\begin{cases} f_{i-j}(x) + f_{i+j-2}(x) & (i \leq w-k) \\ f_{i-j+1}(x) + f_{i+j-1}(x) & (i > w-k) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w} \end{aligned}$$

となり, (11) が得られる.

3 標準盤と揺動盤・振動盤

この節では, 前節で与えた制限付き Littlewood の公式の精密化を数え上げ組合せ論に応用する.

3.1 標準盤と揺動盤・振動盤

大きさが n , 幅が m 以下の標準盤で, 長さ奇数の行の個数が k , 長さ奇数の列の個数が k であるものの全体のなす集合をそれぞれ $\text{STab}_{n,m}\langle k \rangle$, $\text{STab}_{n,m}[k]$ と表す:

$$\text{STab}_{n,m}\langle k \rangle = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in \text{Par} \\ \lambda_1 \leq m, r(\lambda)=k}} \text{STab}(\lambda), \quad \text{STab}_{n,m}[k] = \bigsqcup_{\substack{\lambda \in \text{Par} \\ \lambda_1 \leq m, c(\lambda)=k}} \text{STab}(\lambda).$$

定理 2.2, 2.3 の等式の両辺における $x_1 \cdots x_n$ の係数を比較することによって, これらの標準盤の個数がある種の揺動盤・振動盤の個数と等しいことが導かれる.

定義 3.1. n を正整数とする.

- (1) 分割の列 $(\lambda^{(i)})_{i=0}^n$ で, 各 $1 \leq i \leq n$ に対して次の条件をみたすものを長さ n の揺動盤 (vacillating tableau) と呼ぶ:

$\lambda^{(i)} = \lambda^{(i-1)}$, または, $D(\lambda^{(i)})$ は $D(\lambda^{(i-1)})$ から正方形を 1 つ付け加えるか取り去るかして得られる.

分割 μ, ν に対して, $\lambda^{(0)} = \mu$, $\lambda^{(n)} = \nu$ となる長さ n の揺動盤全体のなす集合を $\text{VT}_n(\mu, \nu)$ と表し,

$$\text{VT}_n^w(\mu, \nu) = \left\{ (\lambda^{(i)})_{i=0}^n \in \text{VT}_n(\mu, \nu) : l(\lambda^{(i)}) \leq w \ (0 \leq i \leq n) \right\}$$

とおく.

(2) 分割の列 $(\lambda^{(i)})_{i=0}^n$ で、各 $1 \leq i \leq n$ に対して次の条件をみたすものを長さ n の振動盤 (oscillating tableau) と呼ぶ：

$D(\lambda^{(i)})$ は $D(\lambda^{(i-1)})$ から正方形を 1 つ付け加えるか取り去るかして得られる。

分割 μ, ν に対して、 $\lambda^{(0)} = \mu, \lambda^{(n)} = \nu$ となる長さ n の振動盤全体のなす集合を $\text{OT}_n(\mu, \nu)$ と表し、

$$\text{OT}_n^w(\mu, \nu) = \left\{ (\lambda^{(i)})_{i=0}^n \in \text{OT}_n(\mu, \nu) : l(\lambda^{(i)}) \leq w \ (0 \leq i \leq n) \right\}$$

とおく。

揺動盤と振動盤の違いは、 $\lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i)}$ を許すか許さないかである。

まず、定理 2.2 の制限付き Littlewood の公式の精密化からは、次の定理が導かれる。

定理 3.2. (Krattenthaler [10, Theorem 4, Section 4 (2)], Eu–Fu–Hou–Hsu [2, Corollary 5.5]) k を非負整数とする。 $m = 2w$ が偶数であるとき、次の 2 つの集合の濃度は等しい：

- (a) $\text{STab}_{n,2w}\langle k \rangle$ ；
- (b) $\text{OT}_n^w((k), \emptyset)$ 。

$m = 2w + 1$ が奇数であるとき、次の 2 つの集合の濃度は等しい。

- (a) $\text{STab}_{n,2w+1}\langle k \rangle$ ；
- (b') 揺動盤 $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^n \in \text{VT}_w^n(\emptyset, \emptyset)$ で、 $\lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i)}$ となる i がちょうど k 個であるようなものの全体のなす集合。

注意 3.3. Robinson–Schensted 対応によって対合 $\sigma \in S_n$ と標準盤 $T \in \text{STab}_n$ が対応しているとき、 σ の固定点の個数と T の長さ奇数の列の個数が等しい（例えば [17, Exercise 7.28 (a)] を見よ）ので、次の 2 つの集合の濃度は等しい：

- (a) $\text{STab}_{n,m}\langle k \rangle$ ；
- (b) 対称群 S_n に含まれる対合で、最長の単調増加部分列の長さが m 以下であり、ちょうど k 個の固定点をもつものの全体なす集合。

例 3.4. $n = 4, 2w = 2, k = 2$ のとき、

$$\text{STab}_{4,2}\langle 2 \rangle = \text{STab}((2, 1, 1)) = \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array} \right\}$$

であり、

$$\text{OT}_4^1((2), \emptyset) = \left\{ \begin{array}{l} (\square\square, \square\square\square, \square\square, \square, \emptyset) \\ (\square\square, \square, \square\square, \square, \emptyset) \\ (\square\square, \square, \emptyset, \square, \emptyset) \end{array} \right\}.$$

また、 $n = 4, 2w + 1 = 3, k = 2$ のとき、

$$\text{STab}_{4,3}\langle 2 \rangle = \text{STab}((2, 1, 1)) \sqcup \text{STab}((3, 1))$$

$$= \left\{ \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline 4 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 4 \\ \hline 3 & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & & \\ \hline \end{array} \right\}$$

であり, 定理 3.2 (b') の条件をみたす揺動盤は

$$\begin{aligned} &(\emptyset, \emptyset, \emptyset, \square, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \square, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \emptyset, \square, \square, \emptyset) \\ &(\emptyset, \square, \emptyset, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \square, \square, \emptyset, \emptyset), (\emptyset, \square, \square, \square, \emptyset) \end{aligned}$$

の 6 個である.

次に, 主定理 (定理 2.3) から導かれる組合せ論的結論を述べるために, 記号を導入する.

定義 3.5. 振動盤 $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^n \in \text{OT}_n^w(\mu, \nu)$ に対して,

$$S_w(T) = \left\{ j \in \{1, 2, \dots, n\} : l(\lambda^{(j-1)}) \leq w-1, l(\lambda^{(j)}) = w \right\}$$

とおく. このとき, 振動盤 $T \in \text{OT}_n^w(\mu, \nu)$ と $S_w(T)$ の部分集合 S の組 (T, S) を印付き振動盤 (marked vacillating tableau) と呼び,

$$\text{MOT}_n^w(\mu, \nu) = \{(T, S) : T \in \text{OT}_n^w(\mu, \nu), S \subset S_w(T)\}$$

とおく.

例えば, 長さ 8 の振動盤

$$T = \left(\emptyset, \square, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \square, \begin{array}{|c|c|} \hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline & & \\ \hline & & \\ \hline \end{array}, \square, \emptyset \right) \in \text{OT}_8^2(\emptyset, \emptyset)$$

に対して, $S_2(T) = \{2, 4\}$ である.

定理 2.3 の等式において両辺の $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数を比較することによって, 次の定理が得られる. $k \not\equiv n \pmod{2}$ のとき $\text{STab}_{n,m}[k] = \emptyset$ であることに注意しておく.

定理 3.6. (Huh–Kim–Krattenthaler–岡田 [6, Theorems 8.3 and 8.7])

- (1) $0 \leq k \leq 2w+1$, $k \equiv n \pmod{2}$ をみたす整数 k に対して, $0 \leq k \leq w$ のとき $t = k$, $w < k \leq 2w+1$ のとき $t = 2w+1-k$ とおくとき,

$$\begin{aligned} &\# \text{STab}_{n,2w+1}[k] \\ &= \# \left\{ (\lambda^{(i)})_{i=0}^n \in \text{VT}_n^w((1^t), \emptyset) : \lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i)} \text{ ならば } l(\lambda^{(i-1)}) = l(\lambda^{(i)}) = w \right\}. \end{aligned}$$

- (2) $0 \leq k \leq w-1$ のとき,

$$\begin{aligned} &\# \text{STab}_{n,2w}[k] \\ &= \# \left\{ (T, S) \in \text{MOT}_n^w((1^k), \emptyset) : S_w(T) = \emptyset \text{ または } \min S_w(T) \notin S \right\}, \\ &\# \text{STab}_{n,2w}[2w-k] \\ &= \# \left\{ (T, S) \in \text{MOT}_n^w((1^k), \emptyset) : S_w(T) \neq \emptyset \text{ かつ } \min S_w(T) \in S \right\}. \end{aligned}$$

$k = w$ のとき,

$$\# \text{STab}_{n,2w}[w] = \# \text{MOT}_n^w((1^w), \emptyset).$$

例 3.7. $n = 4, 2w + 1 = 3, k = 0$ のとき,

$$\text{STab}_{4,3}[0] = \text{STab}((1, 1, 1, 1)) \sqcup \text{STab}((2, 2)) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right\}$$

であり, 定理 3.6 (1) の条件をみたす振動盤 $(\lambda^{(i)})_{i=0}^4 \in \text{VT}_4^1(\emptyset, \emptyset)$ は

$$(\emptyset, \square, \emptyset, \square, \emptyset), \quad (\emptyset, \square, \square, \square, \emptyset), \quad (\emptyset, \square, \square\square, \square, \emptyset)$$

の 3 つである.

また, $n = 4, 2w = 2, k = 0$ のとき,

$$\text{STab}_{4,2}[0] = \text{STab}((1, 1, 1, 1)) \sqcup \text{STab}((2, 2)) = \left\{ \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline 2 \\ \hline 3 \\ \hline 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array} \right\}$$

である. 一方,

$$\text{OT}_4^1(\emptyset, \emptyset) = \{T_1 = (\emptyset, \square, \emptyset, \square, \emptyset), T_2 = (\emptyset, \square, \square\square, \square, \emptyset)\}$$

であり, $S_1(T_1) = \{1, 3\}, S_1(T_2) = \{1\}$ だから, 定理 3.6 (2) の条件をみたす印付き振動盤は

$$(T_1, \emptyset), \quad (T_1, \{3\}), \quad (T_2, \emptyset)$$

の 3 つである.

Krattenthaler [10] は, Fomin の growth diagram を用いた全単射を構成することによって, 定理 3.2 の (a) と (c), (c') の個数が等しいことを証明している. 一方, 定理 3.6 の証明は制限付き Littlewood の公式の精密化 (定理 2.3) を用いる線形代数的な証明しか知られていない. 次の問題は組合せ論的には自然である.

問題 3.8. 定理 3.6 に全単射による証明を与えよ.

3.2 証明のアイデア

定理 3.2, 3.6 は, より一般に定理 2.2, 2.3 の等式の両辺における $u^k x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n}$ の係数を非交差格子経路を用いて組合せ論的に表すことによって, 証明することができる. ここでは, 定理 3.2 の m が奇数の場合の証明を解説する. (他も同様である.)

定義 3.9. 格子経路のステップ集合を

$$S = \{((i, j), (i, j+1)), ((i, 2j-2), (i+1, 2j-1)), ((i, 2j-1), (i-1, 2j)) : i, j \in \mathbb{Z}\}$$

と定めて, $u, v \in \mathbb{Z}^2$ に対して, $\mathbb{Z}^2$ の点列 $(v_i)_{i=0}^l$ で $v_0 = u, (v_{i-1}, v_i) \in S$ ($1 \leq i \leq l$), $v_l = v$ をみたすものを u から v に至る格子経路 (lattice path) といい, その

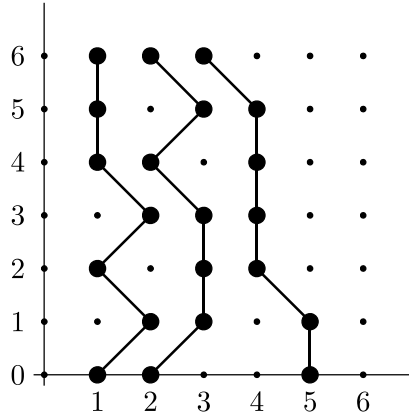


図 2: 格子経路

全体のなす集合を $L(u, v)$ と表す. そのうち領域 $x \geq 1$ にとどまり続ける格子経路全体のなす部分集合を $L_1(u, v)$ とする.

各ステップの重みを

$$\begin{aligned} \text{wt}((i, j), (i, j+1)) &= 1, \\ \text{wt}((i, 2j-2), (i+1, 2j-1)) &= x_j, \\ \text{wt}((i, 2j-1), (i-1, 2j)) &= x_j \end{aligned}$$

とおいて定め, 格子経路 $p = (v_i)_{i=0}^l$ の重み $\text{wt}(p)$ を

$$\text{wt}(p) = \prod_{i=1}^l \text{wt}(v_{i-1}, v_i)$$

と定義する.

例えば, 図 2 の一番右の格子経路

$$((5, 0), (5, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (3, 6))$$

は $(5, 0)$ から $(3, 6)$ に至る格子経路であり, その重みは $x_1 x_3$ である.

補題 3.10. 正整数 a, b に対して, $L_1((a, 0), (b, 2n))$ の母関数は

$$\sum_{p \in L_1((a, 0), (b, 2n))} \text{wt}(p) = f_{b-a}(x_1, \dots, x_n) - f_{a+b}(x_1, \dots, x_n)$$

で与えられる.

証明. 一般に, $a, b \in \mathbb{Z}$ に対して, $(a, 0)$ から $(b, 2n)$ に至る格子経路において右上に進むステップの個数と左上に進むステップの個数の差は $b - a$ だから,

$$\sum_{p \in L_1((a, 0), (b, 2n))} \text{wt}(p) = \sum_{r \in \mathbb{Z}} e_r(x_1, \dots, x_n) e_{b-a+r}(x_1, \dots, x_n) = f_{b-a}(x_1, \dots, x_n).$$

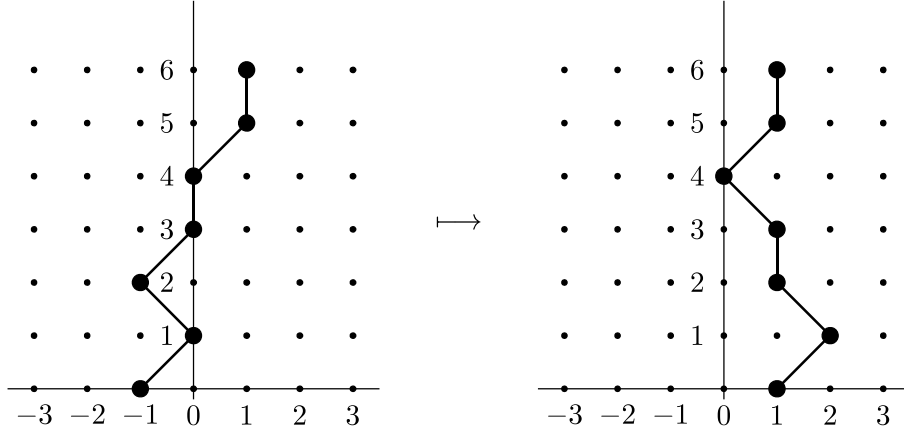


図 3: 補題 3.10 の全単射

よって, $a > 0, b > 0$ のとき, 重みを保つ全単射 $L((-a, 0), (b, 2n)) \rightarrow L((a, 0), (b, 2n)) \setminus L_1((a, 0), (b, 2n))$ が存在することが示されれば,

$$\begin{aligned} \sum_{p \in L_1((a, 0), (b, 2n))} \text{wt}(p) &= \sum_{p \in L((a, 0), (b, 2n))} \text{wt}(p) - \sum_{p \in L((-a, 0), (b, 2n))} \text{wt}(p) \\ &= f_{b-a}(x_1, \dots, x_n) - f_{b+a}(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

が導かれる.

$a > 0, b > 0$ のとき, $-a < 0 < b$ だから, $p = (v_i)_{i=0}^{2n} \in L((-a, 0), (b, 2n))$ は y 軸 $x = 0$ と交点をもち, p と y 軸との最後の交点を v_m とすると, m は偶数である. そこで, $v_0 = (-a, 0), v_1, \dots, v_m = (0, m)$ に現れるステップを 2 つずつ組にして,

$$\begin{aligned} (i, 2j-2) \rightarrow (i, 2j-1) \rightarrow (i, 2j) &\mapsto (-i, 2j-2) \rightarrow (-i, 2j-1) \rightarrow (-i, 2j) \\ (i, 2j-2) \rightarrow (i, 2j-1) \rightarrow (i-1, 2j) &\mapsto (-i, 2j-2) \rightarrow (-i+1, 2j-1) \rightarrow (-i+1, 2j) \\ (i, 2j-2) \rightarrow (i+1, 2j-1) \rightarrow (i+1, 2j) &\mapsto (-i, 2j-2) \rightarrow (-i, 2j-1) \rightarrow (-i-1, 2j) \\ (i, 2j-2) \rightarrow (i+1, 2j-1) \rightarrow (i, 2j) &\mapsto (-i, 2j-2) \rightarrow (-i+1, 2j-1) \rightarrow (-i, 2j) \end{aligned}$$

と置き換えると, $v'_0 = (a, 0)$ から $v'_m = (0, m) = v_m$ に至る格子経路 $(v'_0, v'_1, \dots, v'_m)$ が得られる. このとき, $p = (v_0, v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_l)$ に $p' = (v'_0, v'_1, \dots, v'_m, v_{m+1}, \dots, v_l)$ を対応させることによって, 重みを保つ全単射 $L((-a, 0), (b, 2n)) \rightarrow L((a, 0), (b, 2n)) \setminus L_1((a, 0), (b, 2n))$ が得られる (図 3 を見よ). $\square$

この補題と Lindström–Gessel–Viennot の補題を用いることにより, m が偶数のときに (10) の右辺が非交差経路の母関数として表されることがわかる.

定義 3.11. 格子経路の組 $P = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$ に対して, その重みを

$$\text{wt}(P) = \prod_{i=1}^m \text{wt}(p^{(i)})$$

と定義する．また， $p^{(1)}, \dots, p^{(m)}$ のどの 2 つも共有点をもたないとき， P は非交差格子経路 (nonintersecting lattice paths) であるという．正整数の単調増加列 $(a_1, \dots, a_m)$ ， $(b_1, \dots, b_m)$ に対して，非交差格子経路 $(p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$ で $p^{(i)} \in L_1((a_i, 0), (b_i, 2n))$ ($1 \leq i \leq m$) をみたすものの全体のなす集合を $\mathcal{L}_n^0((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m))$ とする．

例えば，図 2 の格子経路の組 P は $\mathcal{L}_3^0((5, 2, 1), (3, 2, 1))$ に属する非交差格子経路であり， $\text{wt}(P) = x_1^4 x_2^3 x_3^3$ である．

補題 3.10 と Lindström–Gessel–Viennot の補題（例えば [20, 第 3 章] を見よ）を用いると，次の命題が得られる．

命題 3.12. 正整数の単調増加列 $(a_1, \dots, a_m)$ ， $(b_1, \dots, b_m)$ に対して，

$$\sum_{P \in \mathcal{L}_n^0((a_1, \dots, a_m), (b_1, \dots, b_m))} \text{wt}(P) = \det \left(f_{b_i - a_j}(x_1, \dots, x_n) - f_{b_i + a_j}(x_1, \dots, x_n) \right)_{1 \leq i, j \leq m}.$$

次に，非交差経路を昇降盤に書き換える．

定義 3.13. 分割の列 $(\lambda^{(i)})_{i=0}^{2n}$ で，各 $1 \leq i \leq n$ に対して次の条件をみたすものを長さ $2n$ の昇降盤 (up-down tableau) と呼ぶ：

- (i) $D(\lambda^{(2i-2)}) \subset D(\lambda^{(2i-1)})$ であり，歪 Young 図形 $D(\lambda^{(2i-1)}) \setminus D(\lambda^{(2i-2)})$ は垂直帯である．
- (ii) $D(\lambda^{(2i-1)}) \supset D(\lambda^{(2i)})$ であり，歪 Young 図形 $D(\lambda^{(2i-1)}) \setminus D(\lambda^{(2i)})$ は垂直帯である．

ここで，歪 Young 図形 $D(\lambda) \setminus D(\mu)$ は，各行に高々 1 つしか正方形がないとき，垂直帯であるという．

昇降盤 $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^{2n}$ に対して，その重みを

$$\text{wt}(T) = \prod_{i=1}^n x_i^{-|\lambda^{(2i-2)}| + 2|\lambda^{(2i-1)}| - |\lambda^{(2i)}|}$$

とおいて定義する．分割 μ, ν に対して， $\lambda^{(0)} = \mu$ ， $\lambda^{(2n)} = \nu$ となる長さ $2n$ の昇降盤全体のなす集合を $\text{UD}_{2n}(\mu, \nu)$ と表し，

$$\text{UD}_{2n}^m(\mu, \nu) = \left\{ (\lambda^{(i)})_{i=0}^{2n} \in \text{UD}_{2n}(\mu, \nu) : l(\lambda^{(i)}) \leq m \ (0 \leq i \leq 2n) \right\}$$

とおく．

補題 3.14. 長さ m 以下の分割 μ, ν に対して， $\text{UD}_{2n}^m(\mu, \nu)$ と $\mathcal{L}_n^0(I_m(\mu), I_m(\nu))$ の間に重みを保つ全単射が存在する．

証明. 昇降盤 $(\lambda^{(k)})_{k=0}^{2n} \in \text{UD}_{2n}^m(\mu, \nu)$ に対して， $I_m(\lambda^{(k)}) = (\beta_1^{(k)}, \dots, \beta_m^{(k)})$ とおき， $p^{(i)} = (\beta_i^{(k)}, k)_{k=0}^{2n}$ で定まる格子経路の組 $P = (p^{(1)}, \dots, p^{(m)})$ を対応させればよい．例えば，図 2 の非交差格子経路と昇降盤 $((2), (2, 1), (1, 1), (1, 1, 1), (1), (1, 1), \emptyset)$ が対応する． $\square$

以上を組み合わせると，定理 2.2 から次の主張が得られる．

定理 3.15. (Huh–Kim–Krattenthaler–岡田 [6, Theorem 7.5]) 正整数

$$\sum_{\substack{\lambda \in \text{Par} \\ \lambda_1 \leq 2w, r(\lambda)=k}} s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \sum_{T \in \text{UD}_{2n}^w((k), \emptyset)} \text{wt}(T).$$

証明. 定理 2.2 から,

$$\sum_{\substack{\lambda \in \text{Par} \\ \lambda_1 \leq 2w, r(\lambda)=k}} s_\lambda(x_1, \dots, x_n) = \det \left(\begin{cases} f_{i-j}(\mathbf{x}) - f_{i+j}(\mathbf{x}) & (1 \leq i \leq w-1) \\ f_{i-j+k}(\mathbf{x}) - f_{i+j+k}(\mathbf{x}) & (i = w) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w}.$$

$f_{-r}(\mathbf{x}) = f_r(\mathbf{x})$ であることに注意すると, 命題 3.12 より

$$\det \left(\begin{cases} f_{i-j}(\mathbf{x}) - f_{i+j}(\mathbf{x}) & (1 \leq i \leq w-1) \\ f_{i-j+k}(\mathbf{x}) - f_{i+j+k}(\mathbf{x}) & (i = w) \end{cases} \right)_{1 \leq i, j \leq w} = \sum_{P \in \mathcal{L}_n^0(I_w((k)), I_w(\emptyset))} \text{wt}(P).$$

よって, 補題 3.14 を用いると, この右辺の非交差格子経路にわたる和を昇降盤にわたる和に書き直すことができる. $\square$

ここまで準備すると, 定理 3.2 の証明は容易である.

定理 3.2 の証明. $\# \text{STab}_{n, 2w} \langle k \rangle$ は定理 3.15 の等式の左辺における $x_1 x_2 \cdots x_n$ の係数に等しい. 一方, 昇降盤 $T = (\lambda^{(i)})_{i=0}^{2n}$ に対して,

$$-|\lambda^{(2i-2)}| + 2|\lambda^{(2i-1)}| - |\lambda^{(2i)}| = |\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i-2)}| + |\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i)}|$$

が成り立つから, $\text{wt}(T) = x_1 x_2 \cdots x_n$ となるのは, 次の (i), (ii) のいずれかが成り立つときに限られる.

(i) $|\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i-2)}| = 1, |\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i)}| = 0;$

(ii) $|\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i-2)}| = 0, |\lambda^{(2i-1)}/\lambda^{(2i)}| = 1.$

このような昇降盤 T は部分列 $(\lambda^{(2i)})_{i=0}^n$ で定まり, この部分列は振動盤である. $\square$

4 表現論との関係

最後に, 制限付き Littlewood の公式の精密化 (定理 2.2, 2.3) やそこから導かれる組合せ論的主張 (定理 3.2, 3.6) は, 古典群の表現論の視点からも解釈できることを説明する.

4.1 古典群の概長方形型既約指標の一般線型群への制限

実は, 定理 2.2 (の m が偶数の場合), 定理 2.3 で与えた関係式は, それぞれ斜交群 Sp_{2n} , 偶数次スピ群 Spin_{2n} の概長方形型の既約指標の一般線型群 GL_n への制限の既約分解を与える Krattenthaler [9] の公式と同値であることがわかる. Krattenthaler [9] は既約指標の盤を用いた組合せ論的表示からこれらの公式を導いているので, 第 2 節で与えた線型代数的証明は別証明を与えていることになる.

まず、対称関数に関する等式 $f(\mathbf{x}) = g(\mathbf{x})$ が成り立つための必要十分条件が、任意の正整数 n に対して有限変数 $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ の対称式に関する等式 $f(\mathbf{x}_n) = g(\mathbf{x}_n)$ が成り立つことであることに注意する。また、(4) で定義される $f_r \in \hat{\Lambda}$ を有限変数に制限すると、

$$f_r(\mathbf{x}_n) = x_1 \cdots x_n \cdot e_{n+r}(\mathbf{x}_n) = x_1 \cdots x_n \cdot e_{n-r}(\mathbf{x}_n)$$

となることにも注意する。

斜交群 $\mathbf{Sp}_{2n}$ の既約表現は長さ n 以下の分割でパラメトライズされ、分割 λ に対応する $\mathbf{Sp}_{2n}$ の既約指標 $\mathrm{sp}_\lambda(\mathbf{x}_n)$ は $\mathbf{x}_n = (x_1, \dots, x_n)$ に関する Laurent 多項式として

$$\mathrm{sp}_\lambda(\mathbf{x}_n) = \det \left(e_{t_{\lambda_i-i+j}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}) - e_{t_{\lambda_i-i-j}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}) \right)_{1 \leq i, j \leq \lambda_1}$$

で与えられる。ただし、 $e_r(\mathbf{x}_n^{\pm 1})$ は $x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1}$ に関する r 次基本対称多項式 $e_r(x_1, \dots, x_n, x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$ である。この既約指標の行列式表示と比較することにより、上の注意から、定理 2.2 (の m が偶数の場合) の等式は次の Krattenthaler の公式と同値であることがわかる。

定理 4.1. (Krattenthaler [9, Theorem 2 (3.6)]) $0 \leq k \leq n$ のとき、非負整数 c に対して、

$$\mathrm{sp}_{((c^{n-k}, (c-1)^k))}(\mathbf{x}_n) = (x_1 \cdots x_n)^{-c} \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{x}_n). \quad (16)$$

ここで、和は $D(\lambda) \subset D((2c)^n)$ をみたす分割 λ で $r(\lambda) = k$ となるもの全体にわたる。

次に、偶数次直交群 $\mathbf{SO}_{2n}$ の既約表現は、長さ n の整数列 $\lambda \in \mathbb{Z}^n$ で、

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_{n-1} \geq |\lambda_n| \quad (17)$$

をみたすものでパラメトライズされる。この条件 (17) をみたす λ に対して、

$$\lambda^\# = (\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -\lambda_n)$$

とおく。このとき、 λ に対応する $\mathbf{SO}_{2n}$ の既約指標 $\mathrm{so}_\lambda(x_1, \dots, x_n)$ は、 $x_1, \dots, x_n$ に関する Laurent 多項式として次の関係式で定義される。

命題 4.2. (例えば [14, 第 12 章] を参照) 長さ n 未満の分割 λ に対して、

$$\mathrm{so}_\lambda(\mathbf{x}_n) = \frac{1}{2} \det (e_{t_{\lambda_i-i+j}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}) + e_{t_{\lambda_i-i-j+2}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}))_{1 \leq i, j \leq \lambda_1}$$

であり、長さ n の分割 λ に対して、

$$\begin{aligned} \mathrm{so}_\lambda(\mathbf{x}_n) + \mathrm{so}_{\lambda^\#}(\mathbf{x}_n) &= \frac{1}{2} \det (e_{t_{\lambda_i-i+j}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}) + e_{t_{\lambda_i-i-j+2}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}))_{1 \leq i, j \leq \lambda_1}, \\ \mathrm{so}_\lambda(\mathbf{x}_n) - \mathrm{so}_{\lambda^\#}(\mathbf{x}_n) &= \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^{-1}) \cdot \det (e_{t_{\lambda_i-i+j}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}) - e_{t_{\lambda_i-i-j}}(\mathbf{x}_n^{\pm 1}))_{2 \leq i, j \leq \lambda_1}. \end{aligned}$$

このとき、定理 2.3 (1) の 2 つの等式は、特殊直交群から一般線型群への制限に関する次の Krattenthaler の公式と同値である。

定理 4.3. (Krattenthaler [9, Theorem 2 (3.7)]) c を非負整数とする. $0 \leq k \leq 2c$ をみたす整数 k に対して,

$$\text{so}_{(c^{n-1}, c-k)}(\mathbf{x}_n) = (x_1 \cdots x_n)^{-c} \sum_{\lambda} s_{\lambda}(\mathbf{x}_n).$$

ここで, λ は $D(\lambda) \subset D((2c)^n)$ をみたす分割で歪 Young 図形 $D((2c)^n) \setminus D(\lambda)$ がちょうど k 個の長さ奇数の列をもつものの全体をわたる.

この定理と定理 2.3 (2) の同値性は, 次のようにしてわかる.

$$e(\mathbf{x}_n) \bar{e}(\mathbf{x}_n) = (-1)^n x_1 \cdots x_n \cdot \prod_{i=1}^n (x_i - x_i^{-1})$$

に注意して, 命題 4.2 の Jacobi-Trudi 型等式と比較すると, 定理 2.3 (1) の 2 つの等式 (11), (12) を有限変数に特殊化したものは,

$$\begin{aligned} (x_1 \cdots x_n)^{-w} \sum_{\lambda_1 \leq 2w} (u^{c(\lambda)} + u^{2w-c(\lambda)}) s_{\lambda}(\mathbf{x}_n) &= \sum_{k=0}^{2w} (u^k + u^{2w-k}) \text{so}_{(w^{n-1}, w-k)}(\mathbf{x}_n), \\ (-1)^n (x_1 \cdots x_n)^{-w} \sum_{\lambda_1 \leq 2w} (u^{c(\lambda)} - u^{2w-c(\lambda)}) s_{\lambda}(\mathbf{x}_n) &= \sum_{k=0}^{2w} (u^k - u^{2w-k}) \text{so}_{(w^{n-1}, w-k)}(\mathbf{x}_n), \end{aligned}$$

つまり,

$$\sum_{k=0}^{2w} u^k \text{so}_{(w^{n-1}, w-k)}(\mathbf{x}_n) = (x_1 \cdots x_n)^{-w} \times \begin{cases} \sum_{\lambda_1 \leq 2w} u^{c(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x}_n) & (n \text{ が偶数のとき}), \\ \sum_{\lambda_1 \leq 2w} u^{2w-c(\lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x}_n) & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases} \quad (18)$$

と同値であることがわかる. 分割 $\lambda \subseteq ((2w)^n)$ に対して, 歪 Young 図形 $D((2c)^n) \setminus D(\lambda)$ における長さ奇数の列の個数は

$$c((2w)^n / \lambda) = \begin{cases} c(\lambda) & (n \text{ が偶数のとき}), \\ 2w - c(\lambda) & (n \text{ が奇数のとき}) \end{cases}$$

に等しいから, (18) は

$$\sum_{k=0}^{2w} u^k \text{so}_{(w^{n-1}, w-k)}(\mathbf{x}_n) = (x_1 \cdots x_n)^{-w} \sum_{\lambda \subseteq ((2w)^n)} u^{c((2w)^n / \lambda)} s_{\lambda}(\mathbf{x}_n)$$

と書き直すことができる. よって, 定理 2.3 (1) は定理 4.3 と同値である.

同様にして, 定理 2.3 (2) はスピン型表現に対する Krattenthaler の結果 [9, Theorem 2 (3.7)] (定理 4.3 で c が非負半整数の場合) と同値であることがわかる.

4.2 自然表現のテンソル積表現

定理 3.2, 3.6 に現れた標準盤の個数は, 古典群の自然表現のテンソル積の既約分解に現れる対称テンソル積表現, 交代テンソル積表現の重複度としても解釈できる. [15] では, 定理 3.2, 3.6 の主張 (の一部) を, 表現論を介在させることで証明している.

定理 4.4. (岡田 [15, Section 5])

- (1) $\mathbf{Sp}_{2w}$ の自然表現を $V = \mathbb{C}^{2w}$ とするとき, 非負整数 k に対して,

$$\mathrm{STab}_{n,2w}(k) = \# \mathrm{OT}_n^w((k), \emptyset) = \left[V^{\otimes n} : S^k(V) \right]_{\mathbf{Sp}_{2w}}.$$

- (2) $\mathbf{O}_{2w+1}$ の自然表現を $V = \mathbb{C}^{2w+1}$ とするとき, $0 \leq k \leq 2w+1$, $k \equiv n \pmod{2}$ をみたす整数 k に対して,

$$\begin{aligned} \mathrm{STab}_{n,2w+1}[k] \\ &= \# \left\{ (\lambda^{(i)})_{i=0}^n \in \mathrm{VT}_n^w((1^t), \emptyset) : \lambda^{(i-1)} = \lambda^{(i)} \text{ ならば } l(\lambda^{(i-1)}) = l(\lambda^{(i)}) = w \right\} \\ &= \left[V^{\otimes n} : \bigwedge^t(V) \right]_{\mathbf{O}_{2n+1}}. \end{aligned}$$

ここで, $0 \leq k \leq w$ のとき $t = k$, $w < k \leq 2w+1$ のとき $t = 2w+1-k$ である.

- (3) $\mathbf{O}_{2w}$ の自然表現を $V = \mathbb{C}^{2w}$ とするとき, $0 \leq k \leq w$ に対して

$$\#(\mathrm{STab}_{n,2w}[k] \cup \mathrm{STab}_{n,2w}[2w-k]) = \# \mathrm{MOT}_n^w((1^k), \emptyset) = \left[V^{\otimes n} : \bigwedge^k(V) \right]_{\mathbf{O}_{2n}}.$$

参考文献

- [1] W. Y. C. Chen, E. Y. P. Deng, R. R. X. Du, R. P. Stanley and C. H. Yan, Crossings and nestings of matchings and partitions, Trans. Amer. Math. Soc. **359** (2007), 1555–1575.
- [2] S.-P. Eu, T.-S. Fu, J. T. Hou, and T.-W. Hsu, Standard Young tableaux and colored Motzkin paths, J. Combin. Theory Ser. A **120** (2013), 1786–1803.
- [3] B. Gordon, Notes on plane partitions V, J. Combin. Theory Ser. B **11** (1971), 157–168.
- [4] I. P. Goulden, A linear operator for symmetric functions and tableaux in a strip with given trace, Discrete Math. **99** (1992), 69–77.
- [5] D. J. Grabiner and P. Magyar, Random walks in Weyl chambers and the decomposition of tensor powers, J. Algebraic Combin. **2** (1993), 239–260.
- [6] J. Huh, J. S. Kim, C. Krattenthaler, and S. Okada, Bounded Littlewood identities with fixed number of odd rows or odd columns, arXiv:2510.11054.
- [7] M. Ishikawa, S. Okada, and M. Wakayama, Applications of minor-summation formula I. Littlewood’s formulas, J. Algebra **183** (1996), 193–216.

- [8] M. Ishikawa and M. Wakayama, Minor summation formula for pfaffians, *Linear and Multilinear Algebra* **39** (1995), 285–305.
- [9] C. Krattenthaler, Identities for classical group characters of nearly rectangular shape, *J. Algebra* **209** (1998), 1–64.
- [10] C. Krattenthaler, Bijections between oscillating tableaux and (semi)standard tableaux via growth diagrams, *J. Combin. Theory Ser. A* **144** (2016), 277–291.
- [11] D. E. Littlewood, *The Theory of Group Characters*, Second edition, Oxford University Press, 1950.
- [12] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, Second edition, Oxford University Press, 1995.
- [13] S. Okada, Applications of minor summation formulas to rectangular-shaped representations of classical groups, *J. Algebra* **205** (1998), 337–367.
- [14] 岡田 聡一, 古典群の表現論と組合せ論 (下), 培風館, 2006.
- [15] S. Okada, Pieri rules for classical groups and equinumeration between generalized oscillating tableaux and semistandard tableaux, *Electron. J. Combin.* **23** (2016), Art. #P4.43, 27 pp.
- [16] I. Schur, Aufgabe 569, *Archiv der Mathematik und Physik* (3) **27** (1918), 163. *Gesammelte Abhandlungen Vol. III.* Alfred Brauer und Hans Rohrbach (eds.). Springer-Verlag, Berlin–New York, 1973, p. 456.
- [17] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics, Volume 2*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [18] J. R. Stembridge, Nonintersecting paths, pfaffians and plane partitions, *Adv. Math.* **83** (1990), 96–131.
- [19] S. Sundaram, *On the combinatorics of representations of $Sp(2n, \mathbb{C})$* , Ph.D. Thesis, Massachusetts Institute of Technology, 1986.
- [20] 高崎 金久, 線形代数と数え上げ [増補版], 日本評論社, 2021.
- [21] D. Zeilberger, The number of ways of walking in $x_1 \geq \cdots \geq x_k \geq 0$ for n days, starting and ending at the origin, where at each day you may either stay in place or move one unit in any direction, equals the number of n -cell standard Young tableaux with $\leq 2k+1$ rows, *The Personal Journal of Shalosh B. Ekhad and Doron Zeilberger*, 2007.