

「数論的 Teichmüller 理論入門」レポート問題 (2008 年度前期・講師：望月新一)

次の 4 問中、2 問解いて下さい。

1. G は有限生成な 自由副有限群 で、 $\phi: G \rightarrow G$ は、 G から G 自身への連続な準同型とする。このとき、 ϕ が 全射 なら 同型 になることを示せ。
2. G は (副有限群ではなく、連結なグラフの普通の基本群として生じるような) 自由群 で、 $H \subseteq G$ はその部分群とする。このとき、(グラフによる幾何的な解釈を使って) H も自由群になることを示せ。
3. 連結なグラフ Γ の連結な 部分グラフ $\Gamma' \subseteq \Gamma$ ($= \Gamma'$ の頂点集合と辺集合が共に Γ の頂点集合と辺集合の部分集合になっているようなもの) に対して、それぞれの基本群の間に 単射 な外準同型 ($=$ 内部自己同型との合成を除いてしか決まらない準同型)

$$\pi_1(\Gamma') \rightarrow \pi_1(\Gamma)$$

が定まることを示せ。

4. $PSL_2(\mathbb{R})$ の上半平面 H への作用が 推移的 で、 $i = \sqrt{-1} \in H$ を固定する部分群が アーベルな回転群 ($=$ 上半平面と単位円板の正則な同型で共役して見たとき) になることを示せ。