Anabelioid の幾何学と Teichmüller 理論

望月 新一 （京都大学数理解析研究所）

２００２年８月

§1. p 進双曲曲線を他宇宙から見る

我々が通常使用している、スキームなどのような集合論的な数学的対象は、実は、議論を開始した際に採用された「集合論」、つまり、ある Grothendieck 宇宙の選択に本質的に依存しているのである。この「１つの集合論」の採用は、もっと具体的にいうと、

「あるラベル（＝議論に登場する集合やその元の名前）のリストの選択」

と見ることもできる。すると、次のような問い掛けが生じる：

問： スキームのような集合論的幾何的対象を別の集合論的宇宙から見たら、つまり、たまたま採用したラベルたちを取り上げてみたら、その幾何的対象はどのように見えるか？

このように、宇宙を取り替えたりするような作業を行なう際、別の宇宙にも通じる数学的対象を扱うようにしないと、議論は意味を成さなくなるが、（本稿では省略するが）様々な理由によって、圏は、そのような性質を満たす。一般に、違う宇宙にも通じるものをinter-universalと呼ぶことにするが、「圏」というものは、最も基本的かつ原始的な inter-universal な数学的対象ということになる。

さて、スキームを他宇宙から見たらどんな風に見えるか、という問いに答えるためには、スキームを、inter-universal に表現する必要がある。これには様々な手法があるが、本稿では、次のものを取り上げる（別の手頃な例については、[Mzk7] を参照）：

$$\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X) \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{X\text{の有限次エタール被覆の圏 }\}$$

（ただし、X は、連結なネータ・スキームとする。） 副有限群 G に対して $\mathcal{B}(G)$ を、G の連続な作用をもつ有限集合の圏、というふうに定義すると、$\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X)$ という圏は、$\mathcal{B}(\pi_1(X))$ （ただし、$\pi_1(X)$ は、Xの代数的基本群とする）と同値になる。

ここでは、$\mathcal{B}(G)$ を、１つの幾何的対象とみなし、anabelioid と呼ぶことにする。実は、$\mathcal{B}(G)$ は、「連結な anabelioid 」になるが、一般には、複数の連結成分をもつ anabelioid を扱うこともある（詳しくは、[Mzk8] を参照）。anabelioid の理論の大きなテーマの一つは、通常スキームに対して行なうような様々な幾何的操作を、（$\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X)$ のようにスキームから生じたものかどうかとは関係なく）anabelioid のみの世界に

おいていわば ‘native’ に行なうことである。このテーマの最も基本的な例の一つは、有限次 エタール被覆の定義である。連結な anabelioid 間の有限次エタール被覆は、

$$\mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(G)$$

（ただし、G は副有限群、H はその開部分群。なお「射」は圏の間の関手と逆向きに書く。）と同型な射として定義される。

次に、anabelioid $\mathcal{X} = \mathcal{B}(G)$ に対して、「$\mathcal{X}$上エタールな anabelioid 全体の成す圏」

$$\mathfrak{Et}(\mathcal{X})$$

を扱いたいが、厳密にいうと、この $\mathfrak{Et}(\mathcal{X})$ は、1-category ではなく、2-category になってしまう。一般に、2-category $\mathcal{D}$ に対して、object として同じ object を持ち、morphism として、その 2-category の morphism の同型類を持つ、という 1-category $|\mathcal{D}|$ を構成することはできるが、元の $\mathcal{D}$の構造は、必ずしもこの $|\mathcal{D}|$ に忠実に反映されるとは限らない。ただし、$\mathcal{D}$に対して、その矢印はすべて ‘id’ 以外の自己同型を持たないという条件を課すと、$\mathcal{D}$ を $|\mathcal{D}|$ に潰しても本質的な情報は失われない。副有限群 G が slim、つまり、G の任意の開部分群 H の、G 内の中心化部分群が自明なとき、$\mathfrak{Et}(\mathcal{X})$ は、目出たくこの条件を満たし、それに付随する 1-category $\text{Ét}(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathfrak{Et}(\mathcal{X})|$ のみを使って議論することが可能となる。

§2. Quasi-core と IE 性

$\mathcal{X}$, $\mathcal{Q}$ は、slim で連結な anabelioid とし、

$$\mathcal{X} \to \mathcal{Q}$$

は、relatively slim （= ‘slim’ の relative 版。詳しくは [Mzk8] を参照。）な射とする。$\mathcal{X}$ に対して、2-category

$$\mathfrak{Loc}(\mathcal{X})$$

を次のように定義する: object は、有限次エタール被覆 $\mathcal{Y} \to \mathcal{X}$ から生じる anabelioid $\mathcal{Y}$ とし、morphism は、有限次エタール射 $\mathcal{Y}_1 \to \mathcal{Y}_2$ （ただし、この射は、$\mathcal{X}$ 上のものとは限らない !! ）とする。この 2-category は、$\mathfrak{Et}(\mathcal{X})$ と同じ条件を満たすので、1-category $\text{Loc}(\mathcal{X}) \stackrel{\text{def}}{=} |\mathfrak{Loc}(\mathcal{X})|$ を使っても本質的な情報が失われることはない。なお、以下の議論では、$\mathfrak{Loc}(\mathcal{X})$, $\text{Loc}(\mathcal{X})$ に対して、その object $\mathcal{Y}$ の有限次エタール商として生じる slim anabelioid を追加することによって得られる圏

$$\overline{\mathfrak{Loc}}(\mathcal{X}), \quad \overline{\text{Loc}}(\mathcal{X})$$

や、これらの圏の $\mathcal{Q}$ 上の relative 版（=圏に現れるすべての morphism に対して、更に、$\mathcal{Q}$ 上の射であるという条件を課すことによってできるもの）

$$\mathfrak{Loc}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{X}), \quad \mathrm{Loc}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{X}), \quad \overline{\mathfrak{Loc}}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{X}), \quad \overline{\mathrm{Loc}}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{X})$$

を用いることもある。

次に、幾つかの用語を導入する。<u>core</u> (respectively, <u>$\mathcal{Q}$-core</u>) とは、$\overline{\mathrm{Loc}}(\mathcal{X})$ (respectively, $\overline{\mathrm{Loc}}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{X})$) 内の terminal object のことである。$\mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ が <u>quasi-core</u> になるとは、自然な関手

$$\mathrm{Loc}_{\mathcal{Q}}(\mathcal{X}) \to \mathrm{Loc}(\mathcal{X})$$

が圏同値になるもののことである。また、$\mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ が <u>faithful</u> とは、その射に引き起こされる基本群の間の射 $\pi_1(\mathcal{X}) \to \pi_1(\mathcal{Q})$ が単射になるもののことである。

標語的にいうと、core の最も基本的な特徴は、

<u>core には、basepoint が、１つしかない</u>

ということである。basepoint というのは、anabelioid という圏を、副有限群という集合論的な対象を通して表現されるものに変換するための装置であるわけだから、そのような装置が、事実上１つしかないということは、その anabelioid が、相当強い inter-universality を保有しているということである。一方、<u>quasi-core</u> の特徴は、その基本群は、ある不定性を認めれば、inter-universal に構成可能となるという性質である（詳しくは、[Mzk8] を参照）。

与えられた anabelioid $\mathcal{X}$ に対してそれに付随する quasi-core $\mathcal{X} \to \mathcal{Q}$ が存在するかどうかの判定は、一般にはそれほど容易ではないが、次のような便利な「<u>判定法</u>」がある。副有限 G に対して、次の条件が満たされるとき、G を、<u>wk IE</u> （= weakly intrinsically exhaustive）と呼ぶ:任意の開部分群 $H \subseteq G$ と、開な埋め込み $\iota : H \hookrightarrow G$ に対して、$[G : H] = [G : \iota(H)]$ が成り立つ。また、G に対してこの条件をより強くしたもの＝ '<u>intrinsically exhaustive</u>'（略して、'IE'）を考えることもある。'IE' の定義は少し長くなるので、本稿では省略するが（詳しくは、[Mzk8] を参照）、その最も代表的（かつ必要な）部分だけ摘み出してみると、次のような条件になる： G の開正規部分群による exhaustive な filtration

$$\ldots \subseteq G_n \subseteq \ldots \subseteq G_1 \subseteq G$$

があり、任意の開部分群 $H \subseteq G_n$ と、開な埋め込み $\iota : H \hookrightarrow G$ に対して、$\iota(H) \subseteq G_n$ が成り立つ。なお、連結な anabelioid に対して、その基本群が、wk IE、または IE となるとき、anabelioid 自身も wk IE、または IE と呼ぶことにする。そこで、quasi-core の存在の「判定法」となる「含意関係」は次のようになっている：

$$^{\exists}\ \text{core} \Longrightarrow\ ^{\exists}\ \text{faithful quasi-core} \Longrightarrow \text{IE} \Longrightarrow \text{wk IE}$$

もっと直観的なレベルでいうと、IE な anabelioid とは、どのくらい（エタール）局所化されているかが、<u>内在的</u>（＝従って、inter-universal に）に判定可能な anabelioid のことである。

さて、wk IE や IE の、これまで発見されている中で<u>代表的な例</u>を挙げてみよう（詳しくは、[Mzk8] を参照）:

(i) $\mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p{}^{\times}$: 自分自身に同型な開部分群 $p \cdot \mathbb{Z}_p \rtimes \mathbb{Z}_p{}^{\times}$ をもつため、wk IE 不成立。

(ii) $PGL_2(\mathbb{Z}_p)$: wk IE 成立。一方、$\begin{pmatrix} p^n & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ で共役すると、「p^nを法として、1 に合同」という条件で定まる開部分群は保たれない故、IE 不成立。

(iii) 副有限自由群 $\widehat{F}_n$ $(n \geq 2)$: wk IE 成立。一方、(ii) と同様な議論により、IE 不成立。

(iv) 正標数のアフィン直線に付随する anabelioid $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(\mathbb{A}^1_{\mathbb{F}_p})$（玉川氏）: wk IE 不成立。

(v) $\mathbb{Q}_p$ の有限次拡大 K に付随する anabelioid $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(K)$（玉川・Jarden・Ritter）: wk IE 成立。一方、Jarden-Ritter の定理により、IE 不成立。

今、標数 0 の体 F 上の双曲曲線 X_F が与えられたとする。この曲線に対して、anabelioid のときと同様、$\mathrm{Loc}(X_F)$（= object は、X_F の有限次エタール被覆として生じるもの。morphism は、X_F上のものとは限らない（!!）有限次エタール射。）や $\overline{\mathrm{Loc}}(X_F)$ を定義することができる。すると、次のような結果が得られている（詳しくは、[Mzk8] を参照）:

定理 1: X_F は、geometric core（=$\overline{\mathrm{Loc}}(X_F)$ 内の terminal object）を持つとする。すると、$\mathcal{X} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X_F)$ は、次を満たす :

(a) （$[F : \mathbb{Q}] < \infty$ のとき） $\mathcal{X}$ は core を持つ。

(b) （$[F : \mathbb{Q}_p] < \infty$ のとき） $\mathcal{X}$ は quasi-core を持つ。なお、X_F がアフィンのとき、$\mathcal{X}$ は faithful な quasi-core を持つ。

ここで、(a) (respectively, (b)) は、数体上 (respectively, p 進体上) のグロタンディーク予想 — 詳しくは [Mzk5] を参照 — の、ほぼ形式的な帰結である。

定理 2: （記号は、定理 1 と同じ。） $\mathcal{X}$ は常に wk IE。なお、X_F がアフィンのとき、次の 3 つは同値 :

(i) X_F は geometric core を持つ。

(ii) $\mathcal{X}$ は faithful な quasi-core を持つ。

(iii) $\mathcal{X}$ は IE。

この結果も、[Mzk5] の主定理の、ほぼ形式的な帰結であるが、上の「代表的な例」の (v) で指摘したとおり、p 進体に付随する anabelioid は IE にはならないことを考えると、定理 2 の (iii) の必要性は、ある意味では驚くべきものである。

§3. p 進 Grothendieck 予想の絶対版

K を $\mathbb{Q}_p$の有限次拡大とし、X_Kを K 上の双曲曲線とする。構造射 $X_K \to \mathrm{Spec}(K)$ より定まる、代数的基本群の間の自然な射を

$$\Pi_{X_K} \to G_K$$

と書くとする。[Mzk5] の主定理は、G_K を固定したとき、その固定された G_K の上にある副有限群としての Π_{X_K} から代数曲線 X_K を復元できることを言っている。この結果を、ここでは「相対的 p 進 Grothendieck 予想」と呼ぶことにする。すると、次のような自然な問い掛けが生じる：

問：G_K を固定しない場合、副有限群 Π_{X_K} （$\Longleftrightarrow$ 圏 $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X_K)$）のみから、$X_K$ を復元できるか？

現時点では、この問い掛けに対して、（肯定的な）証明も（否定的な）反例も見つかっていないが、筆者は、どちらかというと、一般にはこのような「絶対版」は成り立たないのではないかという感覚を持っている。

一方、副有限群 Π_{X_K} — または 圏 $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X_K)$ — のみから復元できることが既に知られている、X_Kのデータの「代表的な例」は、以下の２つである：

(i) （X_Kが semi-stable reduction を持つとき）X_K のlogarithmic special fiber（＝自然な log structure 付きの semi-stable model の special fiber）。これは、[Tama] の主定理と、[Mzk4] の手法を組み合わせることによって帰結される定理である（詳しくは、[Mzk6] を参照）。

(ii) $\mathrm{Loc}(X_{\overline{K}})$ という圏も復元できる（詳しくは、[Mzk9] を参照）。これは、[Mzk5] の主定理より形式的に従う。特に、X_K が 'arithmetic' （＝志村曲線と共通な有限次エタール被覆を持つ）かどうかは、Π_{X_K}の群論的構造のみから判定可能であるということになる。

ところが、この２つの例には、１つのパターンが見られる。(ii) の場合、（曲線の「身元」を特定する上で）本格的に意味のある情報が得られる条件というのは、曲線の arith- meticity である。 一方、この arithmeticity というものは、別の言い方をすると、一種の canonicality であるが、p 進局所体と、等標数局所体

$$k((t))$$

の類似で考えると、canonical な曲線というのは、$k((t))$ 上の曲線の中でモジュライが 定数体 の k の上で定義されているものに対応している。従って、上の (i) と (ii) に共通している性質は、

「定数体上で定義されているデータは復元できる」

というものである。Π_{X_K} を、「絶対的に」（$= G_K$ を固定せずに）扱うことを、$k((t))$ 上の双曲曲線を絶対的に扱うこと（$= \mathrm{Spec}(k((t)))$ への構造射、特に、体 $k((t))$ の

変数 t を特定せずに扱うこと）の類似と考えると、定数数体上で定義された情報しか復元できないという状況はごく自然であるという見方もできる。

そうすると、p 進 Grothendieck 予想の絶対版が成り立つような例を沢山作るためには、「canonical な双曲曲線」を、大量かつ組織的に生産するような「装置」、即ち「理論」を見付けてくればよい、という結論になる。ところが、[Mzk1] や [Mzk2] で展開されている 'p 進 Teichmüller 理論' は、正にそのよい候補である。この理論は、Serre-Tate canonical lifting の双曲曲線版ともいえ、また、Teichmüller 空間の Bers 埋め込みの p 進版ともいえる（詳しくは、[Mzk2], Introduction を参照）。特に、この理論では、正に Serre-Tate canonical lifting に対応する双曲曲線の canonical lifting というものが登場するが、そのような（p 進 Teichmüller 理論の意味での）canonical lifting については、次のような結果（＝部分的な、「p 進 Grothendieck 予想の絶対版」）がある：

定理 3: $p \geq 5$ とし、$i = 1, 2$ に対して、 $\mathbb{Q}_p$ の有限次不分岐拡大 K_i と、K_i 上の双曲曲線 X_i が与えてあるとする。なお、$\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X_1)$, $\acute{\mathrm{E}}\mathrm{t}(X_2)$ が圏として同値であることを仮定すると、次の性質は成り立つ：

(i) X_1 は canonical lifting $\Longleftrightarrow$ X_2 は canonical lifting

(ii) どちらかが canonical lifting のとき、$X_1 \cong X_2$。

この定理の証明で使う主な「材料」は、[Mzk6] の（logarithmic special fiber に関する）主定理と、[Mzk1], Chapters III, IV, の理論である（詳しくは、[Mzk9] を参照）。

因みに、Jacobian が Serre-Tate canonical lifting となるような双曲曲線に対しても、定理 3 と同様なことが言えるが、そのようなものは非常に珍しいことが知られている（[DO], [OS] を参照）。一方、（p 進 Teichmüller 理論の意味での）canonical lifting の場合は、モジュライ・スタックの中で Zariski dense になることが簡単に示せるため、定理 3 より次のような系が従う：

系: 整数 g, r, p は、$2g-2+r > 0$, $p \geq 5$ を満たすとする。すると、(g, r) 型の双曲曲線のモジュライ・スタックの $\overline{\mathbb{Q}}_p$ 値有理点 $\mathcal{M}_{g,r}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ の中に、「p 進 Grothendieck 予想の絶対版」が成立するような曲線に付随する有理点からなる、（$\mathcal{M}_{g,r}$内で）Zariski dense な部分集合が存在する。

この系の特筆すべき性質として、系の文言の中に、[Mzk1] や [Mzk2] の用語（＝'canonical lifting' 等）は一切登場しないのである。つまり、この系は、[Mzk1] や [Mzk2] の理論の（初めての）真の応用になっているということである。

文献

[DO] B. Dwork and A. Ogus, Canonical liftings of Jacobians, *Compositio Math.* **58** (1986), pp. 111-131.

[Mzk1] S. Mochizuki, A Theory of Ordinary p-adic Curves, *Publ. of RIMS* **32** (1996), pp. 957-1151.

[Mzk2] S. Mochizuki, *Foundations of p-adic Teichmüller Theory*, AMS/IP Studies in Advanced Mathematics **11**, American Mathematical Society/International Press (1999).

[Mzk3] S. Mochizuki, Correspondences on Hyperbolic Curves, *Journ. Pure Appl. Algebra* **131** (1998), pp. 227-244.

[Mzk4] S. Mochizuki, The Profinite Grothendieck Conjecture for Closed Hyperbolic Curves over Number Fields, *J. Math. Sci., Univ. Tokyo* **3** (1996), pp. 571-627.

[Mzk5] S. Mochizuki, The Local Pro-p Anabelian Geometry of Curves, *Invent. Math.* **138** (1999), pp. 319-423.

[Mzk6] S. Mochizuki, *The Absolute Anabelian Geometry of Hyperbolic Curves*, RIMS Preprint **1363** (June 2002).

[Mzk7] S. Mochizuki, *Categorical Representation of Locally Noetherian Log Schemes*, RIMS Preprint **1364** (June 2002).

[Mzk8] S. Mochizuki, *The Geometry of Anabelioids*, 準備中。

[Mzk9] S. Mochizuki, *The Absolute Anabelian Geometry of Canonical Curves*, 準備中。

[OS] F. Oort and T. Sekiguchi, The canonical lifting of an ordinary Jacobian variety need not be a Jacobian variety, *J. Math. Soc. Japan* **38** (1986), pp. 427-437.

[Tama] A. Tamagawa, The Grothendieck Conjecture for Affine Curves, *Compositio Math.* **109** (1997), pp. 135-194.