

宇宙際タイヒミュラー理論の検証：進捗状況の報告（2013年12月現在）

京都大学数理解析研究所・教授 望月新一

2012年8月末に宇宙際タイヒミュラー理論（IU \mathcal{T} eich）に関する連続論文を発表してから1年4ヶ月程経過しておりますが、その間、理論の検証を巡って様々な動きがありましたのでご報告します。

(1) 2012年8月末にIU \mathcal{T} eich理論に関する連続論文（4篇）をプレプリントとして発表し、学術雑誌に投稿しました。投稿先の雑誌名も、その他、投稿に関する情報は公開しておりません。論文の公開の目的はあくまでも専門家による学問的検証であり、一般社会向けの発表ではありません。なお、非専門家による非学問的な内容の反応は最初から全く想定しておりませんし、そのような動きに対しては原則として対応しないことしております。

(2) IU \mathcal{T} eich理論の口頭発表は現在のところ、京都大学では

2010年10月（＝「予告篇」、1時間）と
2012年12月（1時間）

の2回、東京大学では

2013年6月（1時間半）

の1回、行なっております。講演のスライドは私のウェブサイト（＝「出張・講演」という頁）で公開しております。2014年も、少なくとも1回、日本国内の大学において講演を行なう方向で考えております。どの講演も内容は殆ど変わっておらず、その内容についてはサーベイ [Pano] においてより詳細に解説しております。このサーベイは私のウェブサイトの「論文」という頁で公開しており、また2012年12月の講演を行なった研究集会の報告集に収録される予定です。

(3) [山下剛氏](#)（豊田中央研究所客員研究員・京都大学数理解析研究所数理解析研究交流センター特任講師）は

2012年10月以降、月1回（＝2日間～約12時間）

私と二人で行なっているセミナーにおいて理論の検証を進めています。具体的には、

2012年10月～12月の間

2 宇宙際タイヒミュラー理論の検証：進捗状況の報告（2013年12月現在）

は「準備の論文」（＝[HASurI], [HASurII], [SemiAnbd], [FrdI], [FrdII], [EtTh], [AbsTopIII], [GenEll] 等）を勉強し、その内容についてセミナーで詳しく議論しました。その後、山下氏は

2013年1月～2013年3月、および
2013年4月～2013年9月

の2回にわたり、理論の「本体」である [IUTchI], [IUTchII], [IUTchIII], [IUTchIV] の4篇の論文を最後まで読み終えています。この約1年の間に、「準備の論文」と「本体」について、通常の学術雑誌の査読を遥かに超えるような詳細な技術的な指摘（＝1年余りで数百件程度！）を私は山下氏より書面（＝電子メール）でいただいております。その膨大な数の指摘については、セミナーで議論した後、該当する論文を修正し、私のウェブサイトの「論文」という頁で修正版を公開しております。また2013年4月頃、山下氏は研究集会等での交流を通じて他の研究者から寄せられた質問に対応するため、IU Teich 理論に関する「FAQ」を作成し、私のウェブサイトで公開しました。この2回にわたる論文の閲読により山下氏は理論を詳しく理解し、その正しさを一通り確認していますが、この論文の閲読は山下氏にとっては単なる「シングル・チェック」（本人の言葉）に過ぎません。

(4) 山下氏は、IU Teich 理論の「ダブル・チェック」（本人の言葉）として

2013年5月～2013年11月の間、月1回（＝2～3日間 ≈ 16～24時間）

次の三人

玉川安騎男氏（京都大学数理解析研究所・教授）

星裕一郎氏（京都大学数理解析研究所・講師）

松本眞氏（広島大学大学院理学研究科数学専攻・教授）

を対象に、IU Teich 理論を解説するセミナーを行ないました。私を参加者から外した形でセミナーが行なわれましたが、これは山下氏が理論を自分の言葉で説明し、自分の理解を確認する機会となるようにとられた措置です。セミナーは「準備の論文」の初歩的な部分から「本体」の最後まで、論文の「定義」や「命題」、「定理」等を一個ずつ順番に解説していくという、講師および参加者全員の大変な労力を必要とする形式で進められました。セミナー中およびその準備の過程で技術的な指摘や疑問等が発生したとき（＝平均的には月に10～30件程度）は、翌月の私とのセミナーで議論し、処理しました。（ダブル・チェックの）セミナーが終了した頃には参加者から、消化にはまだ時間が掛かりそうだが、理論の概略は一通り理解できた趣旨の発言が聞かれました。また、理論を一通り勉強し終えた立場から改めて検証したところ、(2) で言及した講演やサーベイの内容は「適切」であるとの評価を参加者からいただきました。

(5) 山下氏は成功裏に終了した(4)の「ダブル・チェック」だけでは飽き足りず、「トリプル・チェック」（本人の言葉）として、IU Teich 理論の詳細な解説を目的とする

サーベイの執筆を開始しています。このサーベイは200~300頁程の長さになる見通しであるとのこと。また、日程等はまだ確定していないものの、2014年4月以降、九州大学の田口雄一郎准教授の依頼で九州大学においてIUTeich理論を解説する（数週間程度の）集中講義を行なう方向で検討しているようです。

(6) **Mohamed Saïdi** 氏（エクセター大学（連合王国）・准教授）は

2013年7月~9月の3ヶ月間、

客員教授として京都大学数理解析研究所に滞在し、滞在期間中、

10回程（≈計24時間程度）

行なったセミナーにおいてIUTeich理論について私と二人で議論し、様々な観点から検証しました。また山下氏とも数回程セミナーを行ない、IUTeich理論について議論しました。Saïdi氏は滞在する前の半年余りの間、「準備の論文」と、それから「本体」の半分程度を読み終えたらしく、来日されてからは「本体」の残りの半分を読み終え、また念のための確認として、「本体」を改めて最初から最後まで読み直したそうです。この2回の閲読を行っていた間、Saïdi氏はほぼ週1回のセミナーで論文の内容について私と徹底的に議論をし、また通常の学術雑誌の査読を遥かに超えるような詳細な技術的な指摘（=3ヶ月程度で百件前後!）をして下さいました。山下氏のときと同様、私はいただいた指摘について、セミナーで議論した後、該当する論文を修正し、私のウェブサイトの「論文」という頁で修正版を公開しております。これらの活動を経てSaïdi氏は理論が正しいとの見解を私自身に対しても海外の第三者に対しても述べています。

(7) 山下氏とSaïdi氏は同じ数論幾何という専門分野の研究者とはいえ、過去の論文等の仕事を振り返ると明らかなように、数学的背景がだいぶ違う二人であることも事実です。しかしこの二人の一つの重要な共通点として、これまで多数の数論幾何の論文について学術雑誌の依頼で査読をし、掲載適当の可否を判断する経験を持っているという、査読者としての豊富な実績が挙げられます。一方、理論の重要性や手法の新奇性を考慮すると、慎重な姿勢が求められる状況であり、この二人によるこれまでのIUTeich理論の検証をもって理論の検証が事実上完了したと考えるべきかどうか、大いに議論の余地があり、「最終的な結論」を出すことは今回の報告の範囲を超えていると言わざるを得ません。しかし二人の査読者としての実績を踏まえて考えると、(3), (4), (6)で報告したこれまでの検証活動は既にその「綿密さ」および「解像度」において一般的な数学論文の査読の範囲を大幅に超えており、その活動を通して二人からいただいているIUTeich理論に対する極めて肯定的な評価には一定の重みがあると考えております。

(8) 山下氏とSaïdi氏によるIUTeich理論の検証活動のもう一つの重要な「収穫」は、数学的背景が大きく異なる二人であるにも関わらず、

理論は半年弱程度の努力によって一通り理解することが可能

4 宇宙際タイヒミュラー理論の検証：進捗状況の報告（2013年12月現在）

であることを、二人が自らの経験をもって極めて明示的な形で立証したことです。理論の勉強が思うように進まない研究者も存在するようなので、そのような立場の研究者に対する「アドバイス」がないか、私は二人に対して再三にわたり質問し、議論したところ、唯一引き出すことに成功した「アドバイス」は、

「準備の論文」から順番に丁寧に勉強すれば、乗り越えられない障害が出てくるはずがない

という趣旨の発言でした。ただ、理論を勉強する上での重要な注意点として、

- ・ IUTeich 理論の様々な限定的な側面については複素数体、あるいは p 進体上のタイヒミュラー理論や、古典的なテータ関数の関数等式等、既存の理論との部分的な類似性は認められるものの、IUTeich 理論の「本筋」に関して既存の理論と本質的に類似したパターンの議論の展開を期待して勉強しようとするすると挫折する可能性が高い

ことに留意する必要があります。これについては二人とも同意見でした。後、次の二点については私は何年も前から頻繁に強調しています：

- ・ 多くの方は ABC 予想の不等式の数値的な側面を主な関心の対象としているようですが、「本命」として認識されるべきものは「IUTeich 理論」という理論の方であり、理論と比較すると、不等式は理論が如何に深いところまで掘り下げているものであるかを示す単なる「一つの指標」に過ぎません。
- ・ 一時間講演どころか、一週間程度の解説でも、理論の大まかな仕組みを本格的に納得できるような形で理解することは多くの研究者の場合、困難であり、そのような短期間の広報活動に果たして意味があるかどうか、これまでの経験を振り返ると、大いに疑問があるように感じます。一方、個人差があるとはいえ、通常の数論幾何に詳しい研究者の場合、IUTeich 理論を一通り理解するのに（上でも指摘した通り）「年単位」の時間を費やす必要はなく、「月単位」の時間＝半年程度の時間さえあれば、十分なはず

Saïdi 氏との交流の中で私にとって特に印象的だったのは、私からの指摘を待つまでもなく、自分自身の「独立な観察」としてこの二点と同様な方向性の発言をして下さったことです。

(9) 最後に、IUTeich 理論の検証活動に並々ならぬ努力と熱意を傾注された山下氏と Saïdi 氏、並びに (4) の参加者たちに対し、この場を借りて心より厚くお礼を申し上げます。

文献リスト

- [HASurI] S. Mochizuki, A Survey of the Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves I, *Arithmetic Fundamental Groups and Noncommutative Algebra, Proceedings of Symposia in Pure Mathematics* **70**, American Mathematical Society (2002), pp. 533-569.
- [HASurII] S. Mochizuki, A Survey of the Hodge-Arakelov Theory of Elliptic Curves II, *Algebraic Geometry 2000, Azumino, Adv. Stud. Pure Math.* **36**, Math. Soc. Japan (2002), pp. 81-114.
- [SemiAnbd] S. Mochizuki, Semi-graphs of Anabelioids, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **42** (2006), pp. 221-322.
- [FrdI] S. Mochizuki, The Geometry of Frobenioids I: The General Theory, *Kyushu J. Math.* **62** (2008), pp. 293-400.
- [FrdII] S. Mochizuki, The Geometry of Frobenioids II: Poly-Frobenioids, *Kyushu J. Math.* **62** (2008), pp. 401-460.
- [EtTh] S. Mochizuki, The Étale Theta Function and its Frobenioid-theoretic Manifestations, *Publ. Res. Inst. Math. Sci.* **45** (2009), pp. 227-349.
- [AbsTopIII] S. Mochizuki, *Topics in Absolute Anabelian Geometry III: Global Reconstruction Algorithms*, RIMS Preprint **1626** (March 2008).
- [GenEll] S. Mochizuki, Arithmetic Elliptic Curves in General Position, *Math. J. Okayama Univ.* **52** (2010), pp. 1-28.
- [IUTchI] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller Theory I: Construction of Hodge Theaters*, RIMS Preprint **1756** (August 2012).
- [IUTchII] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller Theory II: Hodge-Arakelov-theoretic Evaluation*, RIMS Preprint **1757** (August 2012).
- [IUTchIII] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller Theory III: Canonical Splittings of the Log-theta-lattice*, RIMS Preprint **1758** (August 2012).
- [IUTchIV] S. Mochizuki, *Inter-universal Teichmüller Theory IV: Log-volume Computations and Set-theoretic Foundations*, RIMS Preprint **1759** (August 2012).
- [Pano] S. Mochizuki, *A Panoramic Overview of Inter-universal Teichmüller Theory*, RIMS Preprint **1774** (February 2013), to appear in *RIMS Kōkyūroku Bessatsu*.