モチーフ — 代数多様体の数論的骨格 —

望月新一

§1. モチーフとその実現

モチーフ（仏語 motif =' 主題 ' に由来）は、代数多様体の理論ではもっとも重要な研究対象の一つである。代数多様体とは、大雑把にいうと、多項式の解のなす幾何的な対象のことで、中学や高校の数学教育にもよく登場する、「放物線」や「楕円」がその初等的な例に属する。もう一つ有名な例を挙げるとしたら、$x^n + y^n = z^n$ というフェルマの方程式で定義される代数多様体— 通称「フェルマ曲線」 — がある。代数多様体を多項式で定義しただけでは、その性質は必ずしもすぐに分かるものではないので、代数多様体に対して様々な「不変量」を対応させ、その不変量をじっと眺めることによって元の多様体の性質を割り出そうとすることは、現代代数幾何や数論幾何（=代数多様体を扱う主な研究分野）での大きな流れである。その「不変量」の一つがモチーフである。

それでは、モチーフという不変量はどんな不変量、つまり、多様体のどのような側面、特徴をつまみ出してくれるものなんだろうか。代数多様体を生物に喩えるなら、モチーフは、多様体の「骨格」、即ち、多様体の余分な「肉」を全部切り捨てたときに現れる、「本質的な構造」のようなものである。ただし、生物の骨格のように、肉眼では見えない、つまり、元の定義多項式からは直接窺がえない、微妙な構造物なのである。生物の場合、レントゲン写真などを撮ることによって、骨格の構造をある程度覗き込むことは可能だが、レントゲン写真には、骨格そのものというよりも、骨格のある「射影」のようなものしか写らない。モチーフの話では、このレントゲン写真に対応するものは、「モチーフの実現」と呼ばれるものである。

§2. Tate モチーフ

モチーフの実現には様々な種類があるが、一般の場合を抽象的な言葉で描写してもなかなか把握しにくいものなので、簡単な具体例を見ていくことにしよう。 実は、モチーフ理論ではもっとも重要なモチーフといってもよい「Tate（テート）モチーフ」は、たまたま非常に初等的な言葉で語られる性質を持っている（というか、高校で勉強する微積分の意外と大きな部分は正にこの Tate モチーフの紹介に費やされているといってもいいようなものである）ので、本節では、Tate モチーフを中心に話を進めることにする。

まず、$XY - 1 = 0$ という多項式で定義される代数多様体から出発しよう。この多様体には、$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ という名前が付けられている。X と Y という変数が、複素数に値をとるものと思えば、$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ の点、つまり、$XY - 1$ という方程式の解 (X, Y) は、

$$\{\ X \text{ は } 0 \text{ 以外の任意の複素数}, Y = X^{-1}\ \}$$

で完全に記述される。即ち、もうちょっと幾何的に考えると、多様体 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ は、複素平面から一点（=原点）を抜いたもの、と思うことができる（図 1 を参照)。この多様体をしばらく眺めてみる

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

と、そのもっとも顕著な性質が、「真ん中に穴（＝原点）があいている」ということであることはすぐに確認できるが、簡単にいうと、その穴が正に Tate モチーフなのである。しかし、そういう言い方ができるのは、たまたま、この $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ という多様体が非常に単純な構造をしているお陰で、感覚的には同じ「穴」という出力をしてくれるものでも、もっと一般の多様体の話にも通用する技術が欲しい、それは「実現」というものである。

もっとも基本的な実現の二つは、de Rham（ドラム）実現と Betti（ベッチ）実現である。モチーフの de Rham 実現は、簡単にいうと、「微分」（＝積分記号 $\int$ の右にくる「被積分関数」と思っていただいて結構）による実現である。この $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ の場合には、de Rham 実現を果たしている微分は $\frac{dz}{z}$ （ただし、z は複素平面上の標準的な複素座標 $z = x + iy$）という微分だが、この微分を色々な経路に沿って積分したりして調べてみると、そのもっとも基本的な性質が、「原点では特異点がある」（つまり、原点では、関数 $\frac{1}{z}$ は定義されていない）ということであることが直ちに確認される。これは正に希望どおり、同じ「穴＝原点」という出力を（微分の形を借りて）返してくれているということである。一方、Betti 実現は、多様体の中の「輪体」（＝‘ 輪っか ’）による実現である。$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ の場合、原点を囲む単位円 $\{z = x + iy \mid x^2 + y^2 = 1\}$ が、Tate モチーフを実現する輪体になっている（図 2 を参照）。実際に、この輪体は、非常に視覚的なレベルで多様体 $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ の「骨格」になっていて、平面から一点を抜いてできる幾何的対象の本質的な形状を表現していることは、読者にも直ちに納得していただけることだろう。

de Rham 実現と Betti 実現の間の対応は、微分を輪体に沿って積分することによって与えられるのである。$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ の場合、微分 $\frac{dz}{z}$ を単位円に沿って反時計回りに積分すると、（簡単な計算から分かるように）$2\pi i$ という数字が出る。この de Rham 実現と Betti 実現の間の対応を表す $2\pi i$ という数字は、モチーフの「周期」といい、モチーフ理論の中では極めて重要な研究対象となっている。この微分 $\frac{dz}{z}$ は、もちろん単位円以外の経路、特に閉じていない経路に沿っても（不定）積分することができるが、そうすると、（初等的微積分でも勉強するように）$\log(z)$ のような関数ができるはずである。本当は、この関数は $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ そのものの上では定義されていなくて、$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ を覆う「被覆」と呼ばれるものまで行かないと定義されないのである（図 3 を参照）。それは、不定積分するときに、積分経路が何回原点を回るかによって、積分の値が変わってくるからである。（もっと正確に言うと、（反時計回りに）一回回る度に、元の答えに $+2\pi i$ が加算される。）従って、$\log(z) = \int \frac{dz}{z}$ は、「$\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$ の点＋その点への経路が原点を何回回ったか」という情報の組みの空間の上で自然に定義されるが、その組みたちのなす空間が正に、図 3 に出てくる $w = \log(z)$-平面である。この被覆空間には、「積分する際に、もう一回回れ $\iff$ w に $+2\pi i$ を足せ」という変換が自然に作用する。このような変換（のなす「変換群」）も、同じ Tate モチーフの一種の実現になっている。本当は、元々は多項式の世界から出発したわけだから、$\log(z)$ という非代数的（＝「多項式系」でない）関数の代数的な代わりないし近似となるものを扱いたいのだが、そのような近似は、

$$\lim_{n\to\infty} n(z^{\frac{1}{n}} - 1) = \lim_{n\to\infty} n\{(1 + (\frac{1}{n}) \cdot \log(z) + O(\frac{1}{n^2})) - 1\} = \log(z)$$

（ただし、$O(\frac{1}{n^2})$ とは、$\frac{1}{n^2}$ のように小さい余りの意）という式が示唆しているように、$z^{\frac{1}{n}}$ のような（代数的な！）関数によって与えられる。つまり、$\{z^{\frac{1}{n}}\}$（ただし、n は自然数）という関数たちの族が、（Tate モチーフの）「étale （エタール）実現」と呼ばれるもう一つの重要な実現をなしているわけである。

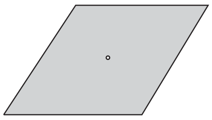

図１： $\mathbf{G}_{\mathrm{m}}$

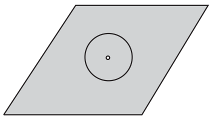

図２： 輪体

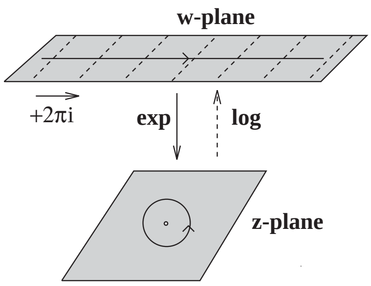

図３： 被覆

§3. 整数論とモチーフ

これまでは、複素数を基にした様々な実現を見てきたが、現代整数論では複素数以外にも色々な種類の「数」が扱われていて、そのようなもっと抽象的な数の世界でもモチーフは上で紹介したような実現を持っている。実は、モチーフ理論の真の力が発揮されるのは、むしろこの抽象的な数の世界においてであり、ここ２０年間のそういったモチーフ理論の整数論や数論幾何に関連した成果から考えると、２１世紀初頭においても、この抽象的な世界におけるモチーフ理論が益々目覚しい発展を続けることが期待される。