数論的log schemeの圏論的表示から見た楕円曲線の数論 I

§1. 圏のIU幾何 (The Inter-Universal Geometry of Categories)

§2. 絶対的遠アーベル幾何のサーヴェー (Survey of Absolute Anabelian Geometry)

---

§1. 圏のIU幾何:

§1.1. Motivation:

ABC予想を解きたい。

⇝ 考えてみる.

scheme論$(/\mathbb{Z}!)$だけでは不十分。
$\mathbb{F}_1$上の幾何が必要。

⇝ もっと技術的なレベルで考えると

数体上の'globalなHodge理論'が必要。
(cf. Hodge-Arakelov理論)

⇝ 本質的な技術的問題をつきつめていくと

「属性方程式」$a \in a$ を解きたい。

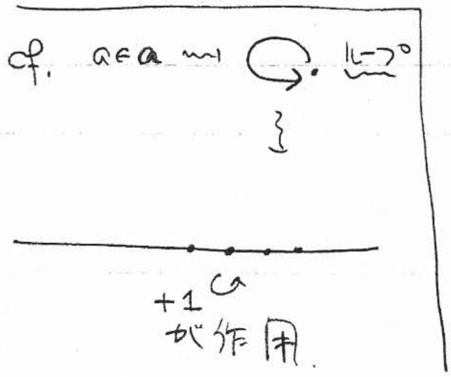
('基礎の公理'により、通常の集合論では有り得ない。)

⇒ 通常の集合論を拡大する必要が有る。

---

§1.2. IU幾何による「解消」(resolution):

一言でいうと、宇宙(universe)の拡大を使ってラベルを貼る。



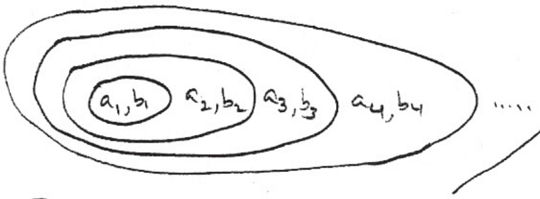
$$\begin{array}{l}
\qquad\qquad\qquad a_4 \in \cdots \\
\qquad\qquad\qquad \| \\
\qquad\qquad a_3 \in \{a_3, b_3\} \\
\qquad\qquad \| \\
\qquad a_2 \in \{a_2, b_2\} \\
\qquad \| \\
a_1 \in \{a_1, b_1\}
\end{array}$$

そして a_iたち ⇝ a
b_iたち ⇝ b
と同一視する
quotientを作る。

重要なポイント:

IUキカ	通常の集合論
局認型 'a' '日本語型'	全知型 'the' '英語型' } ラベルの仕組み

…つまり、ウを拡大していくとき



「a_i は a_1 さんの i 代目の子孫」ではなく

「a_i は ∃a 型のもの」

← ウの特定によらない記述

… cf. Frob $\mathbb{F}_p$: $\mathbb{F}_p[t] \hookrightarrow \mathbb{F}_p[t^{1/p}] \hookrightarrow \mathbb{F}_p[t^{1/p^2}] \hookrightarrow \cdots$

↑ ここ上の代数キカ　↑ ここ上の代数キカ　…

一種の解析・極限 → …まで行けば「a∈a」の解が!

代数には極限への近似しかできない

---

§1.3. ケンのIUキカの基本定理:

Thm: 'ケン/～ケン同値' を考えることによって上述のようなキカができる。

(正確なstatementも証明も略。)

注:「別の ～ のIUキカ」も有り得る。

⇓

ここでケンにこだわりたい理由:

ケンは 1次元的だからである。

‖

「もっとも原始的な単位」

例: M comm. monoid, $\ni 1$

$\rightsquigarrow \mathcal{C}_M$: obj: $*$

mor: $\mathrm{End}(*) = M$.

一方、カンは 2次元的: 足し算 ⊞, 掛け算 ⊠

↑ ……上と同様な例により、$\boxed{\text{2-cat. of 1-cats.}}$ として表示可能。

…… ABC予想の内容:「この2つの次元を分離して=引き離してその間の関係を理解したい。」

§2. 絶対的遠アーベル幾何のサーヴェイ

「遠アーベル幾何」とは、「スキームを、(それに付随する)ガロア圏で表示する」こと。

別の言い方:「その π_1^{alg}」

⇓

「ケンのIU幾何」の特別な場合に当たる。

ここでは、char. 0の体 K 上の双曲型曲線 X_K の場合を中心に話を進める。

→ (compact genus g) − (r pts.) s.t. $2g-2+r>0$

⇓

$$\boxed{\begin{array}{ccccccccc} 1 \to & \Delta_X & \longrightarrow & \Pi_{X_K} & \longrightarrow & G_K & \to 1 \\ & \parallel & & \parallel & & \parallel & \\ & \mathrm{Ker}(\ ) & & \pi_1(X_K) & & \mathrm{Gal}(\overline{K}/K) & \end{array}}$$

通常は、$\boxed{\text{relative}}$ なリロンを考える:「K, G_K を固定して、Π_{X_K} を G_K 上のものと見做して、$\Pi_{X_K} \to G_K$ から X_K を復元できるかどうか考える」

例: $\mathrm{Aut}_{G_K}(\Pi_{X_K}) \overset{?}{\cong} \mathrm{Aut}_K(X_K)$ 等

ここでは、$\boxed{\text{absolute}}$ に考えたい。

(=「$\sim \to G_K$」という付加構造なしで)

§2.1. 数体の場合: $\boxed{K/\mathbb{Q}<\infty}$ この場合、Neukirch–Uchida の定理があるため、rel.、abs. は(ほとんど)同じ。

$$\boxed{\text{Thm: (NU)}\quad \mathrm{Isom}(\bar{K}/K, \bar{K}'/K') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(G_K, G_{K'})}$$

$$\boxed{\text{Cor: (NU+玉川, 望月)}\quad \mathrm{Isom}_{\mathbb{Q}}(X_K, X'_{K'}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{OutIsom}(\Pi_{X_K}, \Pi_{X'_{K'}})}$$

---

§2.2. p進局所体の場合: $\boxed{K/\mathbb{Q}_p<\infty}$

・N-U の analogue は不成立。

・上の Cor の analogue (= abs. pGC) は、現時点では証明も反例もないが、成り立たない可能性が極めて高いと思われる。

注: 玉川氏の Lemma により、$\Pi_{X_K} \twoheadrightarrow G_K$ という quotient (=つまり、Kernel) が、「群論的」であることは分っている。

一方、既に知られている rel. pGC

$$\boxed{\text{Thm: (望月)}\quad \mathrm{Isom}_K(X_K, X'_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{OutIsom}_{G_K}(\Pi_{X_K}, \Pi_{X'_K})} \quad (\text{Invent. Math. '99})$$

に対して、abs. な解釈が有る。

$$\mathrm{Loc}_K(X_K) = \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: } Y \text{ s.t. } \exists \text{ fin. et. } Y \to X_K \\ \text{mor: } Y_1 \to Y_2 \text{ fin. et. (「}/X_K\text{」とは限らない!!)} \end{array} \right\} \text{ という圏}$$

とおくと、

(RIMS Preprint 1379, 1428)

Cor: $\forall\ \Pi_{X_K} \overset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \Pi_{X'_{K'}}$ に対して α に関して functorial な圏同値が有る:

$$\boxed{\mathrm{Loc}_K(X_K) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}_{K'}(X'_{K'})}$$

特に、「X_K が arithmetic」かどうかは Π_{X_K} という profinite 群の同型類だけで判定可能。

(arithmetic = fin. et. 射によって Shimura curve に isogenous なもの)

Pf: (Sketch) 主なポイントは、「Aut」が保たれること。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{OutAut}_{G_K}(\Pi_{X_K}) & \xrightarrow[\sim]{\text{`}\alpha\text{'}} & \mathrm{OutAut}_{G_{K'}}(\Pi_{X'_{K'}}) \\ \downarrow\wr & & \downarrow\wr \\ \mathrm{Aut}_K(X_K) & & \mathrm{Aut}_{K'}(X'_{K'}) \end{array}$$

つまり、どんなに「悪い α」でも

$$\begin{array}{ccc} {}^{\exists}\Pi_{X_K} & \xrightarrow[\sim]{\alpha} & \Pi_{X'_{K'}} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ G_K & \xrightarrow{\sim} & G_{K'} \end{array}$$

かつ、「$\beta \in \mathrm{OutAut}(\Pi_{X_K})$ s.t. G_K上ではinner」は「$\alpha\circ\beta\circ\alpha^{-1} \in \mathrm{OutAut}(\Pi_{X'_{K'}})$ s.t. $G_{K'}$上ではinner」に送られる。//

---

§2.3. special fiberとcanonical curve: 1つの重要な類似:

p進体上	$\mathbb{F}_p((t))$上
Π_{X_K}をabsoluteに扱う	$X_{\mathbb{F}_p((t))}$を、$\mathbb{F}_p((t))$上のものではなく、$\mathbb{F}_p$上のものとして扱う。 ⇓ $t \mapsto t + (?)t^2 + \dots$ というような座標変換に関して不変なもの・性質しか復元できないはず。

⇓

この類似を信じるとすると

(i) special fiberは復元できるはず。

(ii) X_Kそのものが復元できるのは'constant curve'のときだけと予想される。

実際、

Thm (望月): $^\forall \Pi_{X_K} \overset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \Pi_{X'_{K'}}$ ($X_K, X'_{K'}$ stable reduction をもつとき) $\xrightarrow{\alpha\text{に関して functorial な}}$ $\boxed{X_k^{\log} \xrightarrow{\sim} (X'_{k'})^{\log}}$ (log special fiber 間の同型). (RIMS Preprint 1363)

(Pf: 玉川氏の定理 + 前から知られているギロン。)

Thm (望月): $^\forall \Pi_{X_K} \overset{\alpha}{\xrightarrow{\sim}} \Pi_{X'_{K'}}$ (K, K' 絶対不分岐, $p>5$) $\longrightarrow$

(i) X_K can. lift $\iff$ $X'_{K'}$ can. lift. (p進Teich.理論の意味で — cf. 2001年の研究集会!!)

(ii) can. lift. のとき、上の定理の log. sp. fiber 間の同型は

$$X_K \xrightarrow{\sim} X'_{K'}$$

に(uniqueに)持ち上がる。 (RIMS Preprint 1379)

$\Downarrow$

Defn: X_K absolute とは $^\forall X'_{K'}$ s.t. $\Pi_{X_K} \overset{\exists}{\xrightarrow{\sim}} \Pi_{X'_{K'}}$, $^\exists X_K \xrightarrow{\sim} X'_{K'}$

Cor: absolute な curve による点は $\mathcal{M}_{g,r}(\overline{\mathbb{Q}}_p)$ ($p>5$) 内で Zariski dense。

Rmk: (i) 上の Cor は pTeich. の(記念すべき!)はじめての応用。

(ii) cf. 「abel. var. の can. lift は CM」: $\left.\overline{\mathbb{Q}}_p \hookrightarrow \mathbb{C} \circlearrowleft \mathrm{Aut}\right\}$ こういうものを考える。

数論的 log scheme の圏論的表示から見た
楕円曲線の数論 II

§3. 一般の数論的 log scheme の表示
§4. 数体に付随する乗法的局所化の圏 $\mathrm{Loc}^\times$

---

§3. 一般の数論的 log scheme の表示：

§3.1. scheme の場合：前回は，

IU キカ ⊇ 遠アーベル キカ

という、IU キカの特別な場合を見てきた。まとめ

様々な興味深い現象が有るが，ひじょうに特殊なスキームに対してしか適用できない。

⇓

IU キカの適用範囲を広げたい

⇓

次のような圏を考える。

X noetherian scheme

$$\mathrm{Sch}(X) = \left\{\begin{array}{l} \text{obj: } Y \to X \text{ fin. type morphism} \\ \text{mor: } Y_1 \to Y_2 \text{ .... } X\text{-scheme の射.} \end{array}\right\}$$ という圏

$$\boxed{\text{Thm: } \mathrm{Isom}(X, X') \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\mathrm{Sch}(X), \mathrm{Sch}(X'))}$$

圏同値の同型類

(RIMS Preprint 1364) GC 型の定理.

Pf: (Sketch) Y, Z 等は $\mathrm{Sch}(X)$ の obj。

(1) minimal obj $\overset{\emptyset}{\neq} Z$: $\forall\, \overset{\emptyset}{\neq} Y \rightarrowtail Z$, $Y \xrightarrow{\sim} Z$

$\Updownarrow$

Z reduced, one-pt'd. sch.

Z one-pt'd sch. ⟺ 同型を除いて $Y \rightarrowtail Z$ s.t. Y reduced one-pt'd は1しかない。

∴ は ケンケン的

(ii) $W_1 \hookrightarrow W_2$ s.t. W_1, W_2 one pt'd を考える。
⇔ cl. immersion.

$$\Rightarrow \left\{ Y \to Z \ \text{smooth} \Leftrightarrow \forall \begin{tikzcd} W_1 \arrow[r] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d] \\ W_2 \arrow[r] \arrow[ur, dashed, "\exists"] & Z \end{tikzcd} \right\} \Rightarrow \text{'smooth'}\text{ は}$$
ケンロン的.

(iii) {open immersion ⇔ smooth かつ monomorphism} ⇒ 'open immersion' は ケンロン的

⇓

Z の Zariski site は ケンロン的に復元可能。 ⇐ { surj. も ケンロン的 (red., one pt'd からの射を考えると当たり前) 故,

---

(iv) 一方, 一般の sober top. space $\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2$ に対して, よく知られている結果として:

('∀ irred. cl. s|set, ∃! generic pt.')

$$\mathrm{Mor}(\mathfrak{X}_1, \mathfrak{X}_2) \to \mathrm{Mor}(\mathrm{Shv}(\mathfrak{X}_1), \mathrm{Shv}(\mathfrak{X}_2))$$

$\mathfrak{X}_i$ 上の sheaf たちからなる topos.

⇓ [(iii) より]

Z の台位相空間も復元可能。

(v) 次は: 「$\mathbb{P}^1_Z \to Z$」が同型を除いて ケンロン的 であることに気付く。

('smooth, proper s.t. red. one pt'd な obj. 上の fiber が様々な当たり前な性質を満たす。)
proper = sep. かつ univ. cl.

⇓

後は、$\mathbb{A}^1_Z$ に入る unique な ring scheme structure を使って

$\mathbb{A}^1_Z \rightleftarrows Z$ section たちからなる sheaf '$\mathcal{O}_Z$' を復元。

//

§3.2. log scheme の場合: X noetherian scheme
$X^{\log}$ fine, saturated log scheme (s.t. 台スキーム $= X$)

$$Sch^{\log}(X^{\log}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: } Y^{\log} \to X^{\log} : Y^{\log} \text{ fs log sch., } Y \to X \text{ fin. type} \\ \text{mor: } Y_1^{\log} \to Y_2^{\log} : X^{\log} \text{ 上の log sch. の射} \end{array} \right\} \text{という圏}$$

$$\boxed{\text{Thm: } \mathrm{Isom}(X^{\log}, (X')^{\log}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(Sch^{\log}(X^{\log}), Sch^{\log}((X')^{\log}))}$$ (RIMS Preprint 1364)

Pf: 同様なギロンだが, 技術的には大部難しくなる。//

---

§3.3. archimedean str. 付きの場合: R: $\mathbb{Z}$ または $\mathbb{Q}$
X: R 上 fin. type

Defn: ・X 上の arch. str. とは: $H_X \subseteq X(\mathbb{C})$ s.t. H_X compact, 複素共役で保たれる。

.... $\overline{X} = (X, H_X)$ を arith. sch. と呼ぶことにする。

$$\overline{Sch}(\overline{X}) = \left\{ \begin{array}{l} \text{obj: } \overline{Y} = (Y, H_Y) \to \overline{X} : Y \to X \text{ fin type, } H_Y \to H_X \\ \text{mor: } \overline{Y}_1 \to \overline{Y}_2 : Y_1 \to Y_2 \text{ fin. type}/X, H_{Y_1} \to H_{Y_2} \end{array} \right\} \text{という圏}$$

$$\boxed{\text{Thm: } \mathrm{Isom}(\overline{X}, \overline{X'}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\overline{Sch}(\overline{X}), \overline{Sch}(\overline{X'}))}$$ (証明略。)

Rmk: (i) log 版も有り: $H_X \subseteq X^{\log}(\mathbb{C})$ = Kato-Nakayama の空間 ('$\mathbb{N} \rightsquigarrow S^1$')

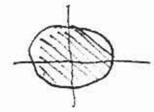
(ii) この理論によって arch. な素点も, IUT 的に 扱えるようになった。
遠アーベル幾何では本質的に出来ない

例; $F/\mathbb{Q} < \infty$, $\mathcal{L}$: $\mathrm{Spec}(O_F)$上の arith. l.b. (= arch.な素点では Hermite metricが付いている)

$\Downarrow$

$V \to S = \mathrm{Spec}(O_F)$ (対応する geom. l.b.), $V^{\log}$: zero sectionによる log str,

$\overline{V}^{\log}$: Herm. metricの $|\cdot| \le 1$ による arch. str.



$\Downarrow$

$$\boxed{\mathrm{Isom}(\overline{V}^{\log}, (\overline{V}')^{\log}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Isom}(\overline{Sch}^{\log}(\overline{V}^{\log}), \overline{Sch}^{\log}((\overline{V}')^{\log}))}$$

「$\mathcal{L}$の同型類がケンロン的に決まる。」

---

§4. 数体に付随する乗法的局所化の圏 $\mathrm{Loc}^{\times}$

§4.1. 定義:

IUキカ

⊂ ⊃

遠アーベルキカ　　Sch, $\overline{Sch}^{\log}$等

適用範囲がせますぎる。arch.な素点が扱えない。

一般的すぎる。内部コーリーは十分にrigidではない。

⟹ 中間にある ⟸

ようなものを考えたい。

$F/\mathbb{Q} < \infty$。 $\tilde{F}/F$ Galoisな代数拡大。$G = \mathrm{Gal}(\tilde{F}/F)$

$\overline{S}_F^{\log}$: $\mathrm{Spec}(O_F)$ + 「pro-log str.」(∀有限素点からなる) + arch. str. (∀無限素点からなる。)

$\mathrm{Loc}_G(\overline{S}_F^{\log})$:

- gl. obj: $\overline{S}_L^{\log}$; $\tilde{F} \supseteq L \supseteq F$ → 有限次拡大.
- loc. nonarch. obj: $\mathrm{Spec}(R)^{\log}$; $R = O_{L,\mathfrak{p}}$ ← 有限素点, Lは上のような拡大、log str.は閉点による。
- loc. arch. obj: $\overline{\mathrm{Spec}(L)}$: Lは上のような拡大、arch. str.は、1つのarchな素点によるもの。 ↳/complex conj.
- mor: O_F上の任意の射.

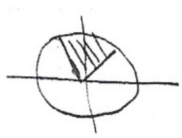
$\mathrm{Loc}_G^{\times}(\overline{S}_F^{\log})$ = obj: $\overline{V}^{\log} \to \overline{T}^{\log} \in \mathrm{obj}(\mathrm{Loc}_G(\overline{S}_F^{\log}))$

geom. l.b., log str. は (zero-section) + $\overline{T}^{\log}$から引き戻したもの.

arch. str. は: gl: ∀arch. v 上の Herm. metric による $|\sim| \le 1$ (cf. §3.3の例1)

loc. arch.: arch. str. の∀arch. v 上の Herm. metric による $|\sim| \le 1$, (全ての点) angular region (open, conn.)

deg$_{ar}$(gl. obj.) = その Arakelov 次数



mor: $\overline{V}_1^{\log} \to \overline{V}_2^{\log}$: $\mathcal{O}_F$上の射の limit.

$$\begin{array}{ccc} \overline{V}_1^{\log} & \longrightarrow & \overline{V}_2^{\log} \\ \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \\ \overline{T}_1^{\log} & \longrightarrow & \overline{T}_2^{\log} \end{array}$$

$\overline{T}_1^{\log}$ localのとき, uniqueな nontrivial v に関する.

..... loc. には. $\boxed{t \mapsto c \cdot t^n}$

$c \in (\mathcal{O}_{\overline{T}^{\log}})^{\wedge} \setminus \{0\}$.

n: 'Frob. deg' $\deg_{Fr.}(-)$

「F上の arith. l.b. と その loc. 化 の理論」を表示している圏

用語: base-isom: $\mathrm{Loc}^{\times}$の射 s.t. $\overline{T}_1^{\log} \xrightarrow{\sim} \overline{T}_2^{\log}$

mor. of Frob. type: base-isom. s.t. $c \in \{(\mathcal{O}_{\overline{T}^{\log}})^{\wedge}\}^{\times}$.

..... つまり, $\overline{V}_1^{\log} \to \overline{V}_2^{\log}$ (Fr. type) とは, '$\mathcal{L} \to \mathcal{L}^{\otimes n}$' $(\ )^n$ (n乗写像) に同型なもの。

$\mathcal{L}$に対応しているとする

---

§4.2. 完全化, 実化: (perfection, realification — cf. 'Q-divisors, R-divisors')

$\mathrm{Loc}_G^{\times\mathbb{Q}\mathbb{Q}}$: obj: $(V)^{1/n}$ (形式的なもの) …. $(V) \in \mathrm{Loc}_G^{\times}$

mor: $(V_1)^{1/n_1} \longrightarrow (V_2)^{1/n_2}$:

$$\begin{tikzcd} (V_1) \arrow[r] \arrow[d, "\substack{\mathrm{Fr.\,type,}\\ \deg_{\mathrm{Fr}} = d/n_1}"'] & (V_2) \arrow[d, "\substack{\mathrm{Fr.\,type,}\\ \deg_{\mathrm{Fr}} = d/n_2}"] \\ (W_1) \arrow[r] & (W_2) \end{tikzcd}$$

$n_1, n_2 \mid d$.

を考えて、$\varinjlim_{d \to \infty}$ をとる。

乗法的な意味

$$\Downarrow$$

$$C \in \left[\left(\mathcal{O}_{\mp\log} \right)^{\wedge} \setminus \{0\} \right] \otimes \mathbb{Q}_{\geq 0}$$

monoidの意味: $M \xrightarrow{n} M \xrightarrow{n'} M \to \ldots$ の inj. lim.

$\mathrm{Loc}_G^{\times\mathbb{R}\mathbb{R}}$: gl. obj. (の同型類) は $\deg_{\mathrm{ar}}(-)$ だけで決まる。

mor は、($\mathrm{Loc}^{\times\mathbb{Q}\mathbb{Q}}$から出発して) $|C|$ だけ考えて、$\mathbb{Q}_{\geq 0} \rightsquigarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ と完備化する。

$|C| \in \mathbb{R}_{\geq 0} \ (\supseteq \mathbb{Q}_{\geq 0})$

中間的な version も有り:

	local な部分	gl. な部分
$\mathrm{Loc}^{\times\mathbb{Z}\mathbb{R}}$	$\mathrm{Loc}^{\times}$ 型	$\mathrm{Loc}^{\times\mathbb{R}\mathbb{R}}$ 型
$\mathrm{Loc}^{\times\mathbb{Q}\mathbb{R}}$	$\mathrm{Loc}^{\times\mathbb{Q}\mathbb{Q}}$ 型	$\mathrm{Loc}^{\times\mathbb{R}\mathbb{R}}$ 型
⋮		

或いは、分割 $\Xi = (\Xi_{\mathbb{Z}}, \Xi_{\mathbb{Q}}, \Xi_{\mathbb{R}})$ s.t. $\{F$のすべてのv (自明なものも入れる$\} = \Xi_{\mathbb{Z}} \cup \Xi_{\mathbb{Q}} \cup \Xi_{\mathbb{R}}$ かつ、ヨ性質をみたしている。

に対して、

$\boxed{\mathrm{Loc}_G^{\times\Xi}\left(\mathfrak{S}_F^{\log}\right)}$ も有り。

数論的 log scheme の圏論的表示から見た
楕円曲線の数論 III.

§5. $Loc^{\times}$ の基本的性質
§6. global な multiplicative subspace の意味
§7. $Loc^{\times}$ の分布版

---

§5. $Loc^{\times}$ の基本的性質

§5.1 整構造 (integral structure) と Frobenius 射: 前回紹介した圏

$Loc^{\times \Xi}_{G}(\overline{S}_{F})$: F の様々な局所化とその上の arith. l.b. の圏

に対して次のようなものを考えたい:

(nonarch. な) step. $V_1 \xrightarrow{\varphi} V_2$: $\deg_{Fr}(-) = 1$ となる $Loc^{\times\Xi}$ の base-isom., isom. でない s.t. V_1, V_2 nonarch. local.

arch. も有るが、カンタンのため省略

…, つまり, '$t \mapsto ct$', $|c|<1$. } 'int. str. の取り替え'

$\Rightarrow$ $\boxed{\deg_{ar}(\varphi) \overset{dfn}{=} \mathrm{ord}(c)}$ ('ord' は global l.b. の $\deg_{ar}(-)$ と両立するように正規化)

次に、$n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ を fix。$\forall$ obj. V, $\exists ! / \cong$ Frob. 型の射 $V \longrightarrow W$ s.t. $\deg_{Fr}(-) = n$。

$\Downarrow$

(同型を除いて) 自然な functor $\Phi : Loc^{\times\Xi} \longrightarrow Loc^{\times\Xi}$
$V \longmapsto W$

注: gl な obj. が完全化又は実化されているときは圏同値になる。

s.t. $\deg_{ar}(\Phi(\varphi)) = n \cdot \deg_{ar}(\varphi)$ を定める。
(V global なら) $\deg_{ar}(\Phi(V)) = n \cdot \deg_{ar}(V)$

§5.2. l.b.のキカのケンロン性：

Thm: $\Phi : \mathrm{Loc}_G^{\times\Xi}(\bar{S}_F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Loc}_G^{\times\Xi}(\bar{S}_F)$ （任意の）圏同値。

⇒ Φは次の性質等を保つ：

(i) loc. arch. obj, loc. nonarch. obj., gl. obj.

(ii) base-isom, $\deg_{Fr}(-)$, step

(iii) $\deg_{ar}\left(\Phi\begin{pmatrix}\text{step}\\ \text{又は}\\ \text{gl. obj.}\end{pmatrix}\right) = \deg_{Cat}(\Phi) \cdot \deg\begin{pmatrix}\text{step}\\ \text{又は}\\ \text{gl. obj}\end{pmatrix}$

$\in \mathbb{R}_{>0}$ …… Φだけで決まる。

Ξ : □$\mathbb{Q}$ ⇒ $\in \mathbb{Q}_{>0}$。

$\mathbb{Z}$□ ⇒ $=1$.

(iv) 自然なfunctor $\mathrm{Loc}_G^{\times\Xi} \to \mathrm{Loc}_G$

§5.1のFrob. functorのように このようなこと（「≠1」）は実際起こりうる。

つまり、特にArakelovキカの基本である gl. l.b. の deg は（多くの場合）保たれる！

⇓

（ケン）だけで「Arak. キカ」ができる！

このように直接、数体から生じる $\mathrm{Loc}^{\times\Xi}$ だけでなく それを少し「修正したもの」に対しても！

---

§5.3. 数体のスス曲型曲線： (sketch)

arith. π_1による拡大 $1 \to \Delta \to \Pi \to G \to 1$ が有ったとき、

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Loc}_G^{\times\Xi} & \rightsquigarrow & \mathrm{Loc}_\Pi^{\times\Xi} \\
\downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Loc}\,G & & \mathrm{Loc}\,\Pi \\
\cup & & \cup \\
\left\{\begin{array}{l}\text{fin. sets}\\ \text{w/ cont. } G\text{-action}\end{array}\right\} = \mathcal{B}(G) & \longleftrightarrow & \mathcal{B}(\Pi) = \left\{\begin{array}{l}\text{fin. sets}\\ \text{w/ cont. } \Pi\text{-action}\end{array}\right\}
\end{array}$$

と拡大できる。⇒ 上と同様なリロンができる。

---

arch.な素点でも付随するRiemann面とその（解析的な）局所系の圏 を、貼り合わせることによって同様な拡大（＋同様なリロン）ができる。

この（ケン）からリーマン面を復元できる。これは独立な事実としても面白い。

§6. gl. な mult. s/sp. の意味

§6.1. リーマン面上の楕円曲線の族の Hodge 理論:

S: 有限型 (=コンパクト \ 有限集合) リーマン面.

$$\left.\begin{array}{c} E \\ \downarrow \\ S \end{array}\right\} \text{ell. curve の族} \quad \rightsquigarrow \quad \begin{tikzcd} \tilde{S} \arrow[r] \arrow[d] & \tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{h} \subseteq \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \arrow[d] \\ S \arrow[r] & \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \end{tikzcd} = \{\text{ell. curve の moduli stack}/\mathbb{C}\}$$

$\rightsquigarrow$

$\mathcal{E}$: S上の loc. system, fiber $\cong \mathbb{Z}^2$

この分類射やその微分を数論的につくりたい

「$\mathbb{C}$上の Hodge 理論の基本」: $\mathcal{E}\otimes_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_S \supseteq \omega_E$

ω_E: canonical な rank 1 sub.

$\rightsquigarrow$

$\mathcal{E}|_{\tilde{S}} \cong \mathbb{Z}^2$ 故, rank 1 sub. は, 固定された $\mathbb{C}$内の「動く rank 1 s/sp.」と見ることができ, その分類写像は,

$$\begin{array}{ll} \text{これ} \to & \left\{ \tilde{S} \to \tilde{\mathcal{M}}_{\mathbb{C}} \cong \mathfrak{h} \hookrightarrow \mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \right. \\ & \quad \downarrow \qquad\quad \downarrow \\ \text{descent したもの} & \left\{ S \longrightarrow \mathcal{M}_{\mathbb{C}} \right. \end{array}$$

---

§6.2. 局所的な数論的類似物: ここでは詳しく説明するつもりはないが,

p進Hodge理論では, $(\text{Tate module}) \otimes \mathbb{C}_p \supseteq \left(\begin{array}{c}\text{canonical な rank 1 sub.} \\ \parallel \\ \text{wt 1 の部分}\end{array}\right)$

（本質的な意味）

しかも、$\mathcal{M}_{\mathbb{Q}_p}$ 上では、隠的に global なものとして、この rank 1 sub. を構成できる。

また、$\mathbb{Z}[[q]]$ 上（＝無限遠点の形式近傍）では、

$$\boxed{0 \to \mu_n \to E[n] \to \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \to 0}$$ がつくれる。

μ_n：can. rank 1 sub.

$\underbrace{\mathbb{G}_m}_{\text{による。}} \to \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}} = E$

これの「数体上 global」な version が欲しい！

---

§6.3 mult. sub（＋それによる商の can. generator '$1 \in \mathbb{Z}$'）が欲しい理由：

一言でいうと、'Hodge-Arakelov 理論' を展開したいから。

＝（'数体上 global な Hodge 理論'）

…… 要は、'Ⓗ-fn. の q 展開'

$$Ⓗ = \underbrace{\sum_{n \in \mathbb{Z}} q^{n^2} U^n}$$ が欲しい。

‖

$\mathbb{G}_m \to \mathbb{G}_m/q^{\mathbb{Z}} = E$

$\mathbb{G}_m$：ここ上の Fourier 展開

'$1 \in \mathbb{Z}$' は、Fourier 係数の index ＝ラベル

この理論が適用できるような状況になると ⇒ 「ABC は出るはず」

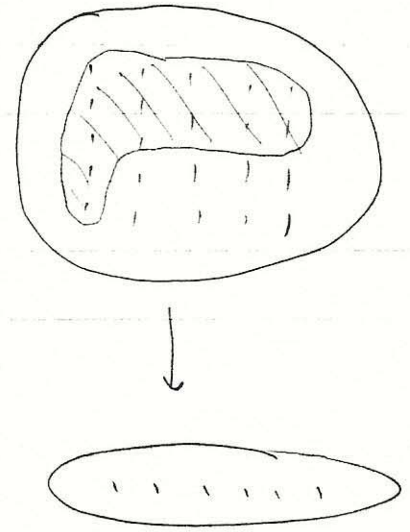
（cf. H-A 理論の Survey）

§7. $\mathrm{Loc}^{\times}$の分布版： E : ell. curve / 数体 F

$K := F(E[d])$

…カンタンのため，$\mathrm{Gal}(K/F) \cong GL_2(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})$ と仮定。

$\Downarrow$



K上で rank 1 sub.

'L' $\subseteq E[d]$

をとってきても ほとんどの bad. monarch prime では 'mult. sub' にはならない。

$\Downarrow$

「なる」のは ごく一部の bad. monarch prime

$\Downarrow$ $\quad\cap$

「ならない」素点を捨てて、残りの素点たち

のみで'数論をやろう'

$\Downarrow$

分布版

(i) $\mathrm{Loc}^{\times\Xi}_{\Pi^+}[\mathrm{Bor}^+]$

$\uparrow$

(ii) $\underline{\mathrm{Loc}}^{\times\Xi}_{\Pi}[\mathrm{Bor}] \longrightarrow$ (iii) $\mathrm{Loc}^{\times\Xi}_{\Pi}[\mathrm{Bor}]$

ここで： (i)： F の v_F 上の残りの素点たち を 独立なものとして扱う

(ii) ―――― に $GL_2(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \supseteq \overset{\text{Borel}}{B}$ の作用が付いているものを扱う

近い

(iii) その作用で割ったものを扱う

$\Longrightarrow$

(1) (i), (ii), (iii) は §5.2のThm. のように、「当たり前なキカ」はすべてケンカン的。

$\Downarrow$

$\boxed{\text{特に、'Arak. キカ' ができる。}}$

---

(2) (iii) $\rightsquigarrow$ $\underbrace{\mathrm{Loc}_{\Pi}^{\times\Xi}(\overline{S}_F^{\log})}_{\text{'ふつうのもの'}}$ ］つまり、IU キカ的には区別が付かない！

'ふつうのもの'
||
'分布版でない'

(ii)で つながっている!!

---

(3) (i)の上では、 「gl. mult. sub」有り！

||

$\forall$ bad monarch. prime において
「mult sub」と一致する ℓ-torsion の rank 1 sub.

つまり、gl. な数論がまだ有効な「キカ的対象」の上で
(§6.1との類似でいうと) 数論的な分類射をつくることができた！

Rmk: (i) と (iii) の差は、p進 Hodge リロンの

$\boxed{(B_{\mathrm{crys}}\text{や}B_{DR}) \text{ と } \mathbb{C}_p}$ の差を連想させるものが有る。