(これは今後書く予定のサーベイとは関係ありません.)

1 “宇宙際” についての FAQ.[1]

Q1. 宇宙を取り替える, って数学基礎論的・論理学的に非自明な操作をしているの？

A1. 望月さんの宇宙際 Teichmüller 理論の論文において数学基礎論的・論理学的に非自明な操作をしているとは山下は (少なくとも現時点では) 思っていません. “宇宙替え” は大事ですが, 数学基礎論的・論理学的に非自明な操作により証明をしているのではなく, **証明の本質的な数学的道具はやはり遠アーベル幾何的再構成アルゴリズムたち**にあります.

Q2. じゃあ, 宇宙を取り替えるってどういう意味？

A2. 宇宙際 Teichmüller 理論では, 環構造そのものを変形します. スキーム論とは環論だと思うと, by definition でスキーム論が通用しない局面がしばしば出てくるということです. 一方のスキーム論での操作や基点などを他方のスキーム論にもちこむことはできません. 一方での恣意的なラベル付けが他方では通用しない, それは “宇宙を取り替える” ということではないか, という意味で使っています. 厳密な意味での Grothendieck 宇宙を取り替えると考えてもいいですし, 数学基礎論的に厳密な観点からはあくまで 1 つの Grothendieck 宇宙の中で考えてその中に別々にスキーム論があって, それを取り替えることを “宇宙を取り替える” という言葉で表現していると考えてもいいです. また, その新しい幾何学ではそこから生じる不定性を統制する・剛性 (rigidity) で抑える・(1 の冪根の p 進 log をとると 0 になる等の) 適当な操作で消す・(不定性のため像がはっきりしないがある入れ物には入っていることは分かるなどにより) 見積もることなどや, ある不定性と他の不定性が連動している (synchronize) ことを用いることなどが大事になってきます. それにはそもそも不定性の存在に気付かないといけないわけですが, 不定性の存在を明確に意識するのにも役に立つ考え方です. “その新しい幾何学” と書きましたが, 従来の幾何学では (多項式写像であれ連続写像であれ可微分写像であれ) 環構造と整合的な射 (環付きトポスの射) を考えるのが幾何学であるという視点に立つならば, それは幾何学という枠組みすら超えているかもしれません.

Q3. たくさん宇宙を取り替るとしても, もともとそれらをすべて含むような宇宙をとってきてその宇宙で議論をすれば, 宇宙を取り替える必要はないんじゃないの？

A3. 確かに論理的にはその意味では宇宙を取り替える必要はありません. けれども, 任意のコンパクトな (可微分) 多様体は十分大きな Euclid 空間に埋め込めますが, (可微分) 多様体の定義を Euclid 空間の部分空間として定義するのは不自然です. それと同じ意味において, 初めから大きい宇宙をとってくるのではなく, 各スキーム論が局所的にあり宇宙を取り替えて別のスキーム論に移ると考える方が自然です. また, 心理的な問題かもしれませんが, そのように大きい宇宙の中で考えることにすると, A2 でも言及した不定性を明確にしづらく, 注意しないと混同しやすくなります.

Q4. よく分かんない. 分かりやすいおもちゃ的な例を挙げて欲しい.

[1](株) 豊田中央研究所　山下剛

A4. 別のたとえをしますと, $\mathbb{R}$ 上の (適当な) 関数 $f(x)$ とその Fourier 変換 $\hat{f}(\xi)$ の変数 x, ξ が住んでいる定義域は同じ $\mathbb{R}$ と考えることもできますが, "本当は" その住んでいる場所って違いますよね. そういう感覚に近いです. 上半平面の ∞ カスプと 0 カスプと取り替える座標変換 $z \mapsto -\frac{1}{z}$ も, どこを基点に座標を考えているのかを替える (ラベル付けを替える)"宇宙替え" のおもちゃ版とみなせます. この Fourier 変換と座標変換の 2 つの例は, テータ関数 (あるいは一般に保型性をもつ関数) の関数等式 $\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}\theta\left(\frac{1}{t}\right)$ の視点では同じことを言っているにすぎません. また, A3 で "各スキーム論が局所的にあり宇宙を取り替えて別のスキーム論に移ると考える方が自然です" と答えました. "座標変換を宇宙替え (のおもちゃ版) と見なす" という上で挙げた例は, その意味でも (可微分) 多様体を大きな Euclid 空間の部分集合と見るのではなく局所的なものを座標変換で貼り合せたものと見る見方と類似的です.

同一視はできても本来的起源が違う対象を別のものと思う sensitive な感覚が宇宙際 Teichmüller 理論では大事になってきます. $\mathbb{R}^2$ に異なる 2 つの正則構造を入れると, どちらも $\mathbb{C}$ で同じものです. 正則構造のみしか見えない視点では両者をつなげることはできませんが, 下部構造の $\mathbb{R}^2$ を考えると非正則なつながり方が見えてそのズレを計ることができる, ということと類似のことを宇宙際 Teichmüller 理論ではします. つまり, 数体の数論的正則構造 (=環構造) を非スキーム論的に変形し, 変形前と変形後は環としては同じものですが, スキーム論だけでは見えないそのつながり方を mono-analytic な視点を導入して見えるようにしてズレを計算する, ということをします. 宇宙際 Teichmüller 理論ではそのようにある 1 つの数論的正則構造の視点でのみ意味をもつ性質を **uniradial** と呼び, 他の数論的正則構造たちとも共通する性質を **coric** と呼び, ある数論的正則構造の視点で別の数論的正則構造たちを記述できる性質を **multiradial** と呼んでいます.

Q5. abc 予想の証明に宇宙を取り替える必要って本当にあるの？

A5. "宇宙を取り替える" と "必要性" を上の意味で使うことにして, 現時点で少なくとも山下はそれを使わない証明を知りません.

注 1: 上記文章は, あくまで山下剛の個人的見解であり, 望月新一氏の考えを忠実に反映していない可能性もあります.
注 2: 「"宇宙際" についての FAQ」とありますように, 上記文章は "宇宙際" についての説明です. Q1 のような誤解を解くことに主眼があり, 理論のより詳しい内容を説明することを目的としたものではありません. より詳しい内容についてはこれから書く予定のサーベイをお待ち下さい.
注 3: 2013 年 4 月現在, 宇宙際 Teichmüller 理論の論文は詳細の点検中にあります. **上記文章は 2013 年 4 月現在においてその理論の正しさの主張や保証をするものではありません.** また, その論文の正しさが確定するまでは, メディア関係者からの山下への取材はすべてお断りしています.

謝辞 宇宙際 Teichmüller 理論とそれに関係する理論及び宇宙際 Teichmüller 理論のさらなる発展についての有意義かつエキサイティングな議論に対して望月新一氏に深く感謝する. 豊田佐吉翁の理念を受け継ぎ, 純粋数学の研究に専念できる特別なポジションを与えてくれた (株) 豊田中央研究所の役員一同に感謝する.