数論的 log scheme の圏論的表示

望月 新一 氏 (京大数理研)

(今回は「講演者が言ひたかつたことが書いてない」典型例になりさうです。)

Noetherian scheme X に対し、その上の有限型 schemes のなす圏
Sch(X) を考へると、Sch(X) の圏同値類は X の同型類を決定する;

$$\mathrm{Isom}(X,Y) = \mathrm{Isom}(\mathrm{Sch}(Y), \mathrm{Sch}(X)).$$

これと

$$\mathrm{Hom}(A,B) = \mathrm{Mor}(\mathrm{Spec}(B), \mathrm{Spec}(A))$$

(左辺は可換環の準同型の集合、右辺は局所環付き空間の射の集合)
との類似に注目したい。

これは **新しい幾何の世界への入口**である。
但し、scheme 論では上の等式により affine scheme を貼合せることが出来たが、
ここでは通常の scheme 論を安易にまねて貼合せをするのではなく、
一般の圏を、圏同値を除いて、扱ふ。
(つまり **圏 が基本的幾何的対象**。)
これを **IU 幾何** (inter-universal geometry) と呼ぶ。

圏として Sch(X) の形のものだけ考へてゐたのでは
本質的に (通常の scheme 以上に) 新しい対象は出て来ない。
新しい幾何を得るためには圏 Sch(X) を少し「狭める」必要がある。
この様な新しい幾何的対象 (圏) として、現在
次の二つのものが考へられてゐる:

(1) Loc* 型圏 (ここでは " F_1 上の Frobenius " が定義出来る。)
(2) 分布版 (これにより " F_1 上の楕円曲線の族の分類射 " が定義出来る。)

1. Loc* 型圏と Frobenius

代数体 F とそのガロア拡大 F~/F を一つ固定し、

```
         G = Gal(F~/F)

       S_F : Spec(O_F) に、全ての閉点での log 構造 と
             無限素点での Archimedes 構造 を入れたもの

  Loc_G(S_F) : S_F  の拡大であつて、G-etale 局所化 ( F~ に含まれるもの )、及び
             有限、無限素点での Zariski 局所化により得られるものたち
             のなす圏

 Loc*_G(S_F) : Loc_G(S_F)  の対象  T  上の直線束  V  のなす圏、
             射は  V  の log 構造 ( 0-section で入れる ) を保つもの
```

と定義する。

Loc* = Loc*_G(S_F) の各対象 V の section を n 乗することにより、

n 次の Frobenius 函手

    Φ_n : Loc* → Loc*

が定義出来る。
Loc* の大域的対象 V に対して、その次数 deg(V) が定義され (これは実数)、
deg(Φ_n(V)) = n deg(V) を満たす。

2. 分布版による数論的分類射

まづ複素数体上の類似を思ひ出す:
有限型 Riemann 面 S 上の楕円曲線の族 E があると、
それは分類写像 S → M を引起こす (M は楕円曲線の moduli stack).
この分類写像を得るには Hodge filtration, 即ち

    (E 上の Z^2-局所系) * O_S の rank 1 部分加群 ω_E

を作ればよい (ここで * は tensor / Z).
これの数論版を作たい。

F : 代数体
E : F 上の楕円曲線
d : 自然数
K : F に E の d-等分点を添加した体
とする。
Spec(O_K) 上の素点のうち、
E[d] の或る rank 1 部分加群が multiplicative となるやうな素点だけを取り出して「分布版」を作る。
これには二つの version

    LOC*[Δ+] と Loc*[Δ]

がある (前者は後者を "含んで" ゐる)。
前者に於いては、定義により、rank 1 部分加群 (乗法的部分加群) が大域的に存在する。
しかも、

(i) LOC*[Δ+] 上では deg, Φ, Galois 作用なども定義され、
つまり 大域的数論的 Hodge 理論が出来る。

(ii) 一方 Loc*[Δ] は F 上の普通の Loc* と同値であり、
これにより LOC*[Δ+] は普通の Loc* とつながつてゐる。

別な言ひ方をすれば、分類射 Loc* → M/F_1 が出来た！