

# Algebraic varieties governing root systems, and the Jacobians of del Pezzo surfaces

向井 茂 (Mukai, Shigeru)

平面 3 次曲線

$$C : F_3(x, y, z) = 0 \subset \mathbb{P}^2 \quad (1)$$

の Weierstrass 標準型は、定義式

$$F_3 = \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} x^i y^j z^k$$

の 4, 6 次不変式<sup>\*1</sup>  $S, T$  を用いて

$$y^2 = 4x^3 + 108S(a)x - 27T(a) \subset \mathbb{P}(1 : 2 : 3) \quad (2)$$

で与えられる ([9]). これは、斉次座標で  $(z : x : y) = (0 : 1 : 1)$  を原点とする楕円曲線で、種数 1 曲線  $C$  の Jacobian と呼ばれる。一つの場合 (§5) を例外として、del Pezzo 曲面  $S_d$  は射影平面  $\mathbb{P}^2$  を爆発 (blow up) して得られるので、反標準線形系  $|-K_S| \subset |3h|$  の元 (種数 1 曲線) の Jacobian の全体は  $(d+2)$  次元荷重射影空間  $\mathbb{P}(1^{d+1} : 2 : 3)$  内の 6 次超曲面

$$y^2 = 4x^3 + 108S(z)x - 27T(z) \quad (3)$$

をなす。この 6 次超曲面を del Pezzo 曲面  $S_d$  の簡約 Jacobian と呼び、 $\text{Jac } S_d$  で表す。また、点

$$(z_0 : \cdots : z_d : x : y) = (0^{d+1} : 1 : 1)$$

で爆発した多様体は  $\mathbb{P}_{(z)}^d$  を底空間とする楕円曲線族である。これを  $\widetilde{\text{Jac } S_d} \rightarrow \mathbb{P}^d$  で表す。ここでは、 $d \leq 6$  の場合に、 $\text{Jac } S_d$  や  $\widetilde{\text{Jac } S_d}$  の特異点解消を具体的に記述する。

---

<sup>\*1</sup>  $S(a) = 0, T(a) = 0$  は、それぞれ、 $C$  が位数 3, 4 の虚数乗法をもつことを特徴付ける。

**定理 1** ( $d \leq 6$ ) (1)  $S_d$  の簡約 Jacobian は次の  $(d+1)$  次元有理多様体<sup>\*2</sup>を特異点解消にもつ.

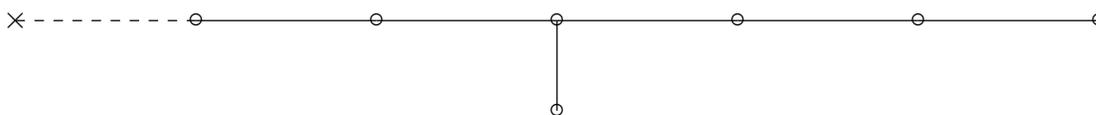
$d$	1	2	3	4	5	6
Jac $S_d$	$S_1$	$Bl_7 \mathbb{P}^3$	$Bl_6 \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$	$Bl_4 G(2, 5)'$	$Bl_4 G(2, 5)$	$Bl_2 D_3$
ルート系	$E_8$	$E_7$	$E_6$	$D_5$	$A_4$	$A_2 + A_1$

ただし、 $G(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$  は 6 次元 Grassmann 多様体で、 $G(2, 5)'$  はその特異超平面切断の小特異点解消 (注意 4)、 $D_3$  は  $\mathbb{P}(Mat_{3 \times 3} \mathbb{C}) = \mathbb{P}^8$  内の行列式 3 次超曲面  $\bar{D}_3 : \det(x_{ij}) = 0$  の特異点軌跡  $\text{Sing } \bar{D}_3 = \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  を中心とする爆発である.

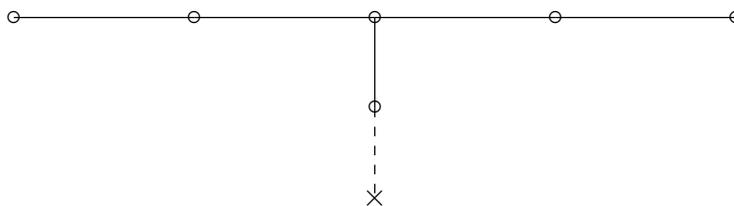
(2) Jac  $S_d$  は拡大 Dynkin 図形  $(E_{9-d}, adj)$  (Kanev[4, §4]) を統制する  $(d+1)$  次元代数多様体である.

$S_d$  とその上の直線配置は拡大 Dynkin 図形  $(E_{9-d}, std)$  を統制する (§1). 追加頂点は  $E_{9-d}$  の右端に付く. これに対して、 $(E_{9-d}, adj)$ ,  $d = 2, -6$ , の追加頂点  $\times$  は次のとおりである.

$(E_7, adj)$  は左端に付く.



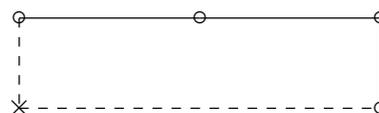
$(E_6, adj)$  は下端に付く.



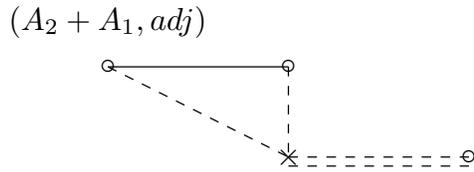
$(D_5, adj)$



$(A_4, adj)$



<sup>\*2</sup> 次数 1 の del Pezzo  $(d+1)$ -fold である.  $-K = dH$  は nef & big で  $(H^{d+1}) = 1$ .



以下では、順を追って定理の陳述の意味を説明していく。§1 から §4 においては、講演ノートに沿って、解答を見つけるための枠組・背景（主に [5]）について説明した。論理的には、これらを飛ばして §5 に繋がっている。5,6,7 次元代数多様体  $G(2,5)'$ ,  $G(2,5)$ ,  $D_3$  の爆発が新種の拡大ルート系を統制している。このような代数多様体が他にもたくさん見つかることが期待される。第 2 コホモロジー群に面白い 2 次形式の入る高次元多様体として、正則 symplectic 多様体が知られている (Beauville-Fujiki 形式)。主結果は [7] において報告された。

**■用語と規約** 代数多様体は、簡単のために、複素数体  $\mathbb{C}$  上で考える。代数多様体  $X$  の  $m$  点  $p_1, \dots, p_m$  での爆発を  $Bl_{p_1, \dots, p_m} X$  で表す。また、点の位置を示さない場合は  $Bl_m X$  と略記する。一つの頂点から長さ  $p-1, q-1, r-1$  の 3 本の足をもつ Dynkin 図式を  $T_{p,q,r}$  で表す。  $p=2, q=3$  の場合の  $T_{2,3,n-3}$  は  $E_n$  とも記す。

## 1 3 次曲面と爆発 $Bl_n \mathbb{P}^2$

非特異 3 次曲面  $S_3 \subset \mathbb{P}^3$  に対して次のことが知られている。

1. 3 次曲面  $S_3$  上には丁度 27 本の直線が存在する (Cayley, 1849 年)。
2. 27 直線の交わり具合 (Schläfli グラフ) は  $51840 (= 72 \times 6!)$  個の対称性をもっている。
3. 3 次曲面  $S_3$  は射影平面  $\mathbb{P}^2$  の 6 点爆発 (blow-up)  $Bl_6 \mathbb{P}^2$  と同型である。また、上の対称性は Cremona 変換のなす  $E_6$  型 Weyl 群  $W(E_6)$  の (モノドロミー的) 作用と一致する。

より一般に、射影平面の (一般の位置にある)  $n$  点爆発  $S = Bl_n \mathbb{P}^2$  の上の  $(-1)\mathbb{P}^1$  配置\*3 は、Cremona 変換のなす  $E_n$  型ルート系の Weyl 群  $W(E_n)$  の対称性をもつ。曲面  $S$  の第 2 コホモロジー群  $H^2(S, \mathbb{Z})$  (Picard 群と言っても同じ) の標準  $\mathbb{Z}$  基底として、

$$h, \quad e_1, \quad \dots, \quad e_n \tag{4}$$

をとる. ただし,  $h$  は  $\mathbb{P}^2$  内の直線の引戻しで,  $e_i \simeq \mathbb{P}^1$  は例外因子である. これらは交点形式

$$H^2(S, \mathbb{Z}) \times H^2(S, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

に関して直交基底をなし, 自己交点数は

$$(h^2) = 1, \quad (e_1^2) = \cdots = (e_n^2) = -1 \quad (5)$$

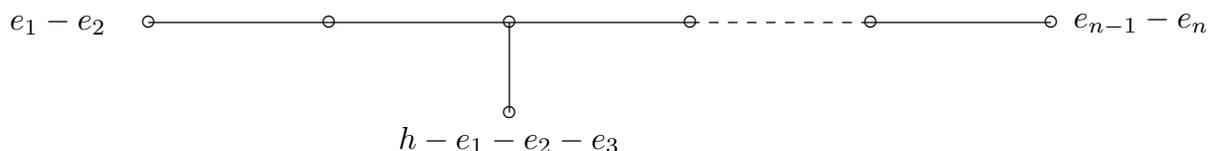
である. 反標準因子 (第 1 Chern 類) は

$$-K_S = 3h - \sum_1^n e_i \quad (6)$$

に等しい. これの直交補格子  $(-K_S)^\perp \subset H^2(S, \mathbb{Z})$  は,

$$e_1 - e_2, \quad \dots, \quad e_{n-1} - e_n, \quad h - e_1 - e_2 - e_3 \quad (7)$$

を基底にもつ. そして, この基底でもって  $E_n := T_{2,3,n-3}$  型のルート系をなす.



この基底ベクトル (simple root) による鏡映変換

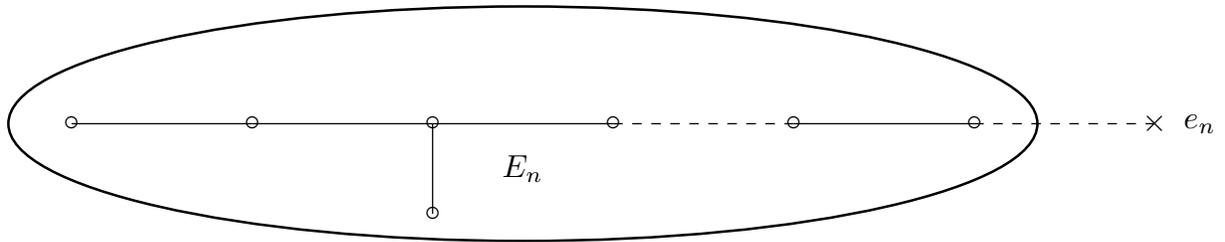
$$R_\alpha : x \mapsto x + (x, \alpha)\alpha$$

達でもって生成される群 (一般には無限) が Weyl 群  $W(E_n)$  である.  $\alpha = e_{i-1} - e_i$  のときは, 爆発の中心点の  $(i-1)$  番目と  $i$  番目の交換から誘導される. また,  $\alpha = h - e_1 - e_2 - e_3$  のものは, 爆発の中心の最初の 3 点  $p_1, p_2, p_3$  を中心とする 2 次 Cremona 変換

$$\mathbb{P}^2 \ni (x : y : z) \cdots \rightarrow (yz : zx : xy) \in \mathbb{P}^2 \quad (8)$$

から誘導される. ただし,  $\mathbb{P}^2$  の斉次座標を  $p_1, p_2, p_3$  が座標点になるようにとった. Weyl 群  $W(E_n)$  は  $S$  上の  $(-1)\mathbb{P}^1$  の全体のなす集合に置換として作用している. Dynkin 図式  $E_n$  に,  $(-1)\mathbb{P}^1$  の代表としての  $e_n$  を付加してえられる次の図式を  $(E_n, std)$  で表す.

\*3 自己交点数が  $-1$  の非特異有理曲線. 伝統的な名称は第 1 種例外直線.



(7) と追加ベクトル  $e_n$  は  $H^2(S, \mathbb{Z})$  全体の  $\mathbb{Z}$  基底をなしている.

4. (3 次曲面に戻る.)  $S_3 \subset \mathbb{P}^3$  上の直線と 6 点爆発  $Bl_6 \mathbb{P}^2$  上の  $(-1)\mathbb{P}^1$  は一対一に対応している. このおかげで、 $S_3$  上の直線  $l_1, \dots, l_{27}$  の配置に Weyl 群  $W(E_6)$  が作用する.

$$W(E_6) \curvearrowright \{l_1, \dots, l_{27}\}$$

これを線形化したもの

$$W(E_6) \curvearrowright \bigoplus_{i=1}^{27} \mathbb{C}[l_i] =: V$$

が  $E_6$  型単純 Lie 環  $\mathfrak{g}(E_6)$  の基本的既約表現の一つ

$$\mathfrak{g}(E_6) \curvearrowright V$$

に拡張する. より具体的に、 $V$  は、8 元数代数  $O$  上の 3 次 Hermite 行列のなす例外型 Jordan 代数  $H_3(O)$  であり、 $\mathfrak{g}(E_6)$  は  $H_3(O)$  の微分、すなわち、(Jordan 代数としての) 無限小自己同型全体のなす Lie 環である.

■スローガン  $Bl_n \mathbb{P}^2$  は、ルート系  $E_n$  や Weyl 群  $W(E_n)$  を統制する代数多様体である. より正確には、 $Bl_n \mathbb{P}^2$  とその上の  $(-1)\mathbb{P}^1$  配置は拡大ルート系  $(E_n, std)$  を統制する.

## 2 del Pezzo 曲面の Jacobian

代数曲面  $S$  で反標準因子  $-K_S$  が豊富なものを del Pezzo 曲面という. また、自己交点数  $d := (K_S^2) \in \mathbb{Z}_{>0}$  をその次数 (degree) と呼ぶ.  $d$  は 9 以下で、射影平面の  $n$  点爆発 (blow-up)  $S = Bl_n \mathbb{P}^2$ 、あるいは、 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  と同型である. ただし、 $n = 9 - d$  で、後者は次数  $d = 8$  である.  $d \geq 3$  のとき、 $d$  次 del Pezzo 曲面<sup>\*4</sup>は、射影的  $d$  次数代数曲面  $S_d \subset \mathbb{P}^d$  でもって、超平面切断が正規楕円 (種数 1) 曲線になるものとして特徴付けられ

る.

$$[S_d \subset \mathbb{P}^d] \cap H = [C_d \subset \mathbb{P}^{d-1}] \quad (9)$$

$d = 2$  のとき、 $S$  は非特異 4 次曲線を分岐とする  $\mathbb{P}^2$  の 2 重被覆である.

(9) より、双対射影空間を底空間とする、種数 1 曲線の族

$$C_d := \coprod_H S_d \cap H \rightarrow \mathbb{P}^{d,*}$$

がえられる.

■問題 族  $C_d$  の Jacobian (fibration) を記述せよ. すなわち、 $\mathbb{P}^{d,*}$  上の種数 1 曲線の族で、fiber が既約である限り、局所的に  $C_d$  と同型であり、かつ、大域切断をもつ

$$\widetilde{\text{Jac}} S_d \rightarrow \mathbb{P}^{d,*}$$

を記述せよ.

$S_8 = \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の反標準元  $C \in |-K_S|$  は  $(2, 2)$  次曲線

$$C : F_{2,2}(x, y) = 0 \subset \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \quad (10)$$

で、どちらかへの射影を制限することにより、4 点で分岐する 2 重被覆  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  である. このことにより、(2) と同様な形で  $C$  の Jacobian が求まる ([8], [1]). よって、del Pezzo 曲面としての  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  の Jacobian も  $\mathbb{P}(1^9 : 2 : 3)$  内の 6 次超曲面である. 以下では、 $d \leq 6$  の場合を考察する.

### 3 $T$ 型拡大図式を統制する代数多様体と $(E_7, adj)$

§1 で説明した  $E_n = T_{2,3,n}$  を統制する代数多様体を一般化する. 一般化は 2 段階ある. 第 1 段階は射影平面  $\mathbb{P}^2$  から一般次元射影空間への移行である (Dolgachev[2]).  $X$  は、 $\mathbb{P}^{m-1}$  の (一般位置にある)  $n$  点での爆発とする.  $X$  の第 2 コホモロジー群  $H^2(X, \mathbb{Z})$  の標準基底として、

$$h, \quad e_1, \quad \dots, \quad e_n \quad (11)$$

をとる. ただし、 $h$  は  $\mathbb{P}^{m-1}$  内の超平面の引戻しで、 $e_i \simeq \mathbb{P}^{m-2}$  は例外因子である. そして、曲面の場合の (5) を真似、これらが互いに直交し、自己交点数が

$$(h^2) = m - 2, \quad (e_1^2) = \dots = (e_n^2) = -1 \quad (12)$$

\*4 同様な性質をもつ射影的代数多様体  $X_d \subset \mathbb{P}^{d+n-2}$  を del Pezzo 多様体という. ただし、 $d = 2, 1$  では修正が必要.  $-K_X$  が  $(n-1)$  で割り切れる Fano 多様体とほぼ同値な概念である.

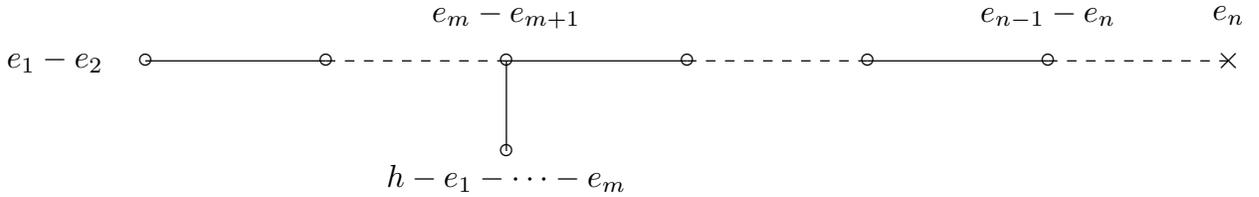
となる 2 次形式を人工的に入れる.  $X$  の反標準因子は

$$-K_X = mh - (m-2) \sum_1^n e_i \quad (13)$$

に等しい. これの直交補格子  $(-K_X)^\perp$  は、

$$e_1 - e_2, \quad \dots, \quad e_{n-1} - e_n, \quad h - e_1 - \dots - e_m \quad (14)$$

を基底にもつ. そして、この基底でもって  $T$  型のルート系  $T_{2,m,n-m}$  をなす. 法束が  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(-1)$  で  $\mathbb{P}^{m-2}$  と同型な因子\*5の代表としての  $e_n$  を右端に付加してえられる拡大ルート系を  $(T_{2,m,n-m}, std)$  で表す..



$h - e_1 - \dots - e_m$  に関する鏡映は最初の  $m$  点を中心とする標準 Cremona 変換 ((8) の高次元化)

$$\mathbb{P}^{m-1} \ni (x_1 : \dots : x_m) \cdots \rightarrow \left( \frac{1}{x_1} : \dots : \frac{1}{x_m} \right) \in \mathbb{P}^{m-1}$$

によって誘導されるものと一致する.

$(E_7, adj)$  は  $(T_{2,4,3}, std)$  に一致し、2 次 del Pezzo 曲面の簡約 Jacobian は、射影空間  $\mathbb{P}^3$  の 7 点爆発  $Bl_{q_1, \dots, q_7} \mathbb{P}^3$  であると定理 1 は主張する. この上の  $(-1)\mathbb{P}^2$  を数え上げておこう.

1.  $q_1, \dots, q_7$  上の例外因子  $e_1, \dots, e_7$
2.  $q_1, \dots, q_7$  の内の 3 点を通る平面の強変換\*6  $h - e_i - e_j - e_k$
3.  $q_1, \dots, q_7$  の内の 6 点を通りその 1 点で特異な 2 次曲面の強変換  $2h - 2e_1 - e_2 - \dots - e_6$  等々
4.  $3h - 2e_1 - 2e_2 - 2e_3 - 2e_4 - e_5 - e_6$  等々
5.  $4h - 3e_1 - 2e_2 - \dots - 2e_6$  等々

\*5 簡単のため、以下では  $(-1)\mathbb{P}^{m-2}$  と呼ぶ.

全部で

$$7 + 35 + 42 + 35 + 7 = 126$$

あるが、これは  $E_7$  のルートと一対一に対応している.

**注意 2** 人工的に見える自己交点数 (12) は、 $Bl_m \mathbb{P}^3$  の場合は自然で、 $(D_1 \cdot D_2 - K_X)/2$  と一致する.

#### 4 $T$ 型拡大図式を統制する代数多様体 (続) と $(E_6, adj)$

第 2 段階は、同じ次元の射影空間の直積に移行することである ([5]). ここでは、2 個の射影空間の直積  $\mathbb{P}^{m-1} \times \mathbb{P}^{m-1}$  を考え、これを一般の位置にある  $n$  点で爆発したものを  $X$  とする. 第 2 コホモロジー群  $H^2(X, \mathbb{Z})$  の標準基底として、

$$h_1, h_2, e_1, \dots, e_n \quad (15)$$

をとる. ただし、 $h_1, h_2$  は  $\mathbb{P}^{m-1}$  内の超平面の引戻しで、 $e_i \simeq \mathbb{P}^{2m-3}$  は例外因子である. 各  $i = 1, 2$  に対して、 $h_i, e_1, \dots, e_n$  は直交し、

$$(h_1^2) = (h_2^2) = m - 2, \quad (h_1, h_2) = m - 1, \quad (e_1^2) = \dots = (e_n^2) = -1 \quad (16)$$

となる内積を  $H^2(X, \mathbb{Z})$  に定める.  $X$  の反標準因子は

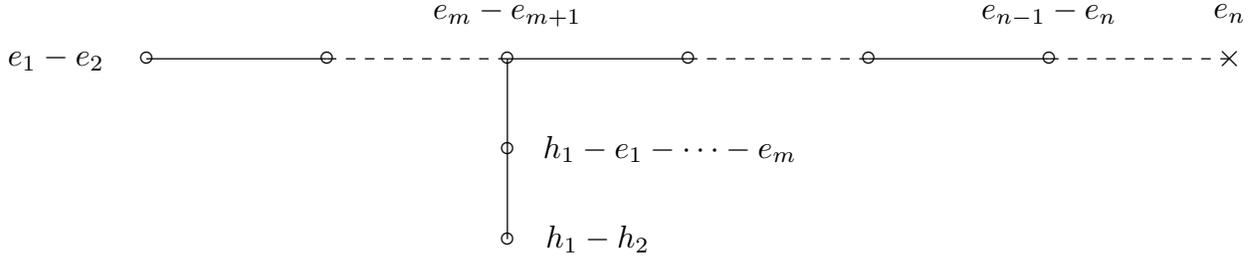
$$-K_X = m(h_1 + h_2) - (2m - 3) \sum_1^n e_i \quad (17)$$

なので、直交補格子  $(K_X)^\perp$  は、

$$e_1 - e_2, \dots, e_{n-1} - e_n, h_1 - e_1 - \dots - e_m, h_1 - h_2 \quad (18)$$

を基底にもつ. この基底でもって  $T$  型のルート系  $T_{3,m,n-m}$  をなす.  $(-1)\mathbb{P}^{2m-3}$  の代表としての  $e_n$  を右端に付加してえられる拡大ルート系を  $(T_{3,m,n-m}, std)$  で表す.

\*6  $q_1, \dots, q_7$  の 2 点を結ぶ直線の強変換による flop の後で、 $(-1)\mathbb{P}^2$  になる. 他の場合には、 $q_1, \dots, q_7$  の 6 点を通る有理 3 次曲線の強変換による flop も必要.



$(E_6, adj)$  は  $(T_{3,3,2}, std)$  に一致し、3 次曲面の簡約 Jacobian は、2 重射影空間  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  の 5 点爆発であると定理 1 は主張する. この上の  $(-1)\mathbb{P}^3$  を数え上げておこう.

1. 爆発の例外因子  $e_1, \dots, e_5$
2. 2 点を通る直線の引戻しの強変換  $h_1 - e_i - e_j, h_2 - e_i - e_j$
3.  $h_1 + h_2 - 2e_1 - e_2 - e_3 - e_4$  等々
4. 5 点を通る 2 次曲線の引戻しの強変換  $2h_1 - \sum_1^5 e_i, 2h_2 - \sum_1^5 e_i$
5.  $2h_1 + h_2 - 2e_1 - 2e_2 - 2e_3 - e_4 - e_5, h_1 + 2h_2 - 2e_1 - 2e_2 - 2e_3 - e_4 - e_5$  等々
6.  $2h_1 + 2h_2 - 3e_1 - 2e_2 - 2e_3 - 2e_4 - 2e_5$  等々

全部で

$$5 + 20 + 20 + 2 + 20 + 5 = 72$$

あるが、これは  $E_6$  のルートと一対一に対応している.

**注意 3** 人工的に見える交点数 (16) は、 $Bl_m(\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2)$  の場合は  $(D_1 \cdot D_2 \cdot (-K_X)^2)/4$  と一致する.

## 5 del Pezzo 曲面の Jacobian (続)

定理 1 の内容を説明していく.  $d, e$  次の del Pezzo 多様体の対  $(X_d, Y_e)$  で次をみたくものの存在が鍵である.

1.  $\dim X_d = e + 1, \dim X_e = d + 1$ .
2.  $X_d \subset \mathbb{P}^{d+e-1}$  と  $Y_e \subset \mathbb{P}^{d+e-1}$  は互いに射影双対.
3.  $d$  次 del Pezzo 曲面は  $X_d \subset \mathbb{P}^{d+e-1}$  を  $(e - 1)$  回超平面切断したものと同型.
4.  $X_d \subset \mathbb{P}^{d+e-1}$  を  $e$  回超平面切断してえられる楕円曲線

$$C_X = X_d \cap H_1 \cap \dots \cap H_e$$

と双対射影空間内での交差

$$C_Y = \langle [H_1], \dots, [H_e] \rangle \cap Y_e$$

は同型である.

$d$  次 del Pezzo 曲面  $S_d$  を

$$X_d \cap H_1 \cap \dots \cap H_{e-1}$$

と表し、双対射影空間内での交差

$$Y_e \cap \langle [H_1], \dots, [H_{e-1}] \rangle$$

を考える. これは、 $e$  個の点よりなる. これらを中心に爆発することにより、

$$Bl_e Y_e \rightarrow \mathbb{P}^d$$

がえられるが、4 番目の性質より、これは  $S_d$  の Jacobian である. 実際に用いる対は次のとおりである.

$d$	6	5	3	2
$X$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$	$G(5, 2) \subset \mathbb{P}^9$	$\bar{D}_3 \subset \mathbb{P}^8$	Double $\mathbb{P}^9$ with branch $\bar{D}_4$
$Y$	$\bar{D}_3 \subset \mathbb{P}^8$	$G(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$	$\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$	Veronese 3-fold $v_2(\mathbb{P}^3) \subset \mathbb{P}^9$
$e$	3	5	6	8

$d = 6$  の場合、del Pezzo 曲面は Segre 多様体を 2 回超平面切断して得られる.

$$[S_6 \subset \mathbb{P}^6] = [\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8] \cap H_1 \cap H_2$$

Segre 多様体  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$  の射影双対は行列式  $\det(x_{ij}) = 0$  で定義される 3 次超曲面  $\bar{D}_3 \subset \mathbb{P}^8$  である. これは、2 点  $[H_1], [H_2] \in \mathbb{P}^8$  を結ぶ直線  $l$  と 3 点で交わる.  $l \cap \bar{D}_3$  の 3 点が爆発  $\widetilde{\text{Jac}} S_6 \rightarrow D_3$  の中心である.

$d = 5$  の場合、del Pezzo 曲面は 6 次元 Grassmann 多様体  $G(5, 2) \subset \mathbb{P}^9$  を 4 回超平面切断して得られる.

$$[S_5 \subset \mathbb{P}^5] = [G(5, 2) \subset \mathbb{P}^9] \cap H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4 \quad (19)$$

そして、 $G(2, 5) \subset \mathbb{P}^9$  は  $G(5, 2) \subset \mathbb{P}^9$  の射影双対である. ただし、 $G(2, 5)$  は 2 次元部分空間の、 $G(5, 2)$  は 2 次元商空間の Grassmann 多様体を表す.  $H_1, \dots, H_4$  に対応する双対射影空間の 4 点  $[H_1], \dots, [H_4] \in \mathbb{P}^9$  の張る射影空間と  $G(2, 5)$  の交わりが 5 点で、爆発  $\widetilde{\text{Jac}} S_5 \rightarrow G(2, 5)$  の中心である.

$d = 4$  の場合の定理は  $d = 5$  の場合から従う。4 次 del Pezzo 曲面は 5 次 del Pezzo 曲面の 1 点爆発  $Bl_p S_5$  である。上の  $S_5$  の記述 (19) より、点  $p \in G(5, 2)$  は双対 Grassmann  $G(2, 5)$  の特異超平面切断  $\overline{G(2, 5)'}$  を定めている。また、4 点  $[H_1], \dots, [H_4] \in \mathbb{P}^9$  はこれに含まれる。爆発  $\widetilde{\text{Jac}} S_4 \rightarrow G(2, 5)'$  の中心は上の 5 点である。

**注意 4** 特異超平面切断  $\overline{G(2, 5)'}$  は Schubert 部分多様体である。射影平面に沿って特異で、二つの小特異点解消をもつ。一つは、 $\mathbb{P}^2$  上の  $\mathbb{P}^3$  束で、他は  $\mathbb{P}^1$  上の  $Q^4$  束である。

$d = 3$  の場合の爆発  $\widetilde{\text{Jac}} S \rightarrow \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2$  の中心  $q_1, \dots, q_6$  は、Segre 多様体  $\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2 \subset \mathbb{P}^8$  を 4 回超平面切断して得られる。

$$\{q_1, \dots, q_6\} = (\mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^2) \cap H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$$

ただし、 $H_1, \dots, H_4$  は、それらに対応する双対射影空間の 4 点  $[H_1], \dots, [H_4] \in \mathbb{P}^8$  の張る射影空間と行列式 3 次超曲面  $\bar{D}_3$  との交わりが  $S$  と同型になるように選ぶ。すなわち、3 次曲面の定義式の行列式表示  $S : \det A = 0 \subset \mathbb{P}^3$  ( $A$  は線形形式を成分とする 3 次正方行列) から中心の位置が定まる。

$d = 2$  の場合、del Pezzo 曲面は 4 次曲線  $C_4$  を分岐とする  $\mathbb{P}^2$  の 2 重被覆である。 $C_4$  の定義 4 次式を斉次 1 次式成分の 4 次対称行列の行列式として表す。すなわち、 $\mathbb{P}^3$  の 2 次曲面網  $\langle Q_1, Q_2, Q_3 \rangle$  の不変量とみなす。この曲面網の 8 基点  $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3 = \{q_1, \dots, q_8\}$  で  $\mathbb{P}^3$  爆発したものが  $\widetilde{\text{Jac}} S_2$  である。

del Pezzo 曲面は 7 点爆発  $S_2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  でもある。これの中心  $p_1, \dots, p_7 \in \mathbb{P}^2$  と  $q_1, \dots, q_7 \in \mathbb{P}^3$  (爆発  $\text{Jac } S_2 \rightarrow \mathbb{P}^3$  の中心) は Gale 双対の関係になっていることも興味深い。すなわち、tautological 直線束  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}}(1)$  の  $p_1, \dots, p_7$  と  $q_1, \dots, q_7$  における評価写像 (evaluation map) をそれぞれ  $P : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^7, Q : \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^7$  とするとき、

$$0 \longrightarrow \mathbb{C}^4 \xrightarrow{Q} \mathbb{C}^7 \xrightarrow{P^*} \mathbb{C}^3 \longrightarrow 0$$

は完全列である。ただし、 $\mathbb{C}^3, \mathbb{C}^4$  は  $\mathbb{P}^2, \mathbb{P}^3$  上の線形形式のなす空間である。 $p_1, \dots, p_7$  は  $q_1, \dots, q_7$  を点  $p_8$  から射影した像でもある (Goppa 双対性、Eisenbud-Popescu[3, §3])。

**注意 5**  $Bl_7 \mathbb{P}^3$  は 2 次 del Pezzo 曲面  $S_2$  上の階数 2 のベクトル束のモジュライでもあり、ある永田型不変式環の有限性生成性を示す際にこの事実が使われる ([6])。

## 参考文献

- [1] Cassels, J.W.S: *Lectures on elliptic curves*, Cambridge Univ. Press., 1991.
- [2] Dolgachev, I.: Weyl groups and Cremona transformations, in ‘*Singularities*’, Part 1 (Arcata, Calif., 1981), 283–294, Proc. Symp. Pure Math., **40**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1983.
- [3] Eisenbud, D. and Popescu, S.: The projective geometry of the Gale transform. J. Algebra, **230**(2000), 127–173.
- [4] Kanev, V.: Spectral curves, simple Lie algebras, and Prym-Tjurin varieties, Proc. Symp. Pure Math., **49**(1989), 627–645.
- [5] Mukai, S.: Geometric realization of  $T$ -shaped root systems and counterexamples to Hilbert’s fourteenth problem, *Invariant Theory*, pp. 123–129, Springer-Verlag, 2004. (RIMS preprint #1372)
- [6] —: Finite generation of the Nagata invariant rings in  $A-D-E$  cases, RIMS preprint #1502, 2005.
- [7] —: Geometric realization of  $T$ -shaped root systems and the Jacobians of del Pezzo surfaces, in ‘*Complex geometry in Osaka in honour of Professor Akira Fujiki on the occasion of his 60th birthday*’, Osaka Math. Publ., Osaka Univ., 2008.
- [8] Weil, A.: Remarques sur un memoire d’Hermite, Arch. d. Math, **5**(1954), 197–202.
- [9] —: Commentaire, [1954a], *Collected papers*, Vol. II, Springer Verlag, 1979.

京都大学数理解析研究所

Morningside Center of Mathematics, Beijing

e-mail : mukai@kurims.kyoto-u.ac.jp