s ˇ fi ´ ˘ o L ‰

| i c ^ s ˇ fi ´ ˘ » Œ ° » ´ ¢ ˜ |

¸(MUKAI, Shigeru) * s w ˝ ⁄

@ ª Q ‟ i L ˇ j ‰ fi ´ ` p • Ø ˘ « C » s ˇ fi ´ ‟ L ¶ ‹ ' ˘ ¢ ⁄ Ł q x g { 14 Ł original Hilbert's 14th problem[1] j ˘ ¢ ⁄ D i ¢[N1] Ø ‰ Æ ¨ ~ A – Ł ˝ L ¶ ‹ ¨ Ø ‰ ˙ ¢ Ø ß ' ` ˜ ¢ Ø D – – ¯ ´[N1] ¯ l ƒ Œ ‰ « P unipotent j p ¸ ˜ – ß ¯ Œ ‰ ° æ • Ø D

1 i c ^ p i] ‡ ‡ j

1 ‡ ` @ Q $\mathbf{G}_a$ ‟ k ª[2] 2 ˇ ‰ fi $k[x, y]$

$$x \mapsto x,\ y \mapsto y + tx, \quad t \in \mathbf{G}_a$$

¯ ` ˜ p • Ø D – Œ $n$ ´ $k$ ª j e \ ˇ ¯ ` ˜ n ‡ ` @ Q $2n$ ˇ ‰ fi ´ « P p

$$(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbf{G}_a^n \curvearrowright k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n] =: S$$

$$\begin{cases} x_i \mapsto x_i \\ y_i \mapsto y_i + t_i x_i \end{cases}, \quad 1 \le i \le n$$

*Supported in part by the JSPS Grant-in-Aid for Exploratory Research 14204001.

[1] [N1] ¶ D

[2] – ¯ ˝ ¨ P ‰ k ˝ ¡ f ˘ • Ø D

" Œ Ø D – p Œ ° s ł " ` @ QG § ‰
i c ^ p ˘ ˜ D s ˇ fi S^G " Œ ° ˝ L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ – ˘ ƒ
‰1958 N L O Ł I ¨ _ ¶[N1] " Œ A b „ ¯ Ø D – – ¯ ˝
$G \subset \mathbf{G}_a^n$] ł $= n - s$ 3 Œ " l @ ł Œ ˜ ¢ Ø D s ˇ fi
´ Ø ¸ p I ¨ " ´ C » Œ ˘ ¸ e ‰ ° n _ › W
" † Œ ˜ ¢ Ø D 16 ¨ ª ‰ ß ˘ « » " ´ " L ¶ ‹
¯ ¨ ¢ – ˘ C » ˜ C » – ˘ Ł s ˇ fi ´ ' L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ –
˘ " ƒ ł Œ ˜ ¢ Ø D – " ´ ˝ ' R A [x Q$\mathbf{Z} \oplus \mathbf{Z}$ ¯ t fl
Œ ˜ ¢ Ø " C » Œ " … Q ˘ ˜ L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ – ˘ " | C g ¯
Ø D
ł ˜ C M [M1] ¤ ¢ $\tilde{r} = 3, n = 9$ Œ s ˇ fi ´ " L ¶
‹ ¯ ¨ ¢ – ˘ ƒ • – ˘ " ¯ « A – Œ " – ß ° { i I Ł g
_ @ ˘ ¨ ` ‰ D – Œ • ˝ ¸ e ‰ ° 9 _ › ˘ ¸ • Ø – ˘
¯ Ø Painlevé ß fi $K3$ ¨ ° ¢ ° æ ¨ w " –
W ` ˜ ¢ Ø – ˘ ⁄ Œ ¢ D
¸ e ‰ ° ª 9 $p_1, \ldots, p_9 \in \mathbf{P}^2$ ¸ ˜ ˝ » Œ ° Ø ¨
$C \subset \mathbf{P}^2$ " ¶ • Ø ¯ ª ¸ p I ¨ " ´ ˝ L ¶ ‹ ¨ ` ˜
⁄ D ` [N1] _ @ ˝ » ¯ ˝ K p ¯ « ¨ ¢ D ' C R
¨ ¶ ˝ b æ ˜ › Œ Ø D , Q _ " Œ ° °
u Ø – ˘ ŁC ˝ Œ I ¯ Ł C ' ´ C æ ` ¯ Ø D ‰ C
C @ ' 9 _ • ˘ ˜ Œ Ø 0 q $\delta := C|_C - \sum_{i=1}^{9} p_i$
˝ ‰ • D
$\delta \in \mathrm{Pic}^0 C$ ˝ ‰ { ˜ 0 ' fl l ¨ ¨ ¢ D
– « ¿ Ł A x ˘ ¢ ⁄ [3] - ` $\mathbf{Z}_{\geq 0}$ t « ´ ˘ ‰ ˘ « C
ł ´ s ˇ fi i x P j " ¶ ‹ ł ˘ ˜ K v ¨ – ˘ " ' Ø D

[3] $x_1, \ldots, x_n$ • Ø ' $y_1, \ldots, y_n$ • Ø $s - 1$ { – ¢ ‰ x ˘ ¢ ⁄ D

2 æ L ¶ ‹ « i V _ j

i c ^ s ˇ fi S^G ' ″ « ¨ ' R A [x $\mathbb{Z}^{n+1}$ - t fl Œ ˜ ¢ Ø Ð [4] p I ¨ ‟ [5] • Ø ˇ ¢ [N1] ß @ ' £ Œ ˜ t ´ ˇ ˜ $\operatorname{Supp} S^G \subset \mathbf{Z}^{n+1}$ ‰ [M3] - Ø D fl ` @ $\mathbb{Q}^G$] ŧ Œ ° ¯ l ƒ ‰ D

Ł **1** s fl $1/2 + 1/r + 1/s \leq 1$ ‟ ‹ Ł § ´ ¨ i c ^ s ˇ fi ´ ″ L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ D

$r = 3, n = 9$ Œ ˇ Ću ¸ e ‰ ° 9 _ i Œ ° ° u j ¯ › ˜ Œ Ø ¨ X ª ″ ŧ ´ P Æ O ¨ ‟ Ø ¯ s ˇ fi ´ ″ L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ v ˇ ¢ ⁄ ‟ Ł e ¯ Ø D Ł ¯ ″ – Œ W Cremona ˇ •

$$\mathbf{P}^{r-1} \cdots \to \mathbf{P}^{r-1}, \quad (x_1 : x_2 : \cdots : x_r) \mapsto (\frac{1}{x_1} : \frac{1}{x_2} : \cdots : \frac{1}{x_r})$$

t ¯ Œ ° » ˜ ¢ Ø D – Œ ″ O g ⁄ _ @ Ł › ″ ¯ Ø D C ″ ŧ ´ P Æ O ¨ ‟ Ø ‰ [‟ ¯ ″ Ø ‟ A K v ¯ ″ ¨ ¢ D › S ‟ Q { R ¨ _ ¨ ` ˜ ¢ Ø Œ l ƒ ⁄ D – ˇ ∂ ″ ° ¯ Ø D › m Œ ˜ ¢ Ø ⁄ ¨ $X$ ″ ¸ e … ª ¨ ~ ¨ ° ¯ Ø D Q { R ¨ ‟ [ ‟ Œ ° ¨ » Mordell-Weil Q ″ ŧ i ¯ Œ ° $\mathbf{Z}^8$ jD ` ˜ A ' ¨ fl ^ Q $\operatorname{Aut} X$ ŧ ¯ A ŧ ´ P Æ O ¨ ‟ ¶ • Ø D ‰ A L ª I ´ ª ¯ { 14 Ł ‰ Æ Ø ″ ¯ ″ _ ‟ C ŧ ´ P Æ O ¨ ″ W W ¨ › ¶ • Ø ¯ – ¿ ß @ ¯ ″ Ø – ˇ ‟ ¯ « Ø D

[N1] ¯ 13 ŧ ` @ Q [M3] ¯ 6 ŧ ` @ Q s ˇ fi ´ ¯ L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ ‟ Œ Ø ‟ C Œ ° ‰ ¤ ' ¯ C – Ł

[4] $i = 1, \ldots, n$ ¸ • Ø x_i, y_i • Ø j ˇ $x_1, \ldots, x_n$ • Ø D

[5] $1 \leq i \leq n$ ¨ ¢ Ł o ‰ D

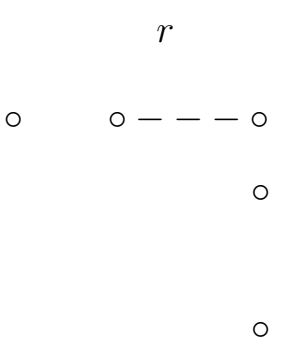
$\mathbf{G}_a^3$ s ˇ fi ´ ¯ L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ ” ƒ Œ $(r = 6, n = 9)$ D » _ ¯ ″ A – Œ ″ { 14 Ł ¸ • Ø ‰ Æ ˘ ˜ ″ ¯ ‹ ¯ Ø D • ¨ ¿ C ″ fl ˜ ¢ ¨ ¢ D

Ł @ Q ♯ ` @ $\mathbf{G}_a^2$ i L ˇ j ‰ fi ´ ` p s ˇ fi ´ ″ L ¶ ‹ ' H

– – ¯ [M2] } ‰ ¯ » ¿ Q l ♯ Œ ‰ ¢ D ¨ ″ C » ª i W ´ ¢ ˜ q Ø D

3 i c ^ p Œ ° »

• ♯ q, r, s R { Dynkin } `



$T_{q,r,s}$ ¯ \ • D – Œ Weyl Q ” ♯ Q ¨ Ø ″

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leq 1$$

¯ Ø – ˘ ″ › m Œ ˜ ¢ Ø $q = 2$ Œ – ” Ł 1 L ł g Œ Ø ” $q = 2$ ˘ ″ ¨ ¢ Œ ° R { Dynkin } ` ˘ s ˇ fi ´ W ” C ¨ Ø D ″ O ˘ ¨ P $2n$ ˇ ‰ fi ´ i c ^ p i ” ` @ $G_i \subset \mathbf{G}_a^n$ ″ S š ♯ j $q-1$ ´ ˘ ` ˜ « ˜ » Œ $k[x_1, \ldots, x_n]$ ª e \ ˇ ˘ ` ‰ $T_{q,r,s}$ ¯ § ♯ Œ Ø $(q-1)s$ ♯ ` @ Q n ˇ ‰ fi ´ p • Ø D

Ł **2 ([M4])** s fi " ‹ Ł § ´ ¨ i c ^ p e \ ˇ s ˇ fi ´ ″ L ¶ ‹ ¯ ¨ ¢ D

@ – Œ ″ › ¯ " ` @ Q ł ƒ ˜ e \ ˇ ˇ ` ‰ Œ ¯ C » ⁄ ¯ ¨ ¢ Œ s ˇ fi ´ i æ j L ¶ ‹ « ″ ¢ ¯ Ø D

4 L ¶ ‹ «

Ł 1 t " ‹ § • Ø D

Ł **3** $1/2+1/r+1/s>1$ ¨ i c ^ s ˇ fi ´ ″ L ¶ ‹ ¯ Ø D

s fi ŁL, s · ¿ ' 3 ¨ ″ ¯ Ø Ð$=1$ Œ s ˇ fi ´ ″ $n+1$ ˇ ‰ fi ´ ¯ Ø D ‰ Æ$=2$ Œ $2n$ ´ s ˇ fi ¯ ¶ ‹ ł Œ Ø D – Œ ″ · ¿ e ' Ø Ð$=3$ ″ i ¢[N1] ¯ l ƒ Œ ‰ Œ ¯ C s ˇ fi ´ ″ ¸ e ‰ $\mathbf{P}^2$ Œ ° ° u Øn _ ¯ › ‰ ¨ X S W ´

$$TC(X) = \bigoplus_{L\in \operatorname{Pic} X} H^0(X,L) \simeq \bigoplus_{a,b_1,\dots,b_n\in \mathbf{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(ah-b_1e_1-\cdots-b_ne_n))$$

ˇ fl ^ ¯ Ø D Ł ... Ł Ł$n \le 8$ ¨ X ´del Pezzo ¨ [6] ¯ Ø DX ª P Æ O ¨ ″ L ´ ¯ Ø " C – Œ ˇ ‰ W q $-K_X$ $n=8$ Œ K v j ¯ ` ˜effective q ... Œ Eff X[7] " ¶ ‹ ł Œ Ø D ‰ Œ ef q ″ _ ‰ ¨ ¢ Ð$=8$ ˇ « $-K_X$ ″ – Œ B Œ Æ O ¯ Ø " C – Œ ¯ $-2K_X$ ″ _ ‰ ¨ ¢ D – Œ – ˇ Ł S W $TC(X)$ ″ L ¶ ‹ ¯ Ø D] ł " Œ ° Œ i c ^ s ˇ fi ´ $r-1$ ł ¸ e n _ X S W ´ ˇ fl ^ ¯ Ø D ' ≥ 4 Œ ″] ł P ¢ ¶ ¨ ¢X o L ˇ • flip flop " T ^ Æ j ¶ " b ¡ G • Ø D

[6] ‰ W q$-K_X$ " L x ¨ ¨ ° D
[7] S W $TC(X)$ ¯ Ø D

ł ~ A = 1 Œ C s ˇ fi ´ Grassmann ‰ l $G(2, n+1)$ ~ W ´ ˇ fl ^ ¯ Ø D = 2 Œ C _ t Riemann ° ª WZW ´ ' u b N L Lie ´ $\acute{s}l(2)$ j S ˇ fl ^ ¯ Ø D ª ‰ I ´ ˇ Ø _ t ¸ e … $(\mathbf{P}^1; p_1, \ldots, p_n)$ ª œ ¤ I x N g ' W C S W ´ ˇ fl ^ ¯ Ø D Mehta-Seshadri Bauer[B] ° Ł A » Œ " L ¶ ‹ ¯ Ø – ˇ " ' Ø D = 3 Œ ˝ ¸ e ‰ ° $\mathbf{P}^2$ n _ F ª K ¨ x N g ' W C S W ´ ˇ fl ^ ¯ Ø D Ł R Œ ˝ … Ł $n \leq 8$ ¨ ¯ ¨ F del Pezzo ¯ Ø D – Œ Ł W C i ¡ Ø j effective q … Q nef q l q " › ' Ł C S W ´ L ¶ ‹ « ƒ • – ˇ " ¯ « Ø D

5 Sylvester ^ p

@ ` @ Q p ° Æ ˇ Sylvester ^ " Ø D ˇ m ~ ‰ f $f(x, y)$ ň ~ ‰ f $g(x, y)$ ¸ S ¨ • $(n+m+2)$ ł x N g $(n-m)$ ~ ‰ f $h(x, y)$ S ¨ • x N g "

$$f \mapsto f, \quad g \mapsto g + hf$$

¯ ` ~ p • Ø D ‰ Œ C $m$ ˇ ‰ D – Œ Ł $(n-m+1)$ ł ` @ Q G $(n+m+2)$ ˇ ‰ fi S p • Ø D œ ¤ I x N g ' • Ø Bauer ° Ł ¸ • Ø Thaddeus[T] ° u « • ƒ Ø – ˇ Ł C • $n - m = 1$ Œ Sylvester ^ s ˇ fi S^G L ¶ ‹ « ƒ • – ˇ " ¯ « Ø i E ¿ 2002 N j D ¯ C ¡ ˝ • " Œ ° Œ s ˇ fi ´ L ¶ ‹ « ~ ¢ Ø i œ { w N Œ ° u 2003 N t A w j D

Ł 8 ˇ ¨ ª Sylvester ^ p ¸ ~ s ˇ fi ´ L ¶ ‹ « † D

Q l ¶ £

[B] Bauer, S.: Parabolic bundles, elliptic surfaces and $SU(2)$-representation spaces of genus zero Fuchsian groups, Math. Ann. **290**(1991), 509-526.

[M1] @ ¸ F W C _ P C g X 1998 N D

[M2] ——: On Nagata's example of an infinitely generated ring of invariants, 46 æ ª w V | W E æ W A ª w 2001 Ņpp. 140–151 D

[M3] Mukai, S.: Counterexample to Hilbert's fourteenth problem for the 3-dimensional additive group, RIMS preprint, **1343**(2001).

[M4] ——: Geometric realization of T-shaped root systems and counterexamples to Hilbert's fourteenth problem, RIMS preprint, **1372**(2002).

[N1] Nagata, M.: On the fourteenth problem of Hilbert, Int'l Cong. Math., Edingburgh, 1958.

[N2] ——: On rational surfaces, II, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A, **33**(1960), 271–293.

[T] Thaddeus, M.: Stable pairs, linear systems and the Verlinde formula, Invent. Math. **117**(1994), 317-353.

i M e-mail A h X Emukai@kurims.kyoto-u.ac.jp j