

代数多様体と対称性

§1 K3曲面と M_{24}

§2 Enriques 曲面と M_{12}

§3 有限群から無限群へ

§4 Kummer 曲面の自己同型群

§5 Reid 曲面 mod p と M_{22} グラフ

K3 曲面とその仲間達を中心に

3/16/21 (火)

mini-history 1

Witt (30%)

Mathieu 群 M_{24} の起源

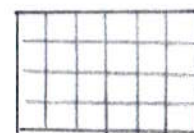
$S(4, 8, 24)$

$\mathcal{B} \subset \mathcal{P}_8(\Omega)$

Witt (1958)

K3 の命名

Kummer-Kähler 小平



の 2 目 = Ω

$$|\mathcal{B}| = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 754$$

§1 K3 曲面と M_{24}

コンパクト複素解析曲面 X

$K3 \iff \exists$ 正則 symplectic 形式, 常連結

$$\omega_X \sim f(z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$$

[13] $(4) \subset \mathbb{P}^3, (2)_0(3) \subset \mathbb{P}^4, (2)_0(2)_0(1) \subset \mathbb{P}^5, \dots$

[13] $\cap$ [13] Fermat 4-2 曲面, Reid 対称 6-2 曲面

$$X: x^4 + y^4 + z^4 + d^4 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{(x:y:z:d)}$$

$$Rd: \sum_1^6 x_i = \sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = 0$$

K3曲面とその仲間達と中心として

mini-history 1

Witt (30年代)

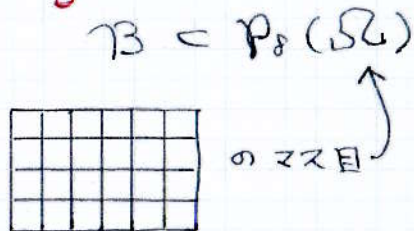
Mathieu 群 M_{24} の確定

$$S(\overset{5}{4}, 8, 24)$$

Weil (1958)

K3 の命名

Kummer-Kähler-小平



$$|B| = \frac{24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21 \cdot 20}{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4} = 759$$

(Euler 数 = 24)

§1 K3曲面と M_{24}

$\mathbb{C}$ -1次元複素解析曲面 X

$K3 \iff$ 正則 symplectic 型式, 零連結

$$\omega_X \sim \int (z_1, z_2) dz_1 \wedge dz_2$$

例 (4) $\subset \mathbb{P}^3$, (2), (3) $\subset \mathbb{P}^4$, (2), (2), (2) $\subset \mathbb{P}^5, \dots$

例・例 Fermat 4次曲面, Reid 対称6次曲面

$$X: x^4 + y^4 + z^4 + t^4 = 0 \subset \mathbb{P}^3_{(x,y,z:t)}$$

$$Rd: \sum_{i=1}^6 x_i = \sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = 0$$

定理 (M.88) 有限群 G に対しては同値

(1) G は symplectic ($G^* \omega = \omega$) にある K3 曲面に作用できる。

(2) G は $M_{24} = \{g \in \mathcal{G}_{24} \mid gB = B\}$ に

1) 共通固定点 ± 5 , 2) 軌道の位数 ≥ 5 とするものが埋め込める。

(3) 上の11個の群のうち9の部分群と同型。

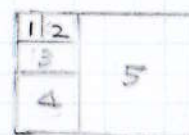
	$L_2(7)$	V_6	G_5	M_{24}	F_{360}	H_{192}	$\dots$	M_{72}	T_{48}
位数	168	360	120	960					
構造		単純		$2^4 V_6$				可解	

例 Fermat 4次曲面

$$(1) \text{Aut}(X \subset \mathbb{P}^3) = \{ [i^a, i^b, i^c, 1] \}. \mathcal{G}_4$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} \text{symplectic} \\ i^a + b + c = \text{sgn } a \end{matrix} \quad G = F_{384} = C_4^2 \cdot \mathcal{G}_4$$

$$(2) \{g \in M_{24} \mid g[i] = [i], i=1, \dots, 5\}$$



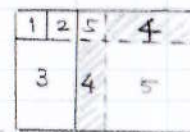
$$\cong F_{384} \text{ (5番目の群)}$$

$$① \cup ② \cup ③ \cup ④ \in \mathcal{B} \text{ に注意}$$

例 Reid 6次

$$\text{Aut}(Rd \subset \mathbb{P}^4) = \mathcal{G}_6 \supset V_6$$

$$① \cup ② \cup ③, ① \cup ② \cup ④ \in \mathcal{B} \text{ symplectic}$$



§2 Enriques 曲面と M_{12}

代数曲面に関する Noether の問題

$$P_8 = q = 0 \Rightarrow \text{有理的?}$$

Castelnuovo の答 (1896) $P_2 = q = 0 \Rightarrow$ 有理的
Enriques の反例 (6-曲面が有名)

例の例

$$\bar{S}: xyz + (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{t^2} \right) = 0$$

4-面は $xyz + t = 0$ の 6-辺に沿って特異

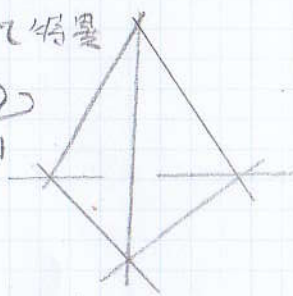
正規化 $S \rightarrow \bar{S}$, $H_{1,92}$ (右側)

幾何的理解 (①上) $K3$ 作用

$$S = X/\varepsilon$$

$K3$ 対象

$$\text{Fix } \varepsilon = \emptyset$$



semi-symplectic 型式

$$\omega_S \sim f(r_1, r_2)(dr_1 \wedge dr_2)^{\otimes 2}$$

G 作用が semi-symplectic $\Leftrightarrow G^* \omega = \omega$

$\Leftrightarrow K3$ 複素多様体 X への特異点の symplectic

$$\text{Aut } S = \text{Cent}_{\text{Aut } X}(\varepsilon) / \langle \varepsilon \rangle$$

$$\text{Aut}^{\text{ss}} S = \frac{\text{Aut } X}{\text{Aut } X}$$

問題 115個の極大群はどれが Enriques 作用可か?

13

$5\frac{1}{6}$ 定理 (M. Ohashi) は同値.

(1) G はある Enriques 曲面に semi-symp. に作用する.

(2) 次のどれかの部分群と同型.

~~V_{12}~~ ~~V_6~~ ~~G_5~~ ~~M_{20}~~ ~~F_{304}~~ ~~$V_{4,4}$~~ ~~V_{12}~~ ~~$H_{1,92}$~~ ~~V_{12}~~ ~~V_{12}~~

但し, $M_{20} = 2^4 V_5$ は指数 6 の部分群で置換える.

部分群

$$A, B \in \mathcal{P}(\Omega) = \mathbb{P}_2^{\oplus 24} \supset \langle \mathcal{B} \rangle =: \text{Gal}$$

$$A \cup B \setminus A \cap B$$

でもって N かつ L を

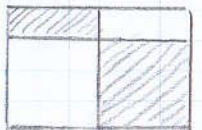
重み	0	8	12	16	24	計
個数	1	759	2576	759	1	2^{12}

semi-symplectic 作用 $G \curvearrowright S$ が M-A.A.

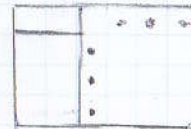
def 対応する $G \curvearrowright \Omega$ はある dodecad (Gal_{12} の元) ε と同型になる. (小 Mathieu 群 M_{12} 以上)

M-A.A. 定理

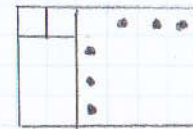
$$M-A.A. \text{ に作用可} \Leftrightarrow \begin{cases} G \subset G_6 \subset M_{12} \\ 2^4 \nmid |G| \end{cases}$$



dodecad (24) の例



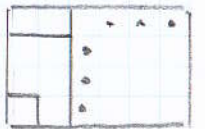
$$|G_6| = 2^4 \cdot 45$$



V_6



V_{12}



G_5

この3つの群が M-A.A. に作用

3-Sylow の正規化群

3 §4 有限群から無限離散群へ

驚き! V_6 と V_{72} の作用する Enriques 曲面は同じ

$$V_6, V_{72} \subset \text{Aut}^{\text{ss}}(S)$$

$$X = \begin{cases} x^2 - 2yz = u^2 - \mu vw \\ y^2 - 2zx = v^2 - \mu wu \\ z^2 - 2xy = w^2 - \mu uv \end{cases} \subset \mathbb{P}^5_{(xyzuvw)} \\ \lambda, \mu = 1 \pm \sqrt{3}$$

$$S = X / [111-1-1-1] \quad \text{"Hesse-Godeaux"}$$

この表より見ると $3^2 C_4 = V_6 \cap V_{72}$. 2通りに分解する.

定理 (M.O.) $\text{Aut}^{\text{ss}} S = V_6 *_{3^2 C_4} V_{72}$ (相対)
アマルガム (高次元群)

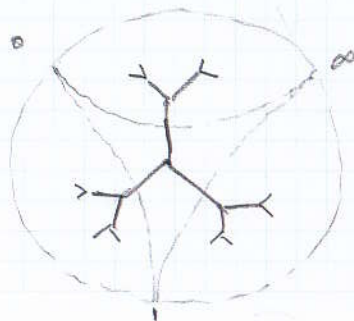
証明は $SL(3, \mathbb{Z}) = C_4 *_{C_2} C_6$ を要する.

格子

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \\ -2 \end{matrix}$$

$$U + \langle -2 \rangle$$

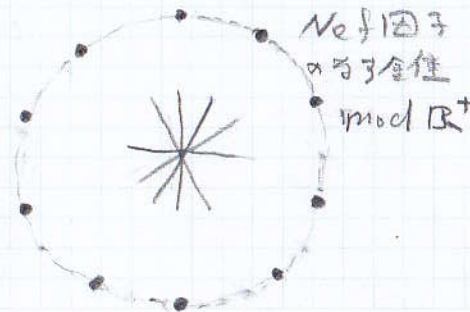
非Euclid 平面
3価樹木



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} | \\ \text{mod } E_8 \end{matrix}$$

$$U + (\text{mod } E_8) = H^2(S, \mathbb{Z}) / C_2$$

9次元空間
10価樹木



Val因子
の存在性
mod $\mathbb{R}^+$

5

樹木の頂点集合の Voronoi 胞体の分割

$SL(2, \mathbb{Z}) \curvearrowright$ 3価樹木 $\text{Aut } S \curvearrowright$ 10価樹木

orbifold
商

$$i \xrightarrow{C_2} w \\ 0 \xrightarrow{C_4} 0 \\ C_4 \quad C_6$$

$$[t_{10}] \xrightarrow{[t_{10}]} [t_{10}] \\ 0 \xrightarrow{3^2 C_4} 0 \\ V_6 \quad V_{72}$$

実質自由性 $\text{Ker} [SL(2, \mathbb{Z}) \rightarrow 2.G_3]$

$$\cong F_2 = \pi_1(\text{Riemann Foli} \setminus \{0, 1, \infty\})$$

$$\text{Ker} [\text{Aut}^{\text{ss}} S \rightarrow G_6]$$

$$\cong F_9 = \pi_1(\text{Riemann Foli} \setminus \{10 \text{ 点}\})$$

問題 $\text{Aut } S$ が実質自由な Enriques 曲面を分類せよ. (v.c.d. = 1)

(参) 常に $v.c.d.(\text{Aut } S) \leq 8$

$v.c.d. = 0$ (有限群) は Kondo (1986) が分類

mini-history 2 (Kummer サイト)

Fresnel (1822) 光の波曲面

16 特異点を持つ 4-2 曲面

Hamilton (1833) 4本の rope (2重2次曲線)

Göpel (1847), Cayley (1848)

Kummer (1864) 3パラメータ族, 一般型

Klein の問題 (1885) 双有理自己同型群を求めよ

Kondo (1998) 解決

証明

$X = K_m C$ の Picard 格子を拡大 Leech に (等長格子に) 埋込んで, Conway の Leech ilt, Borcherds 理論 (1984) を適用.

$$\text{Pic}(K_m C) \hookrightarrow U + (\text{原 Leech})$$

符号数 $(1, 16) \quad (1, 25)$

$$16 + 16 = 32 \text{ 本の } (-2)D^1 \longrightarrow 32 \text{ 個の Leech ilt}$$

(以下証明略)

Borcherds (1998) の読み

$$\text{Aut}(K_m C) = (W, 2^5) * C_2^{*5}$$

?

但し, W は $(16+16+60)$ の対称性を持つ群.

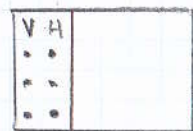
$$M. (\text{最近}) \text{ "Aut}(K_m C) = W. \langle 192 \text{ Weber}, 2^5 \rangle"$$

(参) HS グラフの頂点分解, あるいは M_{22} の構成

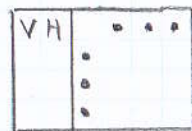
$$\textcircled{1} \text{---} \textcircled{22} \text{---} \textcircled{77} \quad 77 = \frac{22 \cdot 21 \cdot 20}{6 \cdot 5 \cdot 4}$$

に付随する "77" は M_{22} グラフ $\left(\begin{smallmatrix} S & S' \\ 0 & 0 \end{smallmatrix} \right) \iff S \cap S' = \emptyset$ def.

$U_6 \subset M_{22}$ の作用で 3 軌道

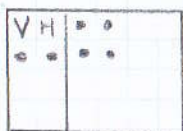


+



16 tropes

etc.



60 Gopel

etc.

$n = (440^{22})$, 16 特異点 は $[00], \dots, [33]$.

§ 6 Reid 曲面 mod 3, 5 と M_{22} グラフ

$$Rd: \sum_i x_i = \sum_{i < j} x_i x_j = \sum_{i < j < k} x_i x_j x_k = 0$$

$\subset \mathbb{P}_{(n)}^5$

$$Rd \text{ mod } p \quad p \neq 2, 3, 5 \Rightarrow \text{非特異}$$

$$p = 2, 3, 5 \Rightarrow \text{特異だが有理2重点のみ}$$

非特異化 Rd_p は $\mathbb{F}_p$ 上の $K3$ 曲面

mod 3

特異点 $(111-1-1-1)$
等の 10 点で A_2
他 15 本の conic

mod 5

(011111) 等
の 6 点で A_1
36 直線
(Sylvester 配置)

Rd_p の
基本 D 配置 20 + 15 = 35 本
4 面体グラフ

$$20 + 15 = 35 \text{ 本}$$

$$\begin{pmatrix} [7] \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$6 + 36 = 42 \text{ 本}$$

無名グラフ

M_{22} グラフ
の 2 分割

$$4 \text{ G } \textcircled{35} \text{---}^{12} \text{---}^{10} \textcircled{42} \text{ } 2 \text{ G}$$

定理 Rd_3, Rd_5 は 7 体の射影群 Ω_7 が作用 (!)

$$\text{Aut}(Rd_3) = \langle \sigma_4, \sigma_7, \sigma_7 \rangle$$

$$\text{Aut}(Rd_5) = \langle \sigma_3, \sigma_7, \sigma_8, \sigma_{12}, \sigma_{15}, \sigma_7 \rangle$$

$$\text{Aut}(Rd_2) \cong (G_6.2) * {}_{3^2}C_4 \cdot 3^2 D_8$$

$O_2(1, 20)$ の 非特異部分と一致 (Borcherds 理論)

まとめ

- ① Gorenstein 環や Mathieu 群は $K3$ とよく知っている。
- ② Leech 格子や Conway 群は も、よく知っている。ただし、 $K3$ と選り好みする。
- ③ 頂点作用素代数 V^g や モースター群は ……

111

話せなかったこと、まだ出てきたこと、…

112

- ・ $K3$ 曲面上のベクトル束のモジュライ
高次元正則 symplectic 多様体
今日の話の高次元版？
- ・ 3次元 Fano 多様体、特に、
種数 12 の V_{22} 。
Debarre-Voisin 多様体を介して
 M_{22} と関係？

テーマと文献

主題： $K3$ 曲面の対称性と有限単純群の（いくつかの）関係

参考にした文献

[R] Mark Ronan, Symmetry and the monster: one of the greatest quests of mathematics, 2006, Oxford Univ. Press.

（邦訳「シンメトリーとモンスター 数学の美を求めて」）

[K] E. Kummer, Über die Flächen vierten Grades mit sechzehn singulärten Punkten, Monat. d. Königl. Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1864.

（16 個の特異点をもつ 4 次曲面について）

ご清聴ありがとうございました!