1. 5月1日

アファイン接続 ∇ に対し, その torsion テンソル T と曲率テンソル R を

$$T(X,Y) \overset{\text{def.}}{=} \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y],$$
$$R(X,Y) \overset{\text{def.}}{=} \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

で定義する.

例題 1.1. T, R はテンソルである.

概複素構造 I に対し, Nijenhuis テンソル N を

$$N(X,Y) \overset{\text{def.}}{=} 2\left([IX,IY] - I[X,IY] - I[IX,Y] - [X,Y]\right)$$

で定義する.

例題 1.2. 上は, テンソルである. すなわち, $N(fX,gY) = fgN(X,Y)$ が任意の関数 f, g について成立する.

**********中略**********

補題 **1.3.** 概複素構造 I に対し ∇ は, $\nabla I = 0$ を満たす接続とする. このとき

$$T(IX,IY) - IT(IX,Y) - IT(X,IY) - T(X,Y) = -\frac{1}{2}N(X,Y)$$

が成立する.

定義 **1.4.** 多様体 M 上の **hypercomplex** 構造とは, 概複素構造の三つ組み I, J, K であって,

(1) $I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathrm{id}$,
(2) 各 I, J, K は可積分である

という条件を満たすものである.

定理 **1.5** (小畠). hypercomplex 多様体上には, torsion free なアファイン接続 ∇ で

$$\nabla I = \nabla J = \nabla K = 0 \tag{1.6}$$

を満たすものがただ一つ存在する.

証明. まず, アファイン接続 ∇ で (1.6) を満たすものを一つ取る*. 新しい接続 $\widetilde{\nabla}$ を

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \frac{1}{4}\Big[T(X,Y) - IT(X,IY) - JT(X,JY) - KT(X,KY)$$
$$+ T(IX,IY) + IT(IX,Y) - JT(IX,KY) + KT(IX,JY)\Big]$$

によって定義する. このとき, $\widetilde{\nabla}$ も(1.6) を満たす [*]. このとき, $\widetilde{\nabla}$ の torsion テンソル $T^{\widetilde{\nabla}}$ は, T を ∇ の torsion テンソルとして,

$$\begin{aligned}
T^{\widetilde{\nabla}}(X,Y) &= T(X,Y) - \frac{1}{4}\Big[2T(X,Y) \\
&\quad - IT(X,IY) + IT(Y,IX) - JT(X,JY) + JT(Y,JX) - KT(X,KY) + KT(Y,KX) \\
&\qquad\qquad + 2T(IX,IY) \\
&\quad + IT(IX,Y) - IT(IY,X) - JT(IX,KY) + JT(IY,KX) + KT(IX,JY) - KT(IY,JX)\Big] \\
&= \frac{1}{4}\Big[2T(X,Y) - 2T(IX,IY) + JT(X,JY) + JT(JX,Y) + KT(X,KY) + KT(KX,Y) \\
&\qquad\qquad - JT(IX,JIY) - JT(JIX,IY) - KT(IX,KIY) - KT(KIX,IY)\Big]
\end{aligned}$$

で与えられる. 一方, J, K の Nijenhuis テンソルを N^J, N^K とすると, 補題 1.3 により,

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{1}{2}\left\{N^J(X,Y) - N^J(IX,IY)\right\} \\
&= -T(JX,JY) + JT(JX,Y) + JT(X,JY) + T(X,Y) \\
&\qquad + T(KX,KY) - JT(JIX,IY) - JT(IX,JIY) - T(IX,IY) \\
0 &= \frac{1}{2}\left\{N^K(X,Y) - N^K(IX,IY)\right\} \\
&= -T(KX,KY) + KT(KX,Y) + KT(X,KY) + T(X,Y) \\
&\qquad + T(JX,JY) - KT(KIX,IY) - KT(IX,KIY) - T(IX,IY)
\end{aligned}$$

上の式と見比べて, $T^{\widetilde{\nabla}} = 0$ を得る. □

例題 1.7. [*] の主張と, 上の性質を満たす接続の一意性を示し, 証明を完成させよ.