2. 5月8日

2.1. **Lie群, Lie環.** $n \times n$ の可逆な実行列の全体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ や可逆な複素行列の全体 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ は群をなす. また $n \times n$ 行列の全体のなすベクトル空間 $\mathbb{R}^{n^2}$ または $\mathbb{C}^{n^2}$ の開集合であり, 特に多様体の構造を持つ. また特殊直交群 $\mathrm{SO}(n)$ やユニタリ群 $\mathrm{U}(n)$ は部分群であり, また容易にチェックできるように $\mathbb{R}^{n^2}$ または $\mathbb{C}^{n^2}$ の部分多様体になる. これらの群を G とするとき, 掛け算写像と逆行列写像

$$G \times G \to G; \quad (g_1, g_2) \mapsto g_1 g_2,$$
$$G \to G; \quad g \mapsto g^{-1}$$

は C^∞ 級である. この性質を抽象化して, 多様体と群の構造を同時にもった集合 G であって, 上の写像が C^∞ 級であるものを **Lie群**とよぶ. Lie群については一般論が展開できるが (例えば [3, 第IV章] を参照), この講義ではそれをあまり必要としない. 上の例を分かっていれば十分である.

単位元 e における G の接空間を G の **Lie環**といい, $\mathfrak{g}$ で表わす. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, $\mathrm{SO}(n)$ 等の Lie 環を対応するドイツ文字で表わすのが習慣である:

$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) = \{n \times n \text{ 実行列の全体 }\},$$
$$\mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) = \{n \times n \text{ 複素行列の全体 }\},$$
$$\mathfrak{so}(n) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{R}) \mid \xi + {}^t\xi = 0\},$$
$$\mathfrak{u}(n) = \{\xi \in \mathfrak{gl}_n(\mathbb{C}) \mid \xi + {}^t\overline{\xi} = 0\}.$$

これらの例では, 次の事実が直接チェックできる:

定理 2.1. (1) $\xi, \eta \in \mathfrak{g}$ ならば, $[\xi, \eta] \in \mathfrak{g}$ である. すなわち, $\mathfrak{g}$ は交換子 $[\ ,\ ]$ について閉じている.
(2) $\xi \in \mathfrak{g}$ であることと, すべての $t \in \mathbb{R}$ に対して $\exp(t\xi) \in G$ となることは同値である.

例題 2.2. この定理を上の例についてチェックせよ.

この定理は, $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の閉部分多様体として実現される任意の Lie 群について成立する. (例えば, [3, §12] を参照.)

Lie群 G の元 g は, G から G 自身への微分可能な写像 $x \mapsto gxg^{-1}$ を定める. この写像は単位元 e を保つので, その微分写像 $T_eG \to T_eG$ を考えることができる. すなわち Lie 環 $\mathfrak{g}$ の線型変換が定まる. これを随伴写像といい, Ad_g で表わす. 定義から $\mathrm{Ad}_{gh} = \mathrm{Ad}_g \mathrm{Ad}_h$ がなりたつ. すなわち $\mathrm{Ad}\colon G \to \mathrm{GL}(\mathfrak{g})$ は群の準同型である. さらに多様体としての C^∞ 級写像である. (一般に線型空間 V に対し, 群の準同型 $G \to \mathrm{GL}(V)$ であって, 多様体の間の写像としての微分可能写像なもののことを, Lie 群 G の V 上の表現という.) これを Lie 群 G の Lie 環 $\mathfrak{g}$ 上の随伴表現と呼ぶ. 上のように G が $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ の部分群として実現されているときには, 随伴写像は $\mathrm{Ad}_g(\xi) = g\xi g^{-1}$ で与えられる.

2.2. **Lie群の多様体への作用.** M を C^∞ 級多様体, G を Lie 群とする. G の M への作用 $G \times M \to M; (g, x) \mapsto g \cdot x$ が多様体の間の写像として C^∞ 級のとき, 微分可能な作用 (or C^∞ 級の作用) という. この講義では, 作用は断わりのないときは左からの作用を考える.

点 $x \in M$ に対し, $\{g \cdot x \mid g \in G\} \subset M$ を x を通る軌道といい, $G(x)$ で表わす. また, $\{g \in G \mid g \cdot x = x\}$ は G の部分群をなすが, これを G の x における固定部分群といい, G_x で表わす. すべての $x \in M$ について $G_x = \{e\}$ のとき, G の M への作用は自由であるという. M の部分集合 $\{x \in M \mid g \cdot x = x$ がすべての $g \in G$ について成り立つ $\}$ を M の G に関する不動点集合といい, M^G で表わす.

例 **2.3.** $G = \mathrm{SO}(n+1)$ とし, n 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ への自然な作用を考える. このとき任意の $x \in S^n$ に対し, $G(x) = S^n$ が成立する. すなわち S^n はただ一つの軌道からなる. (このような作用を推移的であるという.) $x = {}^t(0, \ldots, 0, 1)$ の固定部分群は,

$$\left\{ \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathrm{SO}(n+1) \;\middle|\; g \in \mathrm{SO}(n) \right\}$$

という部分群であり, $\mathrm{SO}(n)$ と同型である.

x を固定したとき, 作用の写像の単位元における微分

$$\mathfrak{g} = T_e G \to T_x M \tag{2.4}$$

による ξ の像を $V_\xi(x)$ で表わす. 式で表わすと,

$$V_\xi(x) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \exp(t\xi) \cdot x$$

となる. x を動かすと, M 上のベクトル場 V_ξ を定める.

命題 **2.5** ([3, §19])**.** $V_{[\xi,\eta]} = -[V_\xi, V_\eta]$ がなりたつ. ただし, 右辺は M 上のベクトル場に対する交換子である.

特に G の G 自身への右からの掛け算による作用 $G \times G \ni (g, x) \mapsto xg^{-1} \in G$ において $\xi \in \mathfrak{g}$ が G 上に定めるベクトル場を (ξ に対応する) 左不変ベクトル場という.

例題 2.6. 上にあげた Lie 群の右からの掛け算による作用について, 命題 2.5 をチェックせよ.

$x \in M$ の固定部分群 G_x は G の閉集合であるが, さらに強く閉部分多様体になることが知られている. (Lie 群 G の一般の閉部分群 H に関する性質である. 証明は [3, §18] を参照) その Lie 環 $\mathfrak{g}_x$ は(2.4) の kernel $\{\xi \in \mathfrak{g} \mid V_\xi(x) = 0\}$ である. 上の命題により, $\mathfrak{g}_x$ が交換子について閉じていることも分かる.

作用の写像の制限 $G \to M; g \mapsto g \cdot x$ は商空間 G/G_x と軌道 $G(x)$ との間の全単射 $G/G_x \ni gG_x \mapsto g \cdot x \in G(x)$ を定める. このとき, G/G_x に C^∞ 級多様体の構造が入ることが次の定理により保証される.

定理 **2.7** ([3, §14])**.** H を G の部分群であって, 閉な部分多様体になっているものとする. このとき, 商空間 G/H 上の C^∞ 級多様体の構造であって, 自然な写像 $G \times G/H \to G/H; (g, xH) \mapsto gxH$ が C^∞ 級の作用となり, 射影 $G \to G/H$ が H をファイバーとするファイバー束になり, また単位元の剰余類 $eH \in G/H$ における接空間が商ベクトル空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ と同型となるものがある.

例えば例 2.3 において, $G = \mathrm{SO}(n+1)$, $H = \mathrm{SO}(n)$ とすると, $G/H \cong S^n$ である.

例 **2.8.** $\mathbb{C}^n$ の中の r 次元複素部分空間の全体のなす集合をグラスマン多様体といい, $\mathrm{Gr}(r, n)$ で表わす. $G = \mathrm{U}(n)$ が推移的に作用し, その部分空間 $\{x = {}^t(x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0) \mid x_i \in \mathbb{C}\} \in \mathrm{Gr}(r, n)$ における固定部分群は

$$\left\{ \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & h \end{bmatrix} \in \mathrm{U}(n) \;\middle|\; g \in \mathrm{U}(r), h \in \mathrm{U}(n-r) \right\}$$

となる. これは $U(r) \times \mathrm{U}(n-r)$ と同型な閉部分群である. 特に, $\mathrm{Gr}(r, n) = \mathrm{U}(n)/U(r) \times \mathrm{U}(n-r)$ は C^∞ 級多様体であり, $\mathrm{U}(n)$ の作用は C^∞ 級である.

上の状況 $H \subset G$ において H の表現 V, すなわち群の準同型 $\rho\colon H \to \mathrm{GL}(V)$ があって, C^∞ 級多様体としての微分可能写像であるもの, が与えられたとする. このとき $G \times V$ に同値関係を

$$(g, v) \sim (g', v') \Longleftrightarrow g'^{-1}g \in H, \quad v' = \rho(g'^{-1}g)v$$

で定義し, 商空間を表現 ρ に付随したベクトル束といい, $G \times_H V$ や $G \times_\rho V$ で表わす. 自然な射影 $G \times_H V \to G/H$ により, この商空間は G/H 上のベクトル束の構造を持つ. その eH におけるファイバーは自然に V と同一視される. また, $G \times_H V$ への G の作用を

$$g \cdot [h, v] = [gh, v]$$

で定義することができる. これは微分可能であり, $G \times_H V \to G/H$ は G の作用と可換である (このような写像を同変写像という).

微分可能な作用 $G \times M \to M$ の状況に戻る. 全単射 $G/G_x \cong G(x)$ と定理 2.7 により $G(x)$ に C^∞ 級多様体の構造を入れる. x と異なる軌道内の点 y に対して G/G_y を考えても, ある $g \in G$ の右からの掛け算写像 R_g が微分同相写像 $G/G_x \to G/G_y$ を与える (証明は演習) ので, C^∞ 級多様体としては x の取り方によらない. $x \in G(x)$ における埋め込み写像 $G/G_x \cong G(x) \hookrightarrow M$ の微分は, (2.4) の誘導する写像 $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \to T_xM$ で与えられる. 特にこの写像は単射である. これから $G(x) \hookrightarrow M$ が (一般には閉とは限らない) 部分多様体となる. ただし G がコンパクト群 (例えば, $\mathrm{SO}(n)$, $\mathrm{U}(n)$) のときは, $G(x)$ は閉な部分多様体となる.

作用の微分の制限 $G_x \times T_xM \to T_xM$ は, G_x の T_xM への表現とみなすことができる. これを等方表現とよぶ. $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \to T_xM$ の像は部分表現である. 実際, $g \cdot V_\xi(x) = V_{\mathrm{Ad}_g(\xi)}(x)$ となる. この式から部分表現は, $\mathfrak{g}$ への G の随伴表現の G_x への制限を G_x の随伴表現で割った商表現と同型である. 商空間 $T_xM/(\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x)$ を N_x で表わす. 自然に G_x の表現とみなすことができる. これをスライス表現という. これらの表現に付随した $G/G_x = G(x)$ 上のベクトル束

$$G \times_{G_x} T_xM, \quad G \times_{G_x} (\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x), \quad G \times_{G_x} N_x$$

はそれぞれ, 接バンドル TM の $G(x)$ への引き戻し, $G(x)$ への接バンドル, $G(x) \hookrightarrow M$ の法バンドルとなる.

定理 2.9 (スライス定理)**.** G はコンパクトであると仮定する. このとき $G \times_{G_x} N_x$ の 0 切断の G 不変な近傍 U と, G の軌道 $G(x)$ の M 内における G 不変な管状近傍 V と, $\Phi\colon U \to V$ という G 同変な微分同相写像が存在する.

この定理は, 多様体 M の $G(x)$ の回りでの G の作用の様子が, ベクトル束の $G \times_{G_x} N_x$ の 0 切断の回りの様子というよく分かるもので記述できる, と言うことを意味している.

証明のあらすじ. (詳しくは, [1, 2] を参照.) まず G がコンパクトであることから軌道 $G(x)$ は M 内の閉集合であり, 全単射 $G/G_x \to G(x)$ は G/G_x の商位相と $G(x)$ への M からの誘導位相に関して同相写像である. 特に埋め込み写像 $G/G_x \cong G(x) \hookrightarrow M$ によって $G(x)$ は M 内の閉部分多様体である. 以後, $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_x \cong T_xG(x)$ を T_xM の部分空間と同一視しする.

Step 1. M に G の作用で不変な Riemann 計量を導入する. 実際, 勝手な Riemann 計量から出発して, G 上で平均を取れば不変な Riemann 計量になる. 特に指数写像 $\mathrm{Exp}\colon W \to M$($W$ は TM の 0 切断の近傍) は G 不変である.

Step 2. $G(x) \hookrightarrow M$ の法バンドルは, $TM|_{G(x)}$ 内での $TG(x)$ の直交補空間のバンドル $T^\perp G(x)$ と同一視される. 指数写像の制限 $\mathrm{Exp}\colon W \cap T^\perp G(x) \to M$ は G 不変である. この写像の 0 切断 (底空間 $G(x)$ と同一視される) における微分は同型であることから, ある近傍に制限すれば微分同相写像になり, これが求める Φ である. □

スライス定理の応用として重要なのが, 自由な作用に関する商空間への多様体の構造の導入である.

系 2.10. 多様体 M へのコンパクトな Lie 群 G の作用が自由であると仮定する. このとき, 商位相空間 M/G(軌道空間と呼ばれる) に自然な射影 $M \to M/G$ が C^∞ 級になるように C^∞ 級多様体の構造を入れることができる.

実際, $G_x = \{e\}$ であることに注意して, スライス定理により N_x の 0 の近傍 W, $G(x)$ の G 不変な管状近傍 V と G 同変な微分同相写像 $G \times W \to V$ が存在する. このとき $W \to V/G$ が M/G の $G(x)$ の近傍における座標と定めればよい.

References

[1] G.E. Bredon, *Introduction to compact transformation groups*, Academic Press, 1972.
[2] 川久保勝夫, 変換群論, 岩波書店, 1987.
[3] 松島与三, 多様体入門, 数学選書 **5**, 裳華房, 1965.