4. 6月5日

ここでは幾何学的不変式論を, 定義体が複素数の場合に限って簡単に紹介する. 一般の場合の幾何学的不変式論に関する参考書としては, [3, 4, 2] などがある. また, シンプレクティック幾何との関連については, [1] を参照.

$G^{\mathbb{C}}$ をコンパクト Lie 群 G の複素化とする. V を $G^{\mathbb{C}}$ の表現とし, G の作用で不変なエルミート内積を取って固定しておく. 幾何学的不変式論の一番簡単な場合として, V を $G^{\mathbb{C}}$ の作用で割った " 商" を考えよう. 集合論的な商空間 $V/G^{\mathbb{C}}$ は, 代数多様体であるどころか, 一般には Hausdorff にさえならない. そこで, 単に空間を割る代わりに, 期待すべき商空間上の関数が何かを考えるとうまく行くのである. 商空間上の関数とは, 割る前の空間の上の不変な関数に他ならない. さらに代数多様体のカテゴリーで考える上では, 関数と言ったら V 上定義された多項式のことである. そこで V の上の多項式の全体 (言い換えれば V の双対空間の対称積) のなす環 (V の座標環と呼ばれる) を $A(V)$ とし, $G^{\mathbb{C}}$ の V への作用が導く $A(V)$ への作用を考える. $A(V)$ の $G^{\mathbb{C}}$ の作用で不変なものの全体を $A(V)^{G^{\mathbb{C}}}$ で表わす. このとき, この環は有限生成であることが知られており (永田の定理), アファイン代数多様体 (一般には特異点を持つ) を定める. このアファイン代数多様体を V の $G^{\mathbb{C}}$ による (アファイン) 代数幾何的商空間といい, $V/\!\!/G^{\mathbb{C}}$ と書く. 次が知られている.

定理 4.1. (1) 包含写像 $A(V)^{G^{\mathbb{C}}} \subset A(V)$ が誘導する全射な正則写像 $\phi\colon V \to V/\!\!/G^{\mathbb{C}}$ が存在し, 二つの点 $x, y \in V$ が $\phi(x) = \phi(y)$ を満たすことは, その軌道の閉包 $\overline{G^{\mathbb{C}}x}$, $\overline{G^{\mathbb{C}}y}$ が交わること

$$\overline{G^{\mathbb{C}}x} \cap \overline{G^{\mathbb{C}}y} \neq \emptyset \tag{4.2}$$

と同値である.

(2) $V/\!\!/G^{\mathbb{C}}$ の下部構造としての位相空間は, V の閉な $G^{\mathbb{C}}$ 軌道の全体を, (4.2) が成り立つとき同値であるとして定義される同値関係によって割った商空間である.

ここでは定理 4.1 の証明は行わないが, 途中でキーとなる次の定理の証明を与えておく.

定理 4.3. W_1, W_2 を V の $G^{\mathbb{C}}$ 不変な (Zariski 位相に関する) 閉集合とする. このとき, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ であることは, $G^{\mathbb{C}}$-不変な多項式 $f \in A(V)^{G^{\mathbb{C}}}$ で $f|_{W_1} = 1$, $f|_{W_2} = 0$ となるものが存在することと同値である.

この定理は, $\overline{G^{\mathbb{C}}x} \cap \overline{G^{\mathbb{C}}y} = \emptyset$ のときに, $\overline{G^{\mathbb{C}}x}$ と $\overline{G^{\mathbb{C}}y}$ を分離できること, よって $V/\!\!/G^{\mathbb{C}}$ の異なる点を与えることを保証するものである.

証明. $G^{\mathbb{C}}$-不変な多項式 $f \in A(V)^{G^{\mathbb{C}}}$ で $f|_{W_1} = 1$, $f|_{W_2} = 0$ となるものが存在すれば, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ であることは明らか. 逆に, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$ であると仮定しよう. このとき, Hilbert の零点定理により $G^{\mathbb{C}}$-不変とは限らない多項式 f' で, $f'|_{W_1} = 1$, $f'|_{W_2} = 0$ となるものが存在する. このとき, コンパクト群 G の作用で f の平均を取り, f とする. これは $f|_{W_1} = 1$, $f|_{W_2} = 0$ を満たす. さらに, G-不変である. ところが, f は正則であるから自動的に $G^{\mathbb{C}}$-不変になる. □

References

[1] F. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1985.

[2] 向井茂, 「モジュライ理論 1, 2」, 岩波講座 現代数学の展開, 岩波書店, 1998, 2000.

[3] D. Mumford, J. Fogarty and F. Kirwan, *Geometric invariant theory*, Third Enlarged Edition, Springer-Verlag, 1994.

[4] P.E. Newstead, *Introduction to moduli problems and orbit spaces*, Tata Institute Lectures **51**, Springer-Verlag, 1978.