軌道が閉であるかどうかが, どのように決まるかを $G^{\mathbb{C}}$ が複素トーラス $(\mathbb{C}^*)^r$ の場合にまず調べてみよう. さらに作用は効果的であると仮定する. V の基底を $G^{\mathbb{C}}$ の元が対角行列になるように取っておく. $n = \dim_{\mathbb{C}} V$ とすれば, 作用は

$$ {}^t(x_1, \dots, x_n) \mapsto {}^t(\chi_1(t)x_1, \dots, \chi_n(t)x_n), \qquad t \in G^{\mathbb{C}} $$

と書ける. ここで $\chi_i \colon G^{\mathbb{C}} \to \mathbb{C}^*$ は指標である. $(i = 1, \dots, n)$

M を $G^{\mathbb{C}}$ のウェイト格子, すなわち $M = \mathrm{Hom}(G^{\mathbb{C}}, \mathbb{C}^*)$ とする. その双対格子 M^* は, $G^{\mathbb{C}}$ の一径数部分群 (one-parameter subgroup) の全体と, pairing $\chi \circ \lambda(t) = t^{\langle \chi, \lambda \rangle}$ $(t \in \mathbb{C}^*, \chi \in M, \lambda \colon \mathbb{C}^* \to G^{\mathbb{C}})$ によって同一視される. 次で定義される有理凸多面錘 (rational convex polyhedral cone) [1] を考えよう.

$$ \sigma \overset{\text{def.}}{=} \mathbb{R}_{\geq 0}\chi_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}\chi_2 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\chi_n \subset M \otimes \mathbb{R}. $$

その双対錘 (dual cone) は,

$$ \begin{aligned} \sigma^\vee \overset{\text{def.}}{=} &\{\lambda \in M^* \otimes \mathbb{R} \mid \langle \chi, \lambda \rangle \geq 0 \text{ for all } \chi \in \sigma\} \\ = &\{\lambda \in M^* \otimes \mathbb{R} \mid \langle \chi_i, \lambda \rangle \geq 0 \text{ for } i = 1, \dots, n\}. \end{aligned} $$

で定義されるが, Farkas の定理によって, $\sigma^\vee \neq \{0\}$ である限り, $\sigma^\vee$ も再び有理凸多面錘になる. 特に, ある生成元 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ が存在して

$$ \sigma^\vee = \mathbb{R}_{\geq 0}\lambda_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}\lambda_2 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}\lambda_s. \tag{5.1} $$

と書ける. このとき次の定理が成り立つ.

定理 5.2. *$x = {}^t(1, \dots, 1) \in V$ に対し, 軌道 $G^{\mathbb{C}}x$ が閉である必要十分条件は, $\sigma = M \otimes \mathbb{R}$ が成り立つことである.*

証明. $\sigma \neq M \otimes \mathbb{R}$ であると仮定しよう. $\sigma^\vee \neq \{0\}$ だから, $\sigma^\vee$ の生成元 $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ を(5.1) のように取ることが出来る. このときある j を固定して一径数部分群 $\lambda_j \colon \mathbb{C}^* \to G^{\mathbb{C}}$ を考えよう. 仮定から $\langle \chi_i, \lambda_j \rangle \geq 0$ が全ての i について成り立ち, ある i については $\langle \chi_i, \lambda_j \rangle > 0$ と仮定してよい. よって $t \to 0$ のとき $\lambda_j(t)x = {}^t(t^{\langle \chi_1, \lambda_j \rangle}, \dots, t^{\langle \chi_n, \lambda_j \rangle})$ は x の軌道外の点に収束するから $G^{\mathbb{C}}x$ は閉でない.

逆に, 軌道 $G^{\mathbb{C}}x$ が閉でないと仮定しよう. このとき $G^{\mathbb{C}}$ 内の発散列 $\{g_k\}$ で $g_k x$ が $k \to \infty$ のときに収束するものが存在する. $M \otimes \mathbb{R}$ の元 χ で $\chi(g_k)$ が $k \to \infty$ のときに発散するものを取ってこよう. もし $\sigma = M \otimes \mathbb{R}$ であれば, ある $m_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ によって $\chi = \sum_{i=1}^n m_i \chi_i$ と表わせる. ところが $\chi(g_k) = \prod_{i=1}^n \chi_i(g_k)^{m_i}$ は, $g_k x$ の座標を $(y_1, \dots, y_n)$ とするとき $\prod y_i^{m_i}$ で与えられるから, $\chi(g_k)$ が $k \to \infty$ のときに収束することになって仮定と矛盾する. よって $\sigma \neq M \otimes \mathbb{R}$ でなければならない. □

次の結果は Hilbert-Mumford の判定法と呼ばれるもののあるバージョンであり, 応用上重要である. $G^{\mathbb{C}}$ は再び一般の $\mathrm{U}(V)$ の閉部分 Lie 群の複素化とする.

定理 5.3 (Birkes [1], Kempf [2])**.** *$x \in V$ とし, Y を $G^{\mathbb{C}}x$ の閉包に含まれる $G^{\mathbb{C}}$-不変な空でない集合とする. このとき一径数部分群 $\lambda \colon \mathbb{C}^* \to G^{\mathbb{C}}$ とある点 $y \in Y$ で $\lim_{t \to 0} \lambda(t)x = y$ を満たすものが存在する.*

[1] 実ベクトル空間 V 内の有限個のベクトル $v_1, \dots, v_n$ を用いて $C = \mathbb{R}_{\geq 0}v_1 + \mathbb{R}_{\geq 0}v_2 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0}v_n$ と表わされる部分集合を凸多面錘といい, さらに $v_1, \dots, v_n$ が (与えられた) V の格子に属しているとき有理凸多面錘という.

証明. Y が $G^{\mathbb{C}}x$ の (ただ一つの) 閉軌道の場合, すなわち上の条件を満たすすべての Y の共通部分の場合, に証明すれば十分である.

$G^{\mathbb{C}}$ は複素トーラスである場合を考える. V の基底を $G^{\mathbb{C}}$ の各元が対角化されているように取り, 定理 5.2 の議論を適用する. 必要ならば V を部分空間で置き換えて, $x = {}^t(1, \dots, 1)$ と仮定して一般性を失わない. そこで

$$I \overset{\text{def.}}{=} \{i \in \{1, \dots, n\} \mid \langle \chi_i, \lambda \rangle = 0 \text{ for all } \lambda \in \sigma^\vee\}$$

とおく. もしも $I = \{1, \dots, n\}$ であれば, $\sigma^\vee = 0$ であり定理 5.2 により $T^{\mathbb{C}}x$ は閉であるから, この場合は主張が自明に成立する. そうでないと仮定し, $\lambda \in \sigma^\vee$ を $\langle \chi_i, \lambda \rangle > 0$ がすべての $i \in \{1, \dots, n\} \setminus I$ について成立するように取る. このとき, $\lambda \in \sigma^\vee \cap M^*$ であるとしてよい. すると

$$\lim_{t \to 0} \lambda(t)x = y = {}^t(y_1, \dots, y_n), \qquad y_i = \begin{cases} 1 & i \in I, \\ 0 & i \notin I \end{cases}$$

となる. この y の軌道が閉であることを証明すればよい. そこで

$$\widetilde{\sigma} \overset{\text{def.}}{=} \sum_{i \in I} \mathbb{R}_{\geq 0} \chi_i + \sum_{i \notin I} \mathbb{R} \chi_i$$

という有理凸多面錘を考える. $\lambda \in \widetilde{\sigma}^\vee$ とすると, 双対錘の定義により $i \notin I$ のとき $\langle \chi_i, \lambda \rangle = 0$ である. 一方, $\sigma \subset \widetilde{\sigma}$ であり, したがって双対錘は $\widetilde{\sigma}^\vee \subset \sigma^\vee$ という関係を持つので, $i \in I$ に対しても $\langle \chi_i, \lambda \rangle = 0$ が成り立つ. よって $\lambda = 0$ である. すなわち $\widetilde{\sigma}^\vee = 0$ であり, よって定理 5.2 によって y の軌道は閉である.

次に一般の $G^{\mathbb{C}}$ のときを考える. 以下の証明で Zariski 位相に関する閉包を $\overline{\ }$ で表わし, 通常の位相に関する閉包を $\overline{\overline{\ }}$ で表わす.

極大トーラス $T^{\mathbb{C}} \subset G^{\mathbb{C}}$ を取る. もしも $Y \cap \overline{T^{\mathbb{C}}gx} \neq \emptyset$ であれば, 上に示したことにより一径数部分群 $\lambda \colon \mathbb{C}^* \to T^{\mathbb{C}}$ で, $\lambda(t)gx \to y \in Y$ となるものが存在する. したがって $g^{-1}\lambda(t)gx \to g^{-1}y \in Y$ であり, $g^{-1}\lambda(t)g$ が求める一径数部分群である. よって任意の $g \in G^{\mathbb{C}}$ に対して $Y \cap \overline{T^{\mathbb{C}}gx} = \emptyset$ が成立すると仮定して矛盾を導けばよい.

定理 4.3 により, 各 $g \in G^{\mathbb{C}}$ に対して $f_g|_Y = 0$, $f_g(gx) = 1$ となる $T^{\mathbb{C}}$-不変な多項式 f_g が存在する. V の開集合 $U_g \overset{\text{def.}}{=} \{v \in V \mid f_g(v) \neq 0\}$ を考える. コンパクト群による軌道 Gx は, 有限個の $U_{g_1}, \dots, U_{g_N}$ によって被覆することができる. したがって

$$F \overset{\text{def.}}{=} |f_{g_1}| + \cdots + |f_{g_N}|$$

は $\overline{\overline{T^{\mathbb{C}}Gx}}$ で決して 0 とならない $T^{\mathbb{C}}$-不変な連続関数である. 一方, $F|_Y = 0$ であるから $Y \cap \overline{\overline{T^{\mathbb{C}}Gx}} = \emptyset$ である. ここで Y が G 不変であることに注意し, $G^{\mathbb{C}} = GT^{\mathbb{C}}G$ を用いると

$$\emptyset = Y \cap G\overline{\overline{T^{\mathbb{C}}Gx}} = Y \cap \overline{\overline{G^{\mathbb{C}}x}}$$

となる. ところが $\overline{\overline{G^{\mathbb{C}}x}} = \overline{G^{\mathbb{C}}x}$ である (例えば [3, p.84] 参照) からはじめの仮定に矛盾する. □

References

[1] D. Birkes, *Orbits of linear algebraic groups*, Ann. of Math. **93** (1971), 459–475.

[2] G. Kempf, *Instability in invariant theory*, Ann. of Math. **108** (1978), 299–316.

[3] D. Mumford, *The red book of varieties and schemes*, Lecture Notes in Math. **1358**, Springer-Verlag, 1988.