3. 5月15日

M を C^∞ 多様体, E を M 上のベクトル束とする. 以下では E は実ベクトル束とするが, 複素ベクトル束としても全く同様の議論が可能である. E 上の接続について復習する.

$A^0(E)$ で E の切断の全体を表わす. $s \in A^0(E)$ に対し, s の点 $x \in M$ における値を s_x もしくは $s(x)$ で表わす. $A^k(E)$ で E に値を持つ k 次微分形式の全体, すなわち $A^0(E \otimes \bigwedge^k T^*M)$ とする. E 上の接続 ∇ とは, $\mathbb{R}$-線型な作用素 $A^0(E) \to A^1(E)$ であって, 次の関係式を満たすもののことである.

$$\nabla(fs) = df \otimes s + f\nabla s$$

ただし f は M 上の C^∞ 級関数, $s \in A^0(E)$ である. また, ∇s とベクトル場 X を pairing したものを $\nabla_X s$ で表わす. 定義より, $\nabla_X s$ は X について $C^\infty(M)$-線型である. また, ∇_X は $A^0(E)$ 上の $\mathbb{R}$-線型な作用素と思う.

演習問題 3.1. $x \in M$ に対し, $(\nabla_X s)_x$ は X の s の x の近傍での振る舞いにしか依存しないことを示せ. 言い換えると, f を x の近傍で 0 となる C^∞ 級関数とするときに $(\nabla_X(fs))_x = 0$ を証明せよ.

$\varphi_\alpha \colon E|_{U_\alpha} \to U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を局所自明化とし, $\mathbb{R}^r$ の標準的な基底 ${}^t(1,0,\dots,0), \dots, {}^t(0,\dots,0,1)$ を U_α 上の (ベクトル値) 定数関数とみなし, φ_α^{-1} で引き戻したものを $E|_{U_\alpha}$ の切断と考えて $e_1, \dots, e_r$ と表わす. 上の演習問題より, 開集合 U_α 上で定義された E の切断 e_i に対して, ∇e_i が U_α 上で定義される. このとき U_α 上の行列に値を持つ一次微分形式 $A_\alpha = (A_{ij})_{i,j=1,\dots,r}$ を

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^r A_{ji} e_j$$

によって定義する. すなわち $\nabla_X e_i = \sum_j A_{ij}(X) e_j$ である. U_α 上で定義された E の切断 s に対し, U_α 上のベクトル値関数 s_α を

$$\varphi_\alpha s_x = (x, s_\alpha(x))$$

で定義しよう. $s_\alpha = {}^t(s_1, \dots, s_r)$ と成分表示すると, $s = \sum_i s_i e_i$ となる. よって

$$\nabla s = \sum_i ds_i \otimes e_i + s_i \nabla e_i = \sum_{i,j} (ds_i + A_{ij} s_j) \otimes e_i$$

が成り立つ. したがって ∇s を φ_α によって局所表示すると,

$$ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha$$

と表わされる. ただし ds_α はベクトル値関数の各成分ごとの微分であり, $A_\alpha s_\alpha$ は行列値微分形式とベクトル値関数の積である.

補題 **3.2.** 各開集合 U_α に対して A_α を上のように定める. 貼りあわせ関数 $g_{\alpha\beta}$ を $(x, g_{\alpha\beta}(x)v) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, v)$ で定めると,

$$A_\beta = g_{\alpha\beta}^{-1} dg_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta}^{-1} A_\alpha g_{\alpha\beta}$$

が成り立つ.

逆に各 U_α 上で定義された行列値一次微分形式 A_α が定義されて上の式を満たすとき, E の接続 ∇ が定義される.

証明. s を E の切断とし, 各 U_α ごとに上のように s_α を定める. このとき $s_\alpha = g_{\alpha\beta}s_\beta$ が成り立つ. よって

$$ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha = d\left(g_{\alpha\beta}s_\beta\right) + A_\alpha g_{\alpha\beta}s_\beta = dg_{\alpha\beta}\cdot s_\beta + g_{\alpha\beta}\cdot ds_\beta + A_\alpha g_{\alpha\beta}s_\beta$$

となる. 一方で

$$ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha = g_{\alpha\beta}\left(ds_\beta + A_\beta s_\beta\right)$$

であるから上の式が従う.

逆に各 U_α 上で $\nabla^\alpha s$ を $\varphi_\alpha\nabla^\alpha s$ の第二成分が $ds_\alpha + A_\alpha s_\alpha$ となるように定義する. 上の式から $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で $\nabla^\alpha s = \nabla^\beta s$ であって, 多様体全体で接続 ∇ が定義されていることが従う. □

$\operatorname{End} E = E^*\otimes E$ を M 上のベクトル束で, 各点 $x \in M$ におけるファイバーが $\operatorname{End} E_x = E_x^*\otimes E_x$ になるものを表わす. E の局所自明化 $\varphi_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \cong U_\alpha \times \mathbb{R}^r$ を取り, 貼りあわせ関数 $g_{\alpha\beta}$ を $(x, g_{\alpha\beta}(x)v) = (\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(x, v)$ で定めると, $r \times r$ 正方行列の全体を $M_r(\mathbb{R})$ として $U_\alpha \times M_r(\mathbb{R})$ を

$$(x, A) \sim (x, g_{\alpha\beta}(x)Ag_{\alpha\beta}(x)^{-1}), \qquad x \in U_\alpha \cap U_\beta, A \in M_r(\mathbb{R})$$

で貼りあわせたものが $\operatorname{End} E$ である. E の切断は局所的なベクトル値関数を貼りあわせたものであるが, $\operatorname{End} E$ の切断は局所的な行列値関数を貼りあわせたものである. 特に $\operatorname{End} E$ の二つの切断の積や, $\operatorname{End} E$ の切断と E の切断の積が定義される.

演習問題 3.3. (1) 局所自明化を用いて $\operatorname{End} E$ の二つの切断の積や, $\operatorname{End} E$ の切断と E の切断の積の定義を書き下せ.

(2) 次を示せ. $A^0(E)$ 上の $\mathbb{R}$ 線型作用素 $\Phi\colon A^0(E) \to A^0(E)$ が $C^\infty(M)$-線型である, すなわち $\Phi(fs) = f\Phi(s)$ が $f \in C^\infty(M)$, $s \in A^0(E)$ について成立したとする. このとき $A^0(\operatorname{End} E)$ の切断 g が存在して, $\Phi s = g\cdot s$ が成り立つ. ただし, $g\cdot s$ は上に述べた g と s の積を意味する.

接続 ∇ に付随した外微分作用素 $d^\nabla\colon A^k(E) \to A^{k+1}(E)$ を

$$d^\nabla(\alpha\otimes s) = d\alpha\otimes s + (-1)^k\alpha\wedge\nabla s$$

によって定義する. ただし α は k 次微分形式, s は E の切断である. また, $\alpha\wedge\nabla s$ は通常の微分形式と, E に値を持つ微分形式の間に定義される自然な外積である. このとき通常の外微分作用素のときと類似の次の公式が成立する:

$$(d^\nabla s)(X, Y) = \nabla_X\left(s(Y)\right) - \nabla_Y\left(s(X)\right) - s([X, Y])$$

ただし $s \in A^1(E)$ であり, s とベクトル場 X の pairing を $s(X)$ で表わした.

演習問題 3.4. (1) 通常の微分形式と, E に値を持つ微分形式の間に定義される自然な外積の定義を書き下せ.

(2) 上の式を証明せよ.

接続 ∇ の曲率とは, ベクトル場 X, Y と切断 $s \in A^0(E)$ に対して

$$R^\nabla(X, Y)s = \left[\nabla_X, \nabla_Y\right]s - \nabla_{[X,Y]}s = \nabla_X\nabla_Y s - \nabla_Y\nabla_X s - \nabla_{[X,Y]}s$$

で定義されるもののことである. 言い換えると,

$$R^\nabla(X, Y)s = \frac{1}{2}(d^\nabla d^\nabla s)(X, Y)$$

である. 通常の外微分作用素のときとは異なり, 一般には $d^\nabla d^\nabla = 0$ は成立しない.

このとき次が成立する.

補題 3.5. (1) $R^\nabla(X,Y)s = -R^\nabla(Y,X)s$,
(2) $R^\nabla(fX,Y)s = fR^\nabla(X,Y)s$,
(3) $R^\nabla(X,Y)(fs) = fR^\nabla(X,Y)s$.
ただし f は M 上の C^∞ 級関数, $s \in A^0(E)$ である.

証明. (1) は定義から明らか. (2) は $d^\nabla d^\nabla s$ が 2 次微分形式であることから従うが, 念のために直接チェックしよう:

$$\begin{aligned} R^\nabla(fX,Y)s &= [\nabla_{fX}, \nabla_Y]\, s - \nabla_{[fX,Y]}s \\ &= [f\nabla_X, \nabla_Y]\, s - \nabla_{f[X,Y]-Yf\cdot X}s \\ &= f\,[\nabla_X, \nabla_Y]\, s - (Yf)\nabla_X s - f\nabla_{[X,Y]}s + (Yf)\nabla_X s \\ &= fR^\nabla(X,Y)s \end{aligned}$$

と示される. (3) は

$$\begin{aligned} & R^\nabla(X,Y)(fs) \\ &= \nabla_X\nabla_Y(fs) - \nabla_Y\nabla_X(fs) - \nabla_{[X,Y]}(fs) \\ &= \nabla_X((Yf)s + f\nabla_Y s) - \nabla_Y((Xf)s + f\nabla_X s) - ([X,Y]f)s - f\nabla_{[X,Y]}s \\ &= (XYf)s + (Yf)\nabla_X s + (Xf)\nabla_Y s + f\nabla_X\nabla_Y s \\ &\quad - (YXf)s - (Xf)\nabla_Y s + (Yf)\nabla_X s + f\nabla_Y\nabla_X s - ([X,Y]f)s - f\nabla_{[X,Y]}s \\ &= fR^\nabla(X,Y)s \end{aligned}$$

と示される. □

上の補題は, 一見微分作用素に見える R^∇ が実は掛け算作用素に過ぎないこと, 正確に言うと $\operatorname{End} E$ に値を持つ 2 次微分形式, すなわち $A^2(\operatorname{End} E)$ の元であることを意味している. (問題 3.3)

E の接続 ∇ は $\operatorname{End} E$ の接続 (同じ記号 ∇ で表わす) を次の式によって誘導する:

$$\nabla_X(g\cdot s) = (\nabla_X g)\cdot s + g\cdot\nabla_X s \tag{3.6}$$

ただし, $g \in A^0(\operatorname{End} E)$, $s \in A^0(E)$ であり, $g\cdot s$ は上に述べた g と s の積を意味する. また $(\nabla_X g)\cdot s$ は $\nabla_X g$ と s の積である. 以下では紛れのないときには $\cdot$ は省略される. 局所自明化 $\varphi_\alpha\colon E|_{U_\alpha} \to U_\alpha\times\mathbb{R}^r$ を用いて上のように ∇ を $d+A_\alpha$ と局所表示する. このとき $g \in A^0(\operatorname{End} E)$ の局所表示を g_α とすると, ∇g の局所表示は

$$dg_\alpha + A_\alpha g_\alpha - g_\alpha A_\alpha = dg_\alpha + [A_\alpha, g_\alpha]$$

で与えられる.

$\mathcal{A}(E)$ で E 上の接続の全体を表わし, $\mathcal{G}(E)$ で E のゲージ変換の全体, すなわち $A^0(\operatorname{End} E)$ の元 g で各点 $x\in M$ ごとに g_x が $\operatorname{End} E_x$ の元として可逆なものの全体を表わす. ある接続 ∇ を固定すると, $\mathcal{A}(E)$ は $A^1(\operatorname{End} E)$ と同一視される. 実際, 別の接続 ∇' に対して $\nabla'-\nabla$ を考えると, $\nabla'(fs)-\nabla(fs) = f(\nabla' s - \nabla s)$ となることから分かるように, $A^1(\operatorname{End} E)$ の元となる.

$\mathcal{G}(E)$ は $\mathcal{A}(E)$ に作用する:

$$\nabla^g(s) \overset{\text{def.}}{=} g\nabla\left(g^{-1}s\right).$$

補題 3.7. (1) $\nabla^g - \nabla = \nabla g\cdot g^{-1}$
が成り立つ. ただし $\nabla g\cdot g^{-1}$ は $A^1(\operatorname{End} E)$ の元 ∇g と $A^0(\operatorname{End} E)$ の元 g^{-1} の上に述べた積を表わしている.
(2)(**Bianchi の恒等式**) $d^\nabla R^\nabla = 0$.

(3) ∇ を E の接続, α を $A^1(\operatorname{End} E)$ の元とするとき, 新しい接続 $\nabla+\alpha$ の曲率は

$$R^{\nabla+\alpha} = R^{\nabla} + d^{\nabla}\alpha$$

で与えられる.

証明. (1) はライプニッツ則(3.6) から

$$\begin{aligned}\nabla^g s &= g\nabla\left(g^{-1}s\right) = g\left(g^{-1}\nabla s - g^{-1}\cdot\nabla g\cdot g^{-1}s\right)\\ &= \nabla s - \nabla g\cdot g^{-1}s\end{aligned}$$

と従う.

(2) は s を E の切断として,

$$\left(d^{\nabla}R^{\nabla}\right)s = d^{\nabla}(R^{\nabla}s) - R^{\nabla}(d^{\nabla}s) = d^{\nabla}(d^{\nabla}d^{\nabla}s) - d^{\nabla}d^{\nabla}(d^{\nabla}s) = 0$$

から従う. ただし最初の部分の等式をチェックすることは演習問題 3.8 とする.

(3) は

$$\begin{aligned}&R^{\nabla+\alpha}(X,Y)s\\ =\ &\left(\nabla_X+\alpha(X)\right)\left(\nabla_Y+\alpha(Y)\right)s - \left(\nabla_Y+\alpha(Y)\right)\left(\nabla_X+\alpha(X)\right)s - \left(\nabla_{[X,Y]}+\alpha([X,Y])\right)s\\ =\ &\left(\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]}\right)s + \left(\nabla_X\alpha(Y) - \nabla_Y\alpha(X) - \alpha([X,Y])\right)s\\ =\ &R^{\nabla}(X,Y)s + (d^{\nabla}\alpha)(X,Y)s\end{aligned}$$

と従う. □

定義 3.9. ∇ が既約な接続であるとは, $\nabla^g = \nabla$ となるゲージ変換 $g \in \mathcal{G}(E)$ がスカラー変換 $g = c\,\mathrm{id}_E$ (c はある定数) のみであるときを言う. 既約でないとき可約という. すなわち, $\mathcal{G}(E)$/スカラー変換 の $\mathcal{A}(E)$ への作用を考えたときに ∇ の固定部分群が自明なとき ∇ は既約である.