幾何学I演習問題

担当: 中島 啓　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003年4月23日(水)

問題 4. 問題 **3** の $n=2$ の場合の立体射影

$$\varphi^{\pm}(x_1, x_2, x_3) = (\frac{x_1}{1 \mp x_3}, \frac{x_2}{1 \mp x_3})$$

の座標変換 $\varphi^+ \circ \varphi^-$ を考える. また, 一次元複素射影空間 $\mathbf{C}P^1 = \{[z_0 : z_1]\}$ の $U_0 = \{z_0 \neq 0\}$, $U_1 = \{z_1 \neq 0\}$ における非同次座標 $\psi^+ \colon U_0 \to \mathbf{C}$, $\psi^- \colon U_1 \to \mathbf{C}$

$$\psi^+([z_0 : z_1]) = z_1/z_0, \qquad \psi^-([z_0 : z_1]) = z_0/z_1$$

とその座標変換 $\psi^+ \circ (\psi^-)^{-1}$ を考える. 両者を比較することによって, S^2 と $\mathbf{C}P^1$ との間の微分同相写像を作れ.

問題 5. n 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は, n 次元球面 S^n をある同値関係で割った空間であるから, 自然な写像 $\pi \colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ が与えられる. この写像が C^∞ 級であることを示せ. 同様に定義される $\pi \colon S^{2n+1} \to \mathbf{C}P^n$ が C^∞ 級であることを示せ.

問題 6. 二次元トーラス T^2 を $\mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ として定義する. $f \colon T^2 \to T^2$ を $(x, y) \mapsto (2x, 2y)$ で定義する. f が well-defined であることを示した上で, C^∞ 級写像であることを証明せよ. また f は逆写像を持つか？

問題 7. 二つの微分可能多様体 M, N の間の写像 $F \colon M \to N$ が C^∞ 級であるための必要十分条件は, N 上の任意の C^∞ 級関数 g に対して, $g \circ F$ が M 上の C^∞ 級関数になることであることを証明せよ.

略解 4. 先週の略解より

$$\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1, y_2) = (\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2})$$

である. 一方 $\psi^+ \circ (\psi^-)^{-1}(w) = \frac{1}{w}$ であるから, $w = y_1 + iy_2$ として $\psi^+ \circ (\psi^-)^{-1}(y_1 + iy_2)$ の実部と虚部は,

$$\frac{y_1}{y_1^2 + y_2^2}, \quad -\frac{y_2}{y_1^2 + y_2^2}$$

となっている. すなわち, 上の $\varphi^+ \circ (\varphi^-)^{-1}(y_1, y_2)$ の第二成分を -1 倍したものである. これは $F\colon S^2 \to \mathbf{C}P^1$ を

$$\begin{array}{ccccccc}
 & S^2 \setminus \{(0,0,1)\} & \xrightarrow{\varphi^+} & \mathbf{C} \xrightarrow{\text{恒等写像}} \mathbf{C} & \xrightarrow{(\psi^+)^{-1}} & U_0 & \\
 & \supset & & & & \subset & \\
S^2 & & & & & & \mathbf{C}P^1 \\
 & \supset & & & & \subset & \\
 & S^2 \setminus \{(0,0,-1)\} & \xrightarrow{\varphi^-} & \mathbf{C} \xrightarrow[\text{を取る}]{\text{共役複素数}} \mathbf{C} & \xrightarrow{(\psi^-)^{-1}} & U_1 &
\end{array}$$

で定義できることを意味する. つまり共通部分 $(S^2 \setminus \{(0,0,1)\}) \cap (S^2 \setminus \{(0,0,-1)\})$ で同じ行き先を定めている. 定め方から, F もその逆 F^{-1} も微分可能であり, F は微分同相写像である.

略解 5. $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ とすると, $\pi(x_0, \ldots, x_n) = [x_0 : \cdots : x_n]$ である. 問題 **1** のように S^n に座標 $\varphi_i^\pm$ を入れ, また $\mathbf{R}P^n$ に非同次座標 ψ_i (すなわち $\psi_i([x_0 : \cdots : x_n]) = (x_0/x_i, \ldots, \widehat{x_i/x_i}, \ldots, x_n/x_i)$) を入れると

$$\psi \circ \pi \circ (\varphi_i^\pm)^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \pm(\frac{y_1}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}}, \ldots, \frac{y_n}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}})$$

となる. これは C^∞ 級写像である. $\mathbf{C}P^n$ についても同様.

略解 6. $(x, y) \sim (x', y') \iff (x - x', y - y') \in \mathbf{Z}^2$ として, $T^2 = \mathbf{R}^2/\!\sim$ である. $(x, y) \sim (x', y')$ のとき $(2x, 2y) \sim (2x', 2y')$ であるから well-defined である. C^∞ 級であることは, 値域の方では問題 **2** のように座標を取り, 定義域の方ではさらに半分に細かく切った座標を取ってチェックすればよい. (定義域と値域を同じ座標で取るのは無理であることに注意.)

略解 7. 必要条件であることは, C^∞ 写像の合成が再び C^∞ 級であることから従う. 充分条件であることを示す. $\varphi_{=}(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ を開集合 U 上で定義された N の座標とするときに, (必要ならば U を小さく取り直して,) $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ は N 全体で定義された関数 (同じ記号で表わす) の制限であるとして構わない. したがって仮定から $\varphi_i \circ F$ は M 上の C^∞ 級関数である. M 上の C^∞ 級関数の定義に戻れば, これは座標 ψ を取って $\varphi \circ F \circ \psi^{-1}$ が C^∞ 級である. これは, F が C^∞ 級であることに他ならない.