# 幾何学 I 演習問題

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003 年 6 月 11 日 (水)

5/30 の問題 **22** もやること.

問題 **24.** $n$ 次元球面 $S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid |x| = 1\}$ に $O(n+1) = \{g \in GL(n+1, \mathbf{R}) \mid g^t g = I\}$ が $x \mapsto gx$ によって作用する.
(1) この作用が $C^\infty$ 級であること, すなわち写像 $O(n+1) \times S^n \ni (g, x) \mapsto gx \in S^n$ が $C^\infty$ 級であることを示せ.
(2) $H \subset O(n+1)$ を点 $x_0 = {}^t(1, 0, \ldots, 0) \in S^n$ の固定部分群, すなわち $H = \{g \in O(n+1) \mid gx_0 = x_0\}$ とする. $H$ が $O(n)$ と同型な $O(n+1)$ の部分多様体であることを証明せよ.
(3) 自然な写像 $O(n+1)/O(n) \to S^n$ が微分同相であることを証明せよ.

問題 **25.** (1) $SU(1,1) = \{ \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right] \in M(2,2,\mathbf{C}) \,\big|\, |a|^2 - |b|^2 = 1\}$ とする. Lie 群であることを証明せよ.
(2) $D$ を複素平面の原点を中心とする半径 1 の円の内部 $\{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}$ とおく. $SU(1,1)$ は $D$ に一次分数変換 $\left[\begin{smallmatrix} a & b \\ \overline{b} & \overline{a} \end{smallmatrix}\right] z = \frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ で作用することを証明せよ.
(3) 原点 $z = 0$ の固定部分群 $H$ は何か? $SU(1,1)/H$ が $D$ と微分同相であることを証明せよ.

問題 **26.** $\mathbf{R}^n$ の中の $r$ 次元部分空間の全体のなすグラスマン多様体 $G(r, n)$ を, 等質空間 $G/H$ の形に表わせ.

問題 **27.** $\varphi\colon \mathbf{R} \to T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ を $t \mapsto (ta, tb) \mod \mathbf{Z}^2$ で定義する $(b \neq 0)$. これは群の準同型で, $C^\infty$ 級であり, 微分は単射, すなわちはめ込みである. また, $a/b$ が有理数でなければ $\varphi$ は単射であり, $\varphi(\mathbf{R})$ は $T^2$ の部分群であるが, 部分多様体ではない. $a/b$ が有理数でないとき $T^2/\varphi(\mathbf{R})$ に $C^\infty$ 級多様体の構造が入れられるだろうか？

略解 **24.** (1) $GL(n+1,\mathbf{R})\times\mathbf{R}^{n+1}\to\mathbf{R}^{n+1}$ が $C^\infty$ 級であることは, 行列とベクトルの積だから明らかである. これを部分多様体に制限したものだから $C^\infty$ 級である.

(2) $H=\{\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&g'\end{smallmatrix}\right]\,|\,g'\in O(n)\}$ である. 自然な写像 $O(n)\to H$ が同型であることは自明である. また $O(n)$ はコンパクトだから (証明は略), 連続な全単射 $O(n)\to H$ は同相写像となる. $C^\infty$ 級であることも明らか. 微分が消えていないことは, 原点でチェックすればよいが, これも明らか. よって部分多様体である.

(3) $O(n+1)\to O(n+1)/O(n)$ の局所的な切断, すなわち授業でやった座標 $\psi\colon U\to\mathfrak{m}$ ($\mathfrak{so}(n+1)=\mathfrak{so}(n)\oplus\mathfrak{m}$) に $\exp$ を合成して $U\to O(n+1)$ という写像にしたもの, をとれば, 自然な写像 $O(n+1)/O(n)\to S^n$ が, $e\,O(n)$ の回りで $C^\infty$ 級なことが分かる. 任意の点 $g\,O(n)$ については左移動して原点に移せばよい. 逆写像が $C^\infty$ 級であることは, 直接言ってもいいが, 微分が可逆であることを使って逆写像定理を適用してもいい. (ただし, まず $O(n+1)/O(n)\to S^n$ が全単射であることはチェックしておく. この部分は略.) $O(n+1)/O(n)$ の $e\,O(n)$ での接空間 $\mathfrak{m}$ は, $\mathfrak{so}(n+1)$ の中の $\{\left[\begin{smallmatrix}0&0\\0&A\end{smallmatrix}\right]\,|\,A\in\mathfrak{so}(n)\}$ の補空間であるが, これは $\{\left[\begin{smallmatrix}0&-{}^tx\\x&0\end{smallmatrix}\right]\,|\,x\in\mathbf{R}^n\}$ と取れる. このとき微分は, $\left[\begin{smallmatrix}0&-{}^tx\\x&0\end{smallmatrix}\right]\mapsto\left[\begin{smallmatrix}0\\x\end{smallmatrix}\right]\in T_{x_0}S^n$ で与えられ, 同型である.

略解 **25.** (1) 群であることの証明は略. $a=a_1+ia_2$, $b=b_1+ib_2$ $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbf{R}$ と表わすと, $|a|^2-|b|^2=a_1^2+a_2^2-b_1^2-b_2^2$ である. これを $f(a_1,a_2,b_1,b_2)$ とする. 微分を計算すると $\left(\begin{smallmatrix}\frac{\partial f}{\partial a_1}&\frac{\partial f}{\partial a_2}&\frac{\partial f}{\partial b_1}&\frac{\partial f}{\partial b_1}\end{smallmatrix}\right)=2\left(\begin{smallmatrix}a_1&a_2&-b_1&-b_2\end{smallmatrix}\right)$ となり, これは決して $0$ にはならない. よって, 微分は全射. よって $SU(1,1)$ は $\mathbf{R}^4$ の部分多様体である. 積, 逆元が $C^\infty$ 級であることは明らか.

(2) $z\in D$ のとき $\left[\begin{smallmatrix}a&b\\\overline{b}&\overline{a}\end{smallmatrix}\right]z=\frac{az+b}{\overline{b}z+\overline{a}}$ は, 分母が $0$ でなく, $D$ に入っていることの証明は略. $C^\infty$ 級であることは定義から明らか.

(3) $H=\{\left[\begin{smallmatrix}a&0\\0&\overline{a}\end{smallmatrix}\right]\in M(2,2,\mathbf{C})\,|\,|a|^2=1\}\cong S^1$ である. 写像 $SU(1,1)/H\to D$ が微分同相であることは上の問題 **24** と同様に証明できるので略.

略解 **26.** $G(r,n)=O(n)/\left(O(r)\times O(n-r)\right)$

略解 **27.** $T^2/\varphi(\mathbf{R})$ に商位相を入れると, ハウスドルフ空間ではない. (証明は略.)