幾何学 I 演習小テスト

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003 年 5 月 7 日 (水)

問題 1. 自然な写像 $\pi\colon S^n \to \mathbf{R}P^n$ について, その微分 $d\pi_p\colon T_pS^n \to T_{\pi(p)}\mathbf{R}P^n$ は全ての p について同型写像であることを示せ.

問題 2. 一次元球面 S^1 を $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$, すなわち実数の全体 $\mathbf{R}$ を同値関係 $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbf{Z}$ で割った空間とする.

(1) S^1 が多様体であることを具体的に座標を取ることによって証明せよ.

(2) 自然数 n に対して, 写像 $f\colon S^1 \to S^1$ を $f(x) = nx$ で定義する. この写像が well-defined であり, C^∞ 級であることを証明せよ.

(3) f の微分が至るところ同型であることを証明せよ.

問題 3. 多項式写像 $f\colon \mathbf{R}P^1 \to \mathbf{R}P^1$ を

$$f([x:y]) = [x^n : a_n y^n + a_{n-1}xy^{n-1} + \cdots + a_0 x^n]$$

で定める. $(n \geq 1,\, a_n \neq 0)$ f の微分 df_p が消える p をすべて求めよ.

先週の略解 **10** には間違いがあったので注意

略解 1. $S^n = \{(x_0, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid x_0^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$ とすると, $\pi(x_0, \ldots, x_n) = [x_0 : \cdots : x_n]$ である. 問題 **1** のように S^n に座標 $\varphi_i^{\pm}$ を入れ, また $\mathbf{R}P^n$ に非同次座標 ψ_i (すなわち $\psi_i([x_0 : \cdots : x_n]) = (x_0/x_i, \ldots, \widehat{x_i/x_i}, \ldots, x_n/x_i)$) を入れると

$$\psi \circ \pi \circ (\varphi_i^{\pm})^{-1}(y_1, \ldots, y_n) = \pm\left(\frac{y_1}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}}, \ldots, \frac{y_n}{\sqrt{1 - \sum_{\alpha=1}^n y_\alpha^2}}\right)$$

となる. これは C^∞ 級写像である. 微分は

$$\frac{\partial(\text{第 } \alpha \text{ 成分})}{\partial y_\beta} = \pm(1 - |y|^2)^{-3/2}(y_\beta y_\alpha + (1 - |y|^2)\delta_{\alpha\beta})$$

一般に

$$\begin{pmatrix} y_1y_1 & y_1y_2 & \cdots & y_1y_n \\ y_2y_1 & y_2y_2 & \cdots & y_2y_n \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ y_ny_1 & y_ny_2 & \cdots & y_ny_n \end{pmatrix} + c \times \text{単位行列}$$

の行列式が, $c^n + c^{n-1}|y|^2$ ($|y|^2 = \sum_\alpha y_\alpha^2$) で与えられることは容易に証明できる. 今の場合, $c = 1 - |y|^2$ であるから 行列式は $(1 - |y|^2)^{n-1}$ であり, 特に 0 ではない. よって微分 $d\pi_p$ は同型である.

(先週の略解のように計算してももちろんよい.)

略解 2. (1) $(a, b) \subset \mathbf{R}$ を, $b - a < 1$ となるように取る. すると自然な射影 $\mathbf{R} \to S^1$ を (a, b) に制限したものは単射である. この写像の逆によって S^1 に座標系を定める. 座標変換が C^∞ 級であることは (真面目に書くと大変だが) 容易にチェックできる.

(2) well-defined は明らか. C^∞ 級であることも明らかだが, 真面目に示してみよう. $(0, 1/n)$, $(1/2n, 3/2n)$, $(1/n, 2/n)$, $\ldots$, $((n-1)/n, 1)$, $((2n-1)/2n, (2n+1)/2n)$(の射影) で定義域の S^1 を覆い, $(0, 1)$, $(1/2, 3/2)$(の射影) で 値域の S^1 を覆う. それぞれ座標系になっている. f を定義域の座標のそれぞれに制限すると, 値域の方の座標のどちらかに入っていて, おのおのでは一次関数である. よって C^∞ 級である.

(3) 上の一次関数の傾きは 0 でないから正しい.

略解 3. 略