幾何学 I 演習小テスト

担当: 中島 啓　　TA: 伊藤公毅, 近藤剛史

2003 年 6 月 4 日 (水)

問題 **1.** $\mathbf{R}P^3$ の同次座標を $[x_0 : x_1 : x_2]$, $U = \{x_2 \neq 0\}$ における非同次座標を (y_0, y_1) とする. $(y_0 = x_0/x_2,\, y_1 = x_1/x_2)$ U 上のベクトル場 X を座標ベクトルを用いて

$$X = ay_0 \frac{\partial}{\partial y_0} + by_1 \frac{\partial}{\partial y_1}$$

で定める. a, b は実数である.

(1) X が $\mathbf{R}P^3$ 上のベクトル場に拡張されることを証明せよ.

(2) 上の拡張されたベクトル場の 1 パラメータ変換群を, 同次座標を用いて表せ.

問題 **2.** X, Y を M 上の C^∞ 級ベクトル場とし, φ_t, ψ_t を対応する 1 パラメータ変換群とする. (簡単のため X, Y は完備とする.)

(1) $F\colon M \to M$ を C^∞ 級微分同相とするとき, $F \circ \varphi_t \circ F^{-1}$ は, ベクトル場 $F_*(X)$ に対応した 1 パラメータ変換群であることを証明せよ.

(2) $[X, Y] = 0$ である必要十分条件は, $(\varphi_t)_*(Y) = Y$ となることであり, さらに $\varphi_t \circ \psi_s = \psi_s \circ \varphi_t$ がすべての s, t について成り立つことであることを証明せよ.

問題 **3.** $U(n) = \{n \times n \text{ ユニタリ行列 }\}$ が Lie 群であることを証明せよ. また, Lie 環 $\mathfrak{u}(n)$ を, 単位元 e における接空間としてどのような行列の全体か, 求めよ. また, 次元を計算せよ.

略解 1. (1) $V = \{x_1 \neq 0\}$ における非同次座標を (z_0, z_2) ($z_0 = x_0/x_1$, $z_2 = x_2/x_1$ とおくと, 二つの非同次座標の間の座標変換は

$$z_0 = \frac{y_0}{y_1}, \qquad z_2 = \frac{1}{y_1}$$

で与えられる. ベクトル場の変換公式によって計算すると

$$ay_0\frac{\partial}{\partial y_0} + by_1\frac{\partial}{\partial y_1} = (a-b)z_0\frac{\partial}{\partial z_0} - bz_2\frac{\partial}{\partial z_2}$$

となる. これは, このベクトル場が, V で定義されていることを意味する. 同様に, もう一つの非同次座標を $x_2 \neq 0$ で取って, そこで定義されていることがチェックできる.

(2) U で, 1-パラメータ変換群を求めると, $(y_0, y_1) \mapsto (e^{ta}y_0, e^{tb}y_1)$ である. V では, $(z_0, z_2) \mapsto (e^{(a-b)t}z_0, e^{-tb}z_2)$ である. 両者が整合するように, 同次座標で表すと, $[x_0 : x_1 : x_2] \mapsto [e^a x_0 : e^b x_1 : x_2]$ となる. (これは, $[e^{(a-b)t}x_0 : x_1 : e^{-tb}x_2]$ と等しい.)

略解 2. 略

略解 3. $\varphi\colon GL(n, \mathbf{C}) \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ を

$$\varphi(g) = \text{複素行列 } (g^t\overline{g}) \text{ の対角成分と, 上三角部分}$$

によって定義する. ここで ${}^t(g^t\overline{g}) = \overline{g}^t = \overline{g^t\overline{g}}$ であるから対角成分は実数であることに注意する. よって値は, 対角成分の $\mathbf{R}^n$ と上三角部分の $\mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ がある. 微分は

$$d\varphi_g(X) = (g^t\overline{X} + X^t\overline{g}) \text{ の対角成分と, 上三角部分}$$

である. ただし, X は $n \times n$ 複素行列で, $T_gGL(n, \mathbf{C})$ の元と見なしている. この写像が全射であることを見る. 複素行列の全体のなす 複素ベクトル空間に $(X, Y) = \mathrm{tr}(X{}^t\overline{Y})$ によって 内積を入れる. $\mathbf{R}^n \times \mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ を, 対角成分が実数の上三角行列と同一視し, 上の内積を制限して内積を入れる. そのような行列 Y に対して,

$$\begin{aligned}&(d\varphi_g(X), Y) = \mathrm{tr}\left(((g^t\overline{X} + X^t\overline{g}) \text{ の対角成分と, 上三角部分})^t\overline{Y}\right)\\ =\ &\mathrm{tr}\left((g^t\overline{X} + X^t\overline{g})^t\overline{Y}\right) = \left(X, Yg + {}^t\overline{Y}g\right)\end{aligned}$$

となることに注意しよう. もしも全射でないとすると, 任意の X について上の式が 0 になるような Y があることになる. このとき $Yg + {}^t\overline{Y}g = 0$, すなわち $Y + {}^t\overline{Y} = 0$ である. ところが Y は, 対角成分が実数の上三角行列行列であったから, これは $Y = 0$ を意味する. よって $d\varphi$ は全射である. したがって $U(n) = \varphi^{-1}(1_n)$ (ここで 1_n は, $\mathbf{R}^n$ 成分がすべて 1 で $\mathbf{C}^{n(n-1)/2}$ 成分が 0 を意味する) は, 部分多様体である. 積, 逆元が C^∞ 級であることはこれから従う. よって Lie 群である. また, 次元は, 上のことにより n^2 である.