展望講義演習問題

中島 啓

1998 年 1 月 13 日 (火)

問題 **9** $\varphi\colon V \to U \cap M$ を local patch とし, E, F, G を授業でやったように定める (i.e. 第一基本形式). このとき

$$\operatorname{div} \frac{\partial}{\partial u} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\log(EG - F^2), \qquad \operatorname{div} \frac{\partial}{\partial v} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\log(EG - F^2)$$

となることを証明せよ.

問題 **10** M は曲面で, N はその法ベクトルとする. N の起点を忘れて原点を起点とする長さが 1 のベクトルと考えることによって, M のガウス写像 $G\colon M \to S^2$ (S^2 は二次元の球面 $\{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$) を, $G(p) = N(p)$ によって定義する.

さらに S^2 を (関数論でおそらくやったように) $z = (x_1 + ix_2)/(1 - x_3)$ によって, リーマン球面 $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と思うことにする.

極小曲面のワイエルシュトラスの表示式のガウス写像を計算することによって, 等温座標 (u, v) のもとで, ガウス写像が (∞ も許す) 正則か反正則である (i.e., 正則関数の複素共役) であることを証明せよ.

問題 **11** 以下の方針に従って, 次の定理を証明せよ.

定理 **(Bernstein)** $z = f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ 全体上で定義された極小曲面方程式, すなわち

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}\right) = 0$$

の解であるとする. このとき, f は一次関数である.

(1) 次を満たす $\Phi(x, y)$ が存在することを示せ.

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} = \frac{1 + f_x^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x \partial y} = \frac{f_x f_y}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}, \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} = \frac{1 + f_y^2}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}}$$

(2) Φ は凸関数であり, さらに

$$(x, y) \mapsto (\xi, \zeta) = (x + \Phi_x(x, y), y + \Phi_y(x, y))$$

は, $\mathbb{R}^2$ から $\mathbb{R}^2$ への微分同相写像であることを示せ.

(3) (ξ, ζ) を新たに座標と思うことにし, $w = \xi + i\zeta$ とおき,

$$F = x - \Phi_x - i\,(y - \Phi_y)$$

を考える. F は, w に関して正則関数であることを示せ.

(4) F の微分は有界であることを示し, Liouville の定理を用いることによって, 定理を導け.

問題 **12** 講義の感想を書いてください.

演習問題は, ホームページ

http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/tenbou.html

においてあります.
　また Weierstrass 表現の Maple による表示の例が, ホームページにおいてあります. 興味がある人は, 自分で極小曲面の表示をしてみてください. program は,

nakajima@kusm.kyoto-u.ac.jp

まで送ってください.