展望講義のレポートについて

中島 啓

February 5, 1998

1 通知

- 提出したレポートを返却する. 事務室にて受け取ること.
- また, 未だ 3 回分のレポート及び感想を提出していないものは, 大至急提出すること.

この解説は, ホームページ

`http://www.kusm.kyoto-u.ac.jp/~nakajima/Lecture/Kaisetu.html`

においてあります.

2 演習問題について

2.1 総評

感想の中に, 演習問題が難しい, というものが幾つかあった. 問題自体は, 標準的なものであったのだが, 多様体上で微分をする計算に慣れていないために式をうまくまとめることができなかったものが多かったようである. 概念を理解することからさらに一歩進んで, 計算を要領良くまとめる技術を身に着けるように努力されたい.

また, 授業の内容の続きを知りたいというものもいた. 幾つか古典的な教科書 (例えば, Osserman : A survey of minimal surfaces) もあるが, 具体的な極小曲面の例を調べると言う題材から,

Karcher : Constructions of minimal surfaces
(in Surveys in Geometry : Minimal surfaces 1989 年 10 月)

を推薦したい. (しかし, 新しい文献まで調べたわけではないので, もっといいものがあるかもしれない.) 上のものは, シンポジウムで資料として配られたものなので, 購入する事はできないが図書室にあるはずである.

2.2 各問題について: 略解と講評

問題 1 逆関数定理を使う標準的な問題である. ほぼ全員できていた.

問題 2 $z = f(x, y)$ のグラフの接平面の基底として,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ f_x \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ f_y \end{pmatrix}$$

法線ベクトルとして

$$\frac{1}{\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}} \begin{pmatrix} -f_x \\ -f_y \\ 1 \end{pmatrix}$$

を取る. このとき法線ベクトルを微分して型作用素が計算できるので, 平均曲率が求まる. これもよくできていた.

問題 3 上の平均曲率の公式に代入して整理すると,

$$\frac{g''(x)}{1 + (g'(x))^2} = -\frac{h''(y)}{1 + (h'(y))^2}$$

となる. 左辺は, x の関数, 右辺は y の関数であるから, これは定数でなくてはいけない. あとは, 常微分方程式を解けば結論を得る. この手の計算は, 皆よくできていた.

問題 4 まず回転面の平均曲率を計算すると, f は, 常微分方程式

$$f'' f = 1 + (f')^2$$

を満たすことが分かる. あとはこれを解けばよい. これもよくできていた.

問題 5 $(\ ,\ )$ を第一基本形式, すなわち $\mathbb{R}^3$ の内積の接空間への制限とするとき, 定義から

$$(\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial u}) = \frac{\partial f}{\partial u}, \qquad (\operatorname{grad} f, \frac{\partial}{\partial v}) = \frac{\partial f}{\partial v}$$

となる. あとは,

$$\operatorname{grad} f = a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}$$

とおいて, 上の式に代入して a, b を定めればよい. 直交射影を具体的に求めてもそれほど面倒でないが, このやり方の方が, なぜ, 第一基本形式の逆が見えているのか一目瞭然に分かると思う. 計算が非常に大変になってしまったものが多かったのは以外であった.

問題 6 まず

$$\nabla_V^N X = (\nabla_V^N X, N)N$$

に注意する. X を $\mathbb{R}^3$ に値を持つ M 上の関数と見なし, 各成分を V 方向に微分したものを $D_V X$ と書くことにする. 定義から, $D_V X$ を法線方向に直交射影したものが $\nabla_V^N X$ である. 従って,

$$(\nabla_V^N X, N) = (D_V X, N)$$

が成り立つ. 一方で, $(X, N) = 0$ を V 方向に微分すると

$$0 = (D_V X, N) + (X, D_V N)$$

である. 従って, 型作用素の定義を思い出して

$$(D_V X, N) = -(X, D_V N) = (X, S(V))$$

を得る. これは, 微分幾何を知らないものには, ちょっと難しかったかもしれない.

問題 7 div の意味が分かりにくかったようなので, 授業の最後で第一変分公式の証明をサボったこともあり, 少し説明しよう.

Φ_t $(-\varepsilon < t < \varepsilon)$ を $\mathbb{R}^3$ の開集合 U の微分同相写像の族で次を満たすものとする.

1. ある U のコンパクト部分集合 K があって, K の外では Φ_t は恒等写像
2. Φ_0 は恒等写像
3. Φ_t は t に対して滑らかに依存する

このとき,

$$X(x) = \left.\frac{\partial \Phi_t(x)}{\partial t}\right|_{t=0} \qquad (x \in U)$$

とおくと, X は U 上のベクトル場で K の外では 0 である. このとき曲面 M の第一変分公式は,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Area}(\Phi_t(M \cap U)) = \int_M \mathrm{div}(X) dA$$

であった. これは (授業では証明しなかったが)

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \Phi_t^*(dA_t) = \mathrm{div}(X) dA \qquad (\heartsuit)$$

から直ちに従う. (但し, dA_t は $\Phi_t(M)$ の面積要素である.) ここで, X が曲面 M 上のベクトルであるとすれば, 上の Φ_t は M を保つ (i.e. $\Phi_t(M) = M$ となる) ように取れる. する

と, 上の式の左辺は, $dA_t = dA$ であって, dA の X による Lie 微分そのものであり, [松島] の p.266 の定義に一致する. あとは, 通常の Stokes の定理に持ち込めるわけである.

式(♡) の証明は, M の local patch $\varphi\colon V \to U' \cap M$ を取って, このとき$\Phi_t(M)$ の local patch が$\Phi_t\colon \varphi$ で与えられることに注意して, 面積要素

$$dA_t = \sqrt{E_tG_t - F_t^2}du \wedge dv$$

を計算して微分すればできる. この微分は, 面倒な計算になるが, 一本道である. もしくは, 式(♡) を M の各点 p 毎にチェックすればいいことに気をつけて, local patch として, $\partial/\partial u$, $\partial/\partial v$ が p において正規直交基底になっているようなものを取ってくると, 計算が非常に楽になる.

確かに慣れていないと計算仕切るのは一苦労だと思うが, もう一度各自で挑戦してもらいたい.

問題 8 x, y, z を $\mathbb{R}^3$ の座標関数の M への制限とすると, これらは M 上で “調和”(i.e. $\Delta_M x = \Delta_M y = \Delta_M z = 0$) であった. このとき, まず M 上の関数 f とベクトル場 X について

$$\mathrm{div}(fX) = f\,\mathrm{div}\,X + (X, \mathrm{grad}\,f)$$

に注意しよう. これは, Leibniz rule を使って簡単にチェックできる. 従って,

$$0 = \int_M x\Delta_M x dA = \int_M (\mathrm{div}(x\,\mathrm{grad}\,x) - (\mathrm{grad}\,x, \mathrm{grad}\,x))\,dA$$

であり, 最後の式の第一項が Stokes の定理によって 0 であるから, $\mathrm{grad}\,x = 0$ であり, x は M 上で定数である. 同様に y, z も定数になってしまって, M が一点になってしまって矛盾する.

また, この問題は最大値原理を使っても証明できるが, M は曲がっているので, 通常のラプラシアンの最大値原理はそのまま使えない. 一般の二階楕円型微分作用素の最大値原理を使わなければいけない.

問題 9 $\nabla^T_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}$ を求めよう. それには,

$$(\nabla^T_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial u}) = (\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial u})$$

に注意して,

$$\nabla^T_{\frac{\partial}{\partial u}}\frac{\partial}{\partial u} = a\frac{\partial}{\partial u} + b\frac{\partial}{\partial v}$$

とおいて, a, b を求めればよい. 結果は,

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial u}) \\ (\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial\varphi}{\partial v}) \end{pmatrix}.$$

同様に,

$$\nabla^T_{\frac{\partial}{\partial v}} \frac{\partial}{\partial u} = c\frac{\partial}{\partial u} + d\frac{\partial}{\partial v}$$

とおいて, c, d を求めると,

$$\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}) \\ (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) \end{pmatrix}$$

である. よって,

$$\mathrm{div}(\frac{\partial}{\partial u}) = a + d = \mathrm{tr} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}) & (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}) \\ (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u^2}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) & (\frac{\partial^2 \varphi}{\partial u \partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}) \end{pmatrix}$$

である. あとは, 一本道の計算で結果を得る.

もちろん, 問題 **7** を "使って", M 上のベクトル場 X について $\mathrm{div}\, X$ が面積要素の Lie 微分であることに着目すれば, 計算は容易である. 逆に, この問題の計算を使えば, 問題 7 が証明できるとも言える.

上の計算は容易であるが, 慣れていないと難しいかもしれない. しかし, $EG - F^2$ は, 第一基本形式を行列と思ったときの行列式であり, そこで行列を使ってうまくまとめることに気付いて欲しかった.

問題 10 Weierstrass の表示式を使って法線ベクトルを計算して, S^2 を問題のように $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ と見なせば, g がガウス写像になる. (法線ベクトルとして逆の向きのものを取ればその複素共役 $\overline{g}$ になる.) これは, 本当に単純な計算なので, 全員できて欲しかった.

問題 11 基本的には, 問題文に従っていけば解けるように出来ている. 唯つ (2) において, 凸関数であることから微分同相写像であることを導くところが自明でないかもしれない. 局所的に微分同相であることは, 逆関数定理から保証される. あとは単射であることをまず示し, 全射であることは, 像が開かつ閉であることによって示す.

Bernstein の定理は, 実は高次元にも拡張されていて, 7 次元以下の Euclid 空間で定義された関数のグラフが極小になると, それは平面であり, 8 次元以上では反例があることが知られている. 証明には, 幾何学的測度論が用いられる. 興味ある人は, Giusti: Minimal surfaces and functions of bounded variation を参照するとよい. この問題の証明自身もこの本から取った.