アファイン代数の表現の幾何学的構成

中島 啓 京都大学

Surveys in Geometry, Special Edition
東大数理
2003/11/1

はじめに

私は 1984 年の学部 4 年から始まり, 87 年の修士卒業まで, 東京大学において落合卓四郎先生の指導を受けました. さらに 92 年に東北大学に転出するまでは, 先生の助手を勤めました.

先生の下で学んだのは, 微分幾何学, 特に多様体上の非線形偏微分方程式でした. この解析学と微分幾何学が交錯する分野を学んで得たことは, 数学を分野に分けることは不自然, 人工的なことであり, それでも無理に分野に分けるとしたら, 二つの違う分野が交わるところにおもしろい数学が生まれる, ということでした.

現在の私の研究を無理に分野に入れようとすると, 代数幾何学と表現論が交わるところにあります. 自分の分野を指定することなく, 研究に必要なものをその都度勉強してきて自然にこのようなところにたどり着きました. このように進んで来れたのも, 先生のご指導を受けたことが大きく役立っていると思います. 先生に感謝いたします.

- 代数幾何 $=$ 単純特異点 $\mathbf{C}^2/\Gamma$ の極小特異点解消 (ALE 空間) の連接層 (あるいはインスタントン) のモジュライ空間, あるいはよく似た空間
- 表現論 $=$ アファイン・リー環, 量子アファイン (もしくはトロイダル) 代数

つながりは通常のアファイン・リー環と幾何のつながり (たとえば共形場理論) とは, まったく異なる.

ふたつの分野への応用

- モジュライ空間の指数 (中間次元のホモロジー群の次元) の母関数が保型形式になる.

  (Vafa-Witten : S-duality)
- 量子アファイン (トロイダル) 代数の指標公式

ここでは応用についてはあまり述べず, ふたつのつながりについて述べる.

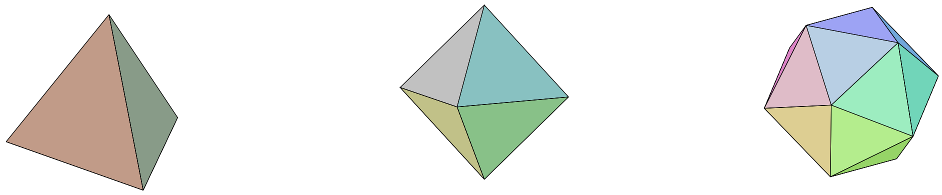
$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$: 自明でない有限部分群

分類 (Klein)

$\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{bmatrix} \,\middle|\, \varepsilon^{n+1}=1\right\}$, 巡回群 $\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$ $(n \geq 1)$

二項二面体群 位数$=4(n-1)$ $(n \geq 4)$

二項多面体群



$\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$: 自明でない有限部分群

分類 (Klein)

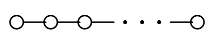
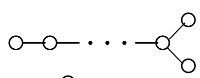
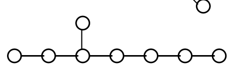
$\left\{\begin{bmatrix}\varepsilon & 0\\ 0 & \varepsilon^{-1}\end{bmatrix} \,\middle|\, \varepsilon^{n+1}=1\right\}$, 巡回群 $\mathbf{Z}/(n+1)\mathbf{Z}$ $(n \geq 1)$

二項二面体群 位数$=4(n-1)$ $(n \geq 4)$

二項多面体群

$\Longleftrightarrow$ (1. DuVal, 2. McKay による対応)

複素単純リー環 (simply-laced) の分類

A_n : $\mathfrak{sl}_{n+1}(\mathbf{C})$	
D_n $(n \geq 4)$: $\mathfrak{so}_{2n}(\mathbf{C})$	
E_n $(n=6,7,8)$: 例外型リー環	

対応 1 = DuVal

- $0 \in \mathbf{C}^2/\Gamma$: 単純特異点
- $\pi\colon M \to \mathbf{C}^2/\Gamma$: 極小特異点解消
- 例外集合 $\pi^{-1}(0) = \bigcup C_i$ $(C_i \cong \mathbf{P}^1)$
- 次の規則により図式を描く:

(1) 頂点 $\circ \longleftrightarrow C_i$,

(2) $\underset{C_i}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{C_j}{\circ} \iff C_i \cap C_j \neq \emptyset$.

$\Longrightarrow$ ADE 型のディンキン図式を得る.

対応 2 = McKay

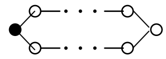
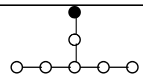
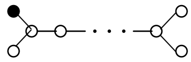
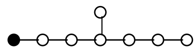
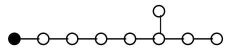
- $\{\rho_0, \rho_1, \ldots, \rho_n\}$: Γ の既約表現 ($\rho_0 = \mathrm{trivial}$)
- Q : 埋め込み $\Gamma \subset \mathrm{SL}_2(\mathbf{C})$ の定める 2 次元表現
- テンソル積の分解 $Q \otimes \rho_i = \bigoplus_j a_{ij}\rho_j$.
- 次の規則により図式を描く:

(1) 頂点 $\circ \longleftrightarrow \rho_i$,

(2) $\underset{\rho_i}{\circ}\!\!=\!\!=\!\!\underset{\rho_j}{\circ}$ $(a_{ij} = 2)$, $\underset{\rho_i}{\circ}\!\!-\!\!\!-\!\!\underset{\rho_j}{\circ}$ $(a_{ij} = 1)$, $\underset{\rho_i}{\circ}\quad\underset{\rho_j}{\circ}$ $(a_{ij} = 0)$
(**NB** $a_{ij} = a_{ji}$).

$\Longrightarrow$ ADE 型のアファイン・ディンキン図式を得る.

頂点 ρ_0 を取り除く $\Longrightarrow$ 通常のディンキン図式を得る.

タイプ	アファイン・ディンキン図式		
A_n		E_6	
D_n		E_7	
		E_8	

(有限次元) 複素単純リー環：

$$\mathfrak{g} = \langle e_i, f_i, h_i \rangle_{i=1,\ldots,n} \Big/ \left\{ \begin{matrix} [h_i, h_j] = 0, \quad [h_i, e_j] = c_{ij} e_j \\ [e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \quad \text{etc.} \end{matrix} \right\}$$

アファイン・リー環：$\widehat{\mathfrak{g}} = \langle e_i, f_i, h_i, d \rangle_{i=0,\ldots,n} /$同様の関係式

別の実現：$\widehat{\mathfrak{g}} \cong \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[z, z^{-1}] \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}d$

$$[X \otimes z^m, Y \otimes z^n] = [X, Y] \otimes z^{m+n} + m\delta_{m+n,0}(X, Y)c \quad \text{etc.}$$

ディンキン図式の頂点は，単純 (コ) ルートと対応するので...

- DuVal 対応 $\Longrightarrow$

$$\mathfrak{g} \text{ のルート格子の双対格子 } Q^\vee \xrightarrow{\sim} H_2(\pi^{-1}(0), \mathbf{Z})$$

$$\text{単純コルート } h_i \longmapsto [C_i]$$

$$\text{カルタン行列} \longleftrightarrow -\text{交叉形式}$$

- McKay 対応 $\Longrightarrow$

$$\widehat{\mathfrak{g}} \text{ のルート格子} \xrightarrow{\sim} \Gamma \text{ の表現環 } R(\Gamma)$$

$$\text{単純ルート } \alpha_i \longmapsto [\rho_i].$$

$$\text{アファイン・カルタン行列} \longleftrightarrow \text{the pairing}(\bullet, \textstyle\bigwedge_{-1} Q \otimes \bullet)$$

$$\textstyle\bigwedge_{-1} Q = \bigwedge^0 Q - \bigwedge^1 Q + \bigwedge^2 Q = 2\rho_0 - Q$$

NB. Gonzalez-Sprinberg and Verdier の直接対応

- $K(M) \overset{\text{def.}}{=} M$ 上の代数的ベクトル束の Grothendieck 群

$$\begin{aligned} R(\Gamma) &\cong \qquad K(M) \\ \rho &\longmapsto \pi^*(\mathcal{O}_{\mathbf{C}^2} \otimes \rho)^\Gamma/\text{torsion} \end{aligned}$$

- $\mathcal{R}_i \overset{\text{def.}}{=}$ image of $\rho_i \Longrightarrow \langle c_1(\mathcal{R}_i), [C_j]\rangle = \delta_{ij}$

単純リー環は, ディンキン図式の情報から (生成元と関係式によって) 復元されるので, 対応はこれでよいのだが.....

疑問. Γ と $\mathfrak{g}$ の間により直接的な対応はあるのだろうか？

すでにあった答え by Brieskorn, Slodowy

単純特異点 $\mathbf{C}^2/\Gamma$ を $\mathfrak{g}$ の中につくることができる.

新しい答え. アファイン・リー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の表現 (and more) を Γ に関係した多様体を用いて構成する.

点のヒルベルト概型

$\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$: $\mathbf{C}^2$ 内の n 個の点のヒルベルト概型
$= \{I \subset \mathbf{C}[x,y] \mid I$ はイデアル$, \dim \mathbf{C}[x,y]/I = n\}$
例. $I = \{f \mid f(p_1) = \cdots = f(p_n) = 0\}$ $(p_i \neq p_j,\ i \neq j)$

$S^n(\mathbf{C}^2) = \mathbf{C}^{2n}/S_n$: $\mathbf{C}^2$ の n 次 対称積

$\pi\colon \mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2) \to S^n(\mathbf{C}^2)$: ヒルベルト-チャウ写像 (固有になる)

事実. (1) $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ は, $S^n(\mathbf{C}^2)$ の特異点解消. 特に, $2n$ 次元の特異点を持たない多様体. (Fogarty)

(2) $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ は, 正則シンプレクティック形式を持つ. (Beauville)

(3) $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ は, hyper-Kähler 構造を持つ. (N)

箙多様体 (or Γ-ヒルベルト概型)

$\Gamma \curvearrowright \mathbf{C}^2 \Longrightarrow \Gamma \curvearrowright \mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$

$\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)^\Gamma$: 固定点集合$=$ Γ-不変なイデアル

$M(\mathbf{v}) \overset{\text{def.}}{=} \left\{ I \in \mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)^\Gamma \,\middle|\, [\mathbf{C}[x,y]/I] = \mathbf{v} \right\}$: 箙多様体
($\mathbf{v} = \Gamma$ の表現の同型類 $\in R(\Gamma)$)

$\pi\colon M(\mathbf{v}) \to \left(S^n(\mathbf{C}^2)\right)^\Gamma$: ヒルベルト-チャウ写像の制限

命題. (1) $M(\mathbf{v})$ は非特異な多様体で次元は
$2(\rho_0, \mathbf{v}) - (\mathbf{v}, \bigwedge_{-1} Q \otimes \mathbf{v})$.

(2) $M(\mathbf{v})$ は連結. (Crawley-Boevey)

例. (1) (自明). $M(0) = \{I = \mathbf{C}[x,y]\}$: 一点

(2) (自明). $M(\rho_0) = \{\mathfrak{m}_0 \subset \mathbf{C}[x,y]\}$: 一点

(3) (Kronheimer, Ginzburg-Kapranov, Ito-Nakamura).

$\mathbf{v} =$ 正則表現

$\Longrightarrow$
- $M(\mathbf{v}) = \mathbf{C}^2/\Gamma$ の最小特異点解消
- $\pi\colon M(\mathbf{v}) \to (S^{\#\Gamma}(\mathbf{C}^2))^\Gamma = \mathbf{C}^2/\Gamma$
- $M(\mathbf{v}) \setminus \pi^{-1}(0) \cong \mathbf{C}^2 \setminus \{0\}/\Gamma$
  $=$ 自由な Γ-軌道に対応するイデアル

アファイン・リー環の幾何学的構成

- $M \overset{\text{def.}}{=} \bigsqcup_{\mathbf{v}} M(\mathbf{v}) = \bigsqcup_n \mathrm{Hilb}^n\,(\mathbf{C}^2)^\Gamma$
- $M_0(\infty) \overset{\text{def.}}{=} \bigcup_n S^n(\mathbf{C}^2)^\Gamma$,
  ただし $S^n(\mathbf{C}^2)^\Gamma \subset S^{n+1}(\mathbf{C}^2)^\Gamma$ は, $C \mapsto C + [0]$ による.
- $L(\mathbf{v}) = M(\mathbf{v}) \cap \pi^{-1}(0)$ $(\pi\colon M(\mathbf{v}) \to (S^n(\mathbf{C}^2))^\Gamma)$
- $L \overset{\text{def.}}{=} \bigsqcup_{\mathbf{v}} L(\mathbf{v})$
- $Z \overset{\text{def.}}{=} M \times_{M_0(\infty)} M = \{(I_1, I_2) \mid \pi(I_1) - \pi(I_2) \in \mathbf{Z}[0]\}$
  $= \bigsqcup_{\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2} Z(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) \quad (Z(\mathbf{v}^1,\mathbf{v}^2) = Z \cap M(\mathbf{v}^1) \times M(\mathbf{v}^2))$

命題. (1) $L(\mathbf{v})$ は, $M(\mathbf{v})$ のラグランジアン部分多様体.

(2) $Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)$ は $M(\mathbf{v}^1) \times M(\mathbf{v}^2)$ のラグランジアン部分多様体.

合成積を考えよう:

$$*\colon H_{\mathrm{top}}(Z, \mathbf{C}) \otimes H_{\mathrm{top}}(Z, \mathbf{C}) \to H_{\mathrm{top}}(Z, \mathbf{C})$$

ただし $c * c' = p_{13*}\left(p_{12}^*(c) \cap p_{23}^*(c')\right)$. ($\cap$ は $M \times M \times M$ の中で取る.)

より正確には次の部分空間で well-defined

$$H_{\mathrm{top}}(Z, \mathbf{C}) \subset \prod_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2} H_{2\dim Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2)}(Z(\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2), \mathbf{C})$$

次を満たす元 $(F_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2})$ からなる:

(1) $\mathbf{v}^1$ を固定すると, 有限個の $\mathbf{v}^2$ をのぞき $F_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2} = 0$

(2) $\mathbf{v}^2$ を固定すると, 有限個の $\mathbf{v}^1$ をのぞき $F_{\mathbf{v}^1, \mathbf{v}^2} = 0$

$\Longrightarrow$ $H_{\mathrm{top}}(Z, \mathbf{C})$ は, 結合法則をみたす代数で, 単位元は $[\Delta]$ で与えられる.

$H_{\mathrm{top}}(L,\mathbf{C}) \overset{\text{def.}}{=} \bigoplus_{\mathbf{v}} H_{2\dim L(\mathbf{v})}(L(\mathbf{v}),\mathbf{C})$.

$\Longrightarrow$ $H_{\mathrm{top}}(L,\mathbf{C})$ は, ふたたび合成積により表現空間となる.

定理. $\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \Gamma$ に対応したアファイン・リー環 $\widehat{\mathfrak{g}}$ の普遍展開環

(1) $\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\exists} H_{\mathrm{top}}(Z,\mathbf{C})$: 代数の準同型

(2) $H_{\mathrm{top}}(L,\mathbf{C})$ は, いわゆる basic 表現 (特に既約).

注意. (1) 次に動機付けされた.

(a) Ringel, Lusztig の仕事 : 量子 (アファイン) 展開環の上三角部分の構成

(b) Ginzburg の仕事 : ワイル群の群環の合成積による構成 (Springer 表現)

(2) $\mathrm{Hilb}^n(\mathbf{C}^2)$ を高い階数の類似物で置き換えれば, 任意の既約可積分表現が同様に構成できる.

(3) (除外された)$\Gamma = 1$ の場合

- 無限次元ハイゼンベルグ代数 $\xrightarrow{\exists} H_*(Z,\mathbf{C})$
- $H_*(L,\mathbf{C})$: (ボゾン) Fock 空間 = 無限個の変数の多項式環

(1) の証明. $\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}})$ の生成元の行き先を定め, 定義関係式をチェックする.

$$\mathbf{U}(\widehat{\mathfrak{g}}) = \langle e_i, f_i, h_i, d\rangle_{i=0,\dots,n} \Big/ \left\{ \begin{matrix} [h_i,h_j]=0, & [h_i,e_j]=c_{ij}e_j \\ [e_i,f_j]=\delta_{ij}h_i, & \text{etc.} \end{matrix} \right\}$$

$$h_i \text{ の像} = \sum_{\mathbf{v}} (\delta_{0i} - (\rho_i, \mathbf{C}\otimes\mathbf{v}))[\,\Delta M(\mathbf{v})]$$

$$d \text{ の像} = \sum_{\mathbf{v}} (\rho_0, \mathbf{v})[\Delta(M(\mathbf{v}))].$$

e_i の像 $=$ [ヘッケ対応]

$$\sum_{\mathbf{v}} [\{ (I_1, I_2) \in M(\mathbf{v}) \times M(\mathbf{v}+\rho_i) \mid I_1 \supset I_2\}]\,.$$

$$f_i \text{ の像} = \sum \pm [I_1 \leftrightarrow I_2]$$

(2) の証明 は, (柏原の意味の) 結晶の構造が, L の既約成分の集合に入ることがポイントになる. (定義は Lusztig により, 量子アファイン環の basic 表現と同じであることの証明は, 柏原-斎藤による.)

$$\widetilde{e}_i, \widetilde{f}_i \colon \operatorname{Irr} L \to \operatorname{Irr} L \sqcup \{0\}$$

$$\varepsilon_i(\Lambda) = \max\{n \mid \widetilde{e}_i^{\,n}\Lambda \neq 0\}, \qquad \varphi_i(\Lambda) = \max\{n \mid \widetilde{f}_i^{\,n}\Lambda \neq 0\}$$

$$\Longrightarrow f_i[\Lambda] = \pm r[\widetilde{f}_i\Lambda] + \sum_{\Lambda' : \varepsilon_i(\Lambda') > r} c_{\Lambda'}[\Lambda'] \qquad (r = \varepsilon_i(\Lambda)+1)$$

NB. 基底 $\{\operatorname{Irr} L\}$ は, 大域結晶基底の $q=1$ における特殊化とは異なる.

低い次数のホモロジー群は？

各 $d \in \mathbf{Z}$ に対し

$$H_{\mathrm{top}-d}(L,\mathbf{C}) \overset{\text{def.}}{=} \bigoplus_{\mathbf{v}} H_{2\dim L(\mathbf{v})-d}(L(\mathbf{v}),\mathbf{C})$$

は, $H_{\mathrm{top}}(Z,\mathbf{C})$ の表現になる.

$\Longrightarrow$ 今の場合は, basic 表現の直和になる. 重複度も具体的に書ける.

NB. 高い階数のときは, いろいろな既約可積分表現が現われ, 重複度はある箙多様体の交叉ホモロジー群の次元で表わされる. この次元を計算するアルゴリズムがあるが, 具体的な式は見つかっていない.

Drinfeld-神保の量子展開環

$\mathfrak{g}$ を有限次元複素単純リー環 (より一般にカッツ・ムーディー・リー環) とするとき, その普遍展開環 $\mathbf{U}(\mathfrak{g})$

- 生成元 : e_i, f_i, h_i
- 関係式 : $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} h_i$, etc.

Drinfeld-神保の量子展開環 $\mathbf{U}_q(\mathfrak{g}) = \mathbf{U}(\mathfrak{g})$ の変形 :

- $\mathbf{Q}(q)$ 上の代数
- 生成元 : e_i, f_i, q^{h_i}
- 関係式 : $e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{q^{h_i} - q^{-h_i}}{q - q^{-1}}$(simply-laced でないときは不正確), etc

量子トロイダル代数

- トロイダル・リー環 $\mathbf{L}\widehat{\mathfrak{g}} = \widehat{\mathfrak{g}} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[z, z^{-1}]$：アファイン・リー環のループ・リー環

× カッツ・ムーディー・リー環ではない.

× したがって, Drinfeld-神保の量子展開環の定義は, $\mathbf{L}\widehat{\mathfrak{g}}$ には適用できない.

- 量子アファイン代数の Drinfeld による新しい実現の真似をして定義する.

  = アファイン・リー環をループ・リー環として実現するやり方の q-analog $\quad \widehat{\mathfrak{g}} = \mathbf{L}\mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}d$

$\mathbf{U}_q(\mathbf{L}\widehat{\mathfrak{g}})$：量子トロイダル代数

= $\mathbf{Q}(q)$-algebra で, 生成元

$$e_{i,r}, f_{i,r}, q^h, h_{i,m}\ \left(i = 0, \ldots, n, r \in \mathbf{Z}, h \in \widehat{P}^\vee, m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}\right)$$

と定義関係式 (e.g., q^h, $h_{i,m}$: 可換) で定められる.

$\mathbf{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}}) \subset \mathbf{U}_q(\mathbf{L}\widehat{\mathfrak{g}})$: $e_{i,0}$, $f_{i,0}$, q^h で生成される部分環

V : l–可積分表現 $\overset{\text{def}}{\iff}$

(1) $\mathbf{U}_q(\widehat{\mathfrak{g}})$ に関するウェイト空間分解を持つ

(2) $e_{i,r}$, $f_{i,r}$ は, locally nilpotent に働く

V : l–最高ウェイト表現 $\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists m_0 \in V$ such that

(1) $e_{i,r}m_0 = 0$, $V = \mathbf{U}_q(\mathbf{L}\widehat{\mathfrak{g}}) \cdot m_0$

(2) q^h, $h_{i,m}$ の同時固有ベクトル

$U_q(L\hat{\mathfrak{g}})$ の幾何学的な構成

- 作用 $\mathbf{C}^* \curvearrowright \mathbf{C}^2 : (x,y) \mapsto (qx, qy)$, は Γ-作用と可換である.
  $\Longrightarrow \mathbf{C}^* \curvearrowright M, Z, L$
- $K^{\mathbf{C}^*}(Z) = \mathbf{C}^*$-同変連接層の Grothendieck 群
- $K^{\mathbf{C}^*}(Z)$: 合成積によって $R(\mathbf{C}^*) = \mathbf{Z}[q, q^{-1}]$ 上の結合法則をみたす環となる.
- $K^{\mathbf{C}^*}(L)$: その表現空間

定理. $\mathbf{U}_q^{\mathbf{Z}}(\mathbf{L}\hat{\mathfrak{g}})$: ある $\mathbf{Z}[q, q^{-1}]$-部分環 (整形式と予想される)

(1) $\mathbf{U}_q^{\mathbf{Z}}(\mathbf{L}\hat{\mathfrak{g}}) \xrightarrow{\exists} K^{\mathbf{C}^*}(Z)/\,\mathrm{torsion}$: 代数の準同型

(2) $K^{\mathbf{C}^*}(L) \otimes_{\mathbf{Z}[q,q^{-1}]} \mathbf{Q}(q)$ 既約

注意. (1) Kazhdan-Lusztig, Ginzburg : アファイン・ヘッケ環についての同様の構成 (Deligne-Langlands conjecture)

(2) Ginzburg-Vasserot : $\mathbf{U}_q^{\mathbf{Z}}(\mathbf{L}\,\mathfrak{sl}_{n+1})$. の同様の構成 ($n$-step 旗多様体を用いる)

(3) Varagnolo-Vasserot, Saito-Takemura-Uglov : $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}_{n+1}$ のときの上の表現の純代数的な構成

高い階数の場合の簡単なコメント

- 直積 $\prod_{i=0}^n \mathrm{GL}(n_i, \mathbf{C})$ が Z(の類似) に作用する.

量子トロイダル代数の方では, $q = \varepsilon \in \mathbf{C}^*$ と特殊化する.

- 既約 l-可積分表現

$\longleftrightarrow$ 多項式 $P_i(u)$ $(i = 0, \ldots, n)$ (ただし $P_i(0) = 1$ と正規化). (Drinfeld 多項式の類似)

$\longleftrightarrow$ 半単純元 $s \in \prod_{i=0}^n \mathrm{GL}(n_i, \mathbf{C})$(共役類)

- $L(P) =$ 既約表現

$M(P) = K^{\prod \mathrm{GL}(n_i,\mathbf{C})\times\mathbf{C}^*}(L)$ の (s, ε) における特殊化

$\Longrightarrow \exists\, [M(P) : L(Q)]$ を計算するアルゴリズム .

(Kazhdan-Lusztig 多項式の類似)

参考

リー環の基本関係式. (生成元 e_i, f_i, h_i) ($i \in$ ディンキン図式の頂点)

$$
\begin{gathered}
[e_i, f_j] = \delta_{ij} h_i, \\
[h_i, h_j] = 0, \\
[h_i, e_j] = C_{ij} e_j, \quad [h_i, f_j] = -C_{ij} f_j \\
\operatorname{ad} e_i^{1-c_{ij}} e_j = 0, \quad \operatorname{ad} f_i^{1-c_{ij}} f_j = 0, \quad (i \neq j)
\end{gathered}
$$

ただし, C_{ij} はカルタン行列である. アファイン・リー環のときには, さらに d という生成元を付け加え,

$$
[d, h_i] = 0, \quad [d, e_j] = \delta_{0j} e_j, \quad [d, f_j] = -\delta_{0j} e_j
$$

という関係式を加える. カルタン行列が可逆でないのがその理由. (付け加えないものを考えることもある.)

量子展開環の基本関係式. (生成元 e_i, f_i, h_i) ($i \in$ ディンキン図式の頂点)

$$e_i f_j - f_j e_i = \delta_{ij} \frac{t_i - t_i^{-1}}{q_i - q_i^{-1}},$$
$$q^{h_i} q^{h_j} = q^{h_j} q^{h_i},$$
$$q^{h_i} e_j q^{-h_j} = q^{C_{ij}} e_j, \quad q^{h_i} f_j q^{-h_j} = q^{-C_{ij}} f_j$$
$$\sum_{p=0}^{1-C_{ij}} (-1)^p e_i^{(p)} e_j e_i^{(1-C_{ij}-p)} = 0,$$
$$\sum_{p=0}^{1-C_{ij}} (-1)^p f_i^{(p)} f_j f_i^{(1-C_{ij}-p)} = 0, \quad (i \neq j)$$

ただし,

$$t_i = q^{(\alpha_i,\alpha_i)h_i/2}, \quad q_i = q^{(\alpha_i,\alpha_i)/2},$$
$$e_i^{(n)} = e_i^n/[n]_i!, \quad f_i^{(n)} = f_i^n/[n]_i!,$$
$$[n]_i! = [n]_i[n-1]_i \cdots [1]_i, \quad [n]_i = \frac{q_i^n - q_i^{-n}}{q_i - q_i^{-1}}$$

量子アファイン環のときは, 上と同様に q^d を付け加え,

$$q^d q^{h_i} = q^{h_i} q^d, \quad q^d e_j q^{-d} = q^{\delta_{0j}} e_j, \quad q^d f_j q^{-d} = q^{-\delta_{0j}} f_j$$

を課す.

アファイン・リー環のループ・リー環の中心拡大としての表示

$$\mathbf{L}\mathfrak{g} = \mathfrak{g} \otimes_{\mathbf{C}} \mathbf{C}[z, z^{-1}]$$
$$\widehat{\mathfrak{g}} = \mathbf{L}\mathfrak{g} \oplus \mathbf{C}c \oplus \mathbf{C}d$$
$$c \text{ は中心元}$$
$$[d, X \otimes z^m] = mX \otimes z^m$$
$$[X \otimes z^m, Y \otimes z^n] = [X, Y] \otimes z^{m+n} + m\delta_{m+n,0}(X, Y)c$$

量子アファイン環の Drinfeld 表示

- 生成元 : $e_{i,r}, f_{i,r}$ ($i \in I$, $r \in \mathbf{Z}$), $q^{\pm h_i}$, $q^{\pm c/2}$, $q^{\pm d}$, $h_{i,m}$ ($i \in I$, $m \in \mathbf{Z} \setminus \{0\}$)
- 基本関係式

$$q^{\pm c/2} \text{ は中心元}$$
$$q^0 = 1, \quad q^{h_i} q^{-h_i} = 1, \quad q^d q^{-d} = 1, \quad q^{c/2} q^{-c/2} = 1,$$
$$[q^{h_i}, q^{h_j}] = 0, \quad [q^{h_i}, h_{j,m}] = 0, \quad [q^{h_i}, q^d] = 0,$$

$$
\begin{aligned}
&\psi_i^{\pm}(z)\psi_j^{\pm}(w) = \psi_i^{\pm}(w)\psi_j^{\pm}(z), \\
&\psi_i^{-}(z)\psi_j^{+}(w) = \frac{(z - q^{-(\alpha_i,\alpha_j)}q^{c}w)(z - q^{(\alpha_i,\alpha_j)}q^{-c}w)}{(z - q^{(\alpha_i,\alpha_j)}q^{c}w)(z - q^{-(\alpha_i,\alpha_j)}q^{-c}w)}\psi_j^{+}(w)\psi_i^{-}(z), \\
&[q^d, q^{h_i}] = 0, \quad q^d h_{i,m} q^{-d} = q^m h_{i,m}, \\
&q^d e_{i,r} q^{-d} = q^r e_{i,r}, \quad q^d f_{i,r} q^{-d} = q^r f_{i,r}, \\
&q^{h_i} e_{j,r} q^{-h_i} = q^{\langle h_i,\alpha_j\rangle} e_{j,r}, \quad q^{h_i} f_{j,r} q^{-h_i} = q^{-\langle h_i,\alpha_j\rangle} f_{j,r}, \\
&(q^{\pm sc/2}z - q^{\pm\langle h_i,\alpha_j\rangle}w)\psi_j^{s}(z)x_i^{\pm}(w) \\
&\qquad = (q^{\pm\langle h_i,\alpha_j\rangle}q^{\pm sc/2}z - w)x_i^{\pm}(w)\psi_j^{s}(z), \\
&\left[x_i^{+}(z), x_j^{-}(w)\right] = \frac{\delta_{ij}}{q_i - q_i^{-1}}\left\{\delta\left(q^{c}\frac{w}{z}\right)\psi_i^{+}(q^{c/2}w) - \delta\left(q^{c}\frac{z}{w}\right)\psi_i^{-}(q^{c/2}z)\right\}, \\
&(z - q^{\pm 2}w)x_i^{\pm}(z)x_i^{\pm}(w) = (q^{\pm 2}z - w)x_i^{\pm}(w)x_i^{\pm}(z), \\
&\prod_{p=1}^{-\langle\alpha_i,h_j\rangle}(z - q^{\pm(b'-2p)}w)x_i^{\pm}(z)x_j^{\pm}(w) \\
&\qquad = \prod_{p=1}^{-\langle\alpha_i,h_j\rangle}(q^{\pm(b'-2p)}z - w)x_j^{\pm}(w)x_i^{\pm}(z), \quad \text{if } i \neq j,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{\sigma\in S_b}\sum_{p=0}^{b}(-1)^p \begin{bmatrix} b \\ p \end{bmatrix}_{q_i} & x_i^{\pm}(z_{\sigma(1)})\cdots x_i^{\pm}(z_{\sigma(p)})x_j^{\pm}(w)x_i^{\pm}(z_{\sigma(p+1)}) \\
&\cdots x_i^{\pm}(z_{\sigma(b)}) = 0, \quad \text{if } i \neq j,
\end{aligned}
$$

ただし $q_i = q^{(\alpha_i,\alpha_i)/2}$, $s = \pm$, $b = 1 - \langle h_i, \alpha_j\rangle$, $b' = -(\alpha_i, \alpha_j)$, で, S_b は b 個の文字の対称群. また $\delta(z)$, $x_i^+(z)$, $x_i^-(z)$, $\psi_i^{\pm}(z)$ は, 次の母関数である:

$$
\begin{aligned}
&\delta(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} z^r, \\
&x_i^{+}(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} e_{i,r}z^{-r}, \qquad x_i^{-}(z) \overset{\text{def.}}{=} \sum_{r=-\infty}^{\infty} f_{i,r}z^{-r}, \\
&\psi_i^{\pm}(z) \overset{\text{def.}}{=} q^{\pm(\alpha_i,\alpha_i)h_i/2}\exp\left(\pm(q_i - q_i^{-1})\sum_{m=1}^{\infty} h_{i,\pm m}z^{\mp m}\right).
\end{aligned}
$$

References

[1] V. Baranovsky, V. Ginzburg and A. Kuznetsov, *Quiver varieties and a noncommutative* $\mathbb{P}^2$, Comp. Math. **134** (2002), 283–318.

[2] W. Barth, C. Peters and A. Van de Ven, *Compact complex surfaces*, A Series of Modern Surveys in Math. **4**, Springer-Verlag, 1984.

[3] A. Beilinson, J. Bernstein and P. Deligne, *Faisceaux pervers*, Astérisque **100** (1982).

[4] W. Borho and R. MacPherson, *Partial resolutions of nilpotent varieties*, Astérisque **101–102** (1983), 23–74.

[5] T. Bridgeland, A. King and M. Reid, *The McKay correspondence as an equivalence of derived categories*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 535–554.

[6] H. Cassens and P. Slodowy, *Kleinian singularities and quivers*, in *Singularities (Oberwolfach, 1996)*, 263–288, Progr. Math., **162**, Birkhäuser, Basel, 1998.

[7] V. Chari and A. Pressley, *Quantum affine algebras and their representations*, in *Representations of groups (Banff, AB, 1994)*, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1995, pp. 59–78.

[8] N. Chriss and V. Ginzburg, *Representation theory and complex geometry*, Progress in Math., Birkhäuser, 1997.

[9] W. Crawley-Boevey, *Geometry of the moment map for representations of quivers*, Compositio Math. **126** (2001), 257–293.

[10] S.K. Donaldson and P.B. Kronheimer, *The geometry of four-manifold*, Oxford Math. Monographs, Oxford Univ. Press, 1990.

[11] V.G. Drinfel'd, *A new realization of Yangians and quantized affine algebras*, Soviet math. Dokl. **32** (1988), 212–216.

[12] P. Etingof and V. Ginzburg, *Symplectic reflection algebras, Calogero-Moser space, and deformed Harish-Chandra homomorphism*, Invent. Math. **147** (2002), 243–348.

[13] I.B. Frenkel, N. Jing and W. Wang, *Vertex representations via finite groups and the McKay correspondence*, Internat. Math. Res. Notices **2000**, no. 4, 195–222.

[14] G. Gonzalez-Sprinberg and J.L. Verdier, *Construction géometrique de la correspondence de McKay*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **16** (1983), 409–449.

[15] M. Haiman, a talk at CRM, Université de Montréal, June 2002.

[16] D. Huybrechts and M. Lehn, *Stable pairs on curves and surfaces*, J. Algebraic Geom. **4** (1995), 67–104.

[17] Y. Ito and I. Nakamura, *Hilbert schemes and simple singularities*, in *Recent Trends in Algebraic Geometry* – EuroConference on Algebraic Geometry (Warwick, July 1996), ed. by K. Hulek and others, CUP, 1999, pp. 151–233.

[18] A. Kapustin, A. Kuznetsov and D. Orlov, *Noncommutative instantons and twistor transform*, Comm. Math. Phys. **221** (2001), 385–432.

[19] M. Kashiwara and Y. Saito, *Geometric construction of crystal bases*, Duke Math. **89** (1997), 9–36.

[20] P.B. Kronheimer, *The construction of ALE spaces as a hyper-Kähler quotients*, J. Differential Geom. **29** (1989) 665–683.

[21] P.B. Kronheimer and H. Nakajima, *Yang-Mills instantons on ALE gravitational instantons*, Math. Ann. **288** (1990), 263–307.

[22] A. Kuznetsov, *Quiver varieties and Hilbert schemes*, preprint, arXiv:math.AG/0101092.

[23] G. Lusztig, *Canonical bases arising from quantized enveloping algebras*, J. Amer. Math. Soc. **3** (1990), 447–498.

[24] ———, *On quiver varieties*, Adv. in Math. **136** (1998), 141–182.

[25] ———, *Semicanonical bases arising from enveloping algebras*, Adv. Math. **151** (2000), 129–139.

[26] J. McKay, *Graphs, singularities and finite groups*, Proc. Sympos. Pure Math. **37** Amer. Math. Soc. (1980), 183–186.

[27] H. Nakajima, *Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **76** (1994), 365–416.

[28] ———, *Quiver varieties and Kac-Moody algebras*, Duke Math. J. **91** (1998), no. 3, 515–560.

[29] ———, *Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces*, Univ. Lect. Ser. **18**, AMS, 1999.

[30] ———, *Ebira tayoutai to Ryousi affine kan (Quiver varieties and quantum affine algebras)* (in Japanese), Suugaku **52** (2000), 337–359.

[31] ———, *Quiver varieties and finite dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), 145–238.

[32] ———, *Quiver varieties and tensor products*, Invent. Math., **146** (2001), 399–449.

[33] ———, *t-analogue of the q-characters of finite dimensional representations of quantum affine algebras*, in *Physics and Combinatorics*, Proceedings of the Nagoya 2000 International Workshop, World Scientific, 2001, 195–218.

[34] ———, *Quiver varieties and t–analogs of q–characters of quantum affine algebras*, preprint, arXiv:math.QA/0105173.

[35] ———, *t–analogs of q–characters of Kirillov-Reshetikhin modules of quantum affine algebras*, Represent. Theory **7** (2003), 259–274 (electronic).

[36] N. Nekrasov and A. Schwarz, *Instantons on noncommutative* $\mathbf{R}^4$*, and* $(2,0)$ *superconformal six-dimensional theory*, Comm. Math. Phys. **198** (1998), 689–703.

[37] C.M. Ringel, *Hall algebras and quantum groups*, Invent. Math. **101** (1990), 583–592.

[38] Y. Saito, *Crystal bases and quiver varieties* Math. Ann. **324** (2002), 675–688.

[39] Y. Saito, K. Takemura and D. Uglov, *Toroidal actions on level* 1 *modules of* $U_q(\widehat{\mathrm{sl}}_n)$, Transform. Groups **3** (1998), 75–102.

[40] P. Slodowy, *Simple singularities and simple algebraic groups*, Lecture Notes in Math. **815**, Springer, Berlin, 1980.

[41] M. Varagnolo and E. Vasserot, *Double-loop algebras and the Fock space*, Invent. Math. **133** (1998), 133–159.

[42] ———, *On the K-theory of the cyclic quiver variety*, Internat. Math. Res. Notices **1999**, no. 18, 1005–1028.

[43] ———, *Standard modules of quantum affine algebras*, Duke Math. J. **111** (2002), 509–533.

[44] W. Wang, *Hilbert schemes, wreath products, and the McKay correspondence*, preprint, arXiv:math.AG/9912104.