自己双対多様体のツイスター空間

藤木 明
(大阪大学大学院理学研究科)

0. 序文

コンパクトで向きづけられた 4 次元 C^∞ 多様体上に自己双対な Riemannian 計量があたえられると, これに付随してツイスター空間とよばれる 3 次元のコンパクト複素多様体が定まる . Taubes による一般の存在定理により, 自己双対計量を許す多様体の位相構造は極めて多岐にわたること, したがってこのようにして 3 次元コンパクト複素多様体の大きな類が生じていることがわかる . 本稿では, ツイスター空間として生ずるこのような複素多様体が, コンパクト複素多様体全体が示す地形図の中でどのような分布を示しているか, を説明してみたい.

ツイスター空間は, そのほとんどすべてが非ケーラー多様体である. 非ケーラー多様体を構成する方法は, 今日までかなり蓄積されてきてはいるが, 全体としてみるとそれらは散発的である. (実際, 統一的な方法は期待できないと思われる.) ツイスター空間の構成法もそのうちの一つであるが, それらの中ではかなり手の込んだ方法と言えるであろう . これをまず, 自己双対多様体に関する基礎事項とともに 1 節で概説する.

複素多様体全体をひとつの宇宙にたとえるとき, 複素多様体は一様に分布しているわけではない . 多様体が極めて稠密に存在する射影多様体をいわば宇宙の中心として, その周辺部を, ケーラー多様体, Moishezon 多様体がとりまいているわけだが, その外側は現在のところほとんど未知の世界だと言ってよいだろう . ツイスター空間から来る例は, その外

側にも局所的には極めて多様体が密に分布する部分が存在することを示しているのだが... . 2 節では, このあたりを簡単に説明する.

最後に 3 節でツイスター空間として生ずる複素多様体の分布を示す諸結果を 2 節の記述に対応する形で述べる .

1. ツイスター空間

1.1 自己双対多様体

この節についての詳細はたとえば [13][2] を参照 .

1.1.1 その定義

M を向き付けられた 4 次元連結 C^∞ 多様体とし, g を M 上の C^∞ リーマン計量とする. よく知られているように g から Levi-Civita 接続とよばれる M 上の接続 ∇ が自然に定まる . ∇ から決まる (リーマン) 曲率テンソルを R とする. 一般に (任意次元において) R は, Weyl 共形曲率テンソル W と, R のリッチテンソルのみから定まるあるテンソル ρ の和 $R = W + \rho$ に自然に分解する . W の意味は (一般に 4 次元以上の場合に成立する) 同値条件

$$W \equiv 0 \Leftrightarrow g \text{ が共形的に平坦} \tag{1}$$

(すなわち局所座標と正値関数 ϕ が存在して $g = \phi \sum_i dx_i^2$ と書ける), であたえられる .

さて, いま考えている 4 次元の場合には, Weyl テンソル W はさらにその自己双対部分 W_+ と反自己双対部分 W_- の和に分解する:

$$W = W_+ + W_-. \tag{2}$$

したがって, $W_\pm$ のいずれかの消滅を仮定することにより, 共形的半平坦ともいうべき概念が生ずることになる . これが Atiyah-Hitchin-Singer [1] による (反) 自己双対多様体の概念である .

定義. (M,g) を 4 次元 C^∞ リーマン多様体とする. (2) において $W_- \equiv 0$ となるとき (M,g) を 自己双対多様体, $W_+ \equiv 0$ となるとき 反自己双対多様体 という.

注意. 1) W および $W_\pm$ は, g の共形類 $[g]$ のみに依存し, したがって, (反) 自己双対性は, 共形多様体 $(M,[g])$ に対して定まる概念である.

2) M の向きを逆にすると, W_+ と W_-, したがって自己双対性と反自己双対性は入れ替わる.

1.1.2. $W_\pm$ について.

TM を T の C^∞ 接束, T^*M を余接束とし, $k \geq 1$ に対し $\wedge^k = \wedge^k T^*M$ (外積) とおく. M の向きから Hodge $*$-作用素 $* : \wedge^2 \to \wedge^2$ がさだまり, $*^2$ は恒等写像となる. $*$ の ± 1-固有値に応じて, ベクトル束の C^∞ 分解

$$\wedge^2 = \wedge^+ \oplus \wedge^- \tag{3}$$

をうる. 一方, Riemann 計量からさだまる自然な同型 $TM \cong T^*M$ により両者を同一視することにより, W を束準同型 $\wedge^2 \to \wedge^2$ とみなすことができるが, このとき W は上の分解 (3) を保存する. これが分解 (2) をあたえる.

1.1.3 初期の例

定義の導入時点で知られていたコンパクトな自己双対多様体の例をあげてみよう.

a) (1) により, 共形的に平坦な多様体は自己双対であり, そのもっとも基本的な例を提供する. それらは, 単連結ならば標準計量を持つ S^4, 基本群がアーベル群となる場合は本質的に $S^1 \times S^3$ (Hopf 曲面) とトーラス $(S^1)^4$, 一般には iv) 双曲計量を入れた 4 次元開球 D を固定点のない余コンパクト不連続群でわった商空間 D/Γ が典型例である.

b) (局所) 等質空間の例として

i) Fubini-Study 計量を持つ複素射影平面 $\boldsymbol{P}^2$, および

ii) その双対, すなわち Bergman 計量を入れた複素 2 次元開球 B の固定点のない余コンパクト不連続群による商空間 B/Γ .

iii) Fubini-Study 計量を持つ複素射影直線 $\boldsymbol{P}$ と Poincare 計量をもつ種数 $g \geq 2$ のコンパクト Riemann 面 Σ_g の直積 $\boldsymbol{P} \times \Sigma_g$ は, スカラー曲率 0 のケーラー曲面となり, したがって向きを逆にすると自己双対である[1].

(ただし向きはいずれも複素構造から定まるものを考える.)

c) Calabi-Yau 曲面, すなわち Ricci 曲率 0 の コンパクトケーラー曲面 (M, g) は反自己双対である[2] . このような複素曲面 M は第一チャン類 $c_1(M) = 0$ で特徴付けられ, 複素トーラスまたは K3 曲面を有限次不分岐被覆にもつ. 後者はまとめて 4 次元のハイパーケーラー多様体といってもよい .

1.1.4 自己双対多様体の型

自己双対多様体の大分類として一般の共形多様体に対する型による分類が有効である .

定義 (型). $(M, [g])$ を共形多様体とする. 一般に (山辺問題の解決により) 共形類 $[g]$ の中にそのスカラー曲率が定数 c である計量が存在する. 定数 c の符号はそのような計量の取り方に依存せず, 共形類のみにより定まる . c が正の場合 (0 の場合, 負の場合) $(M, [g])$ はそれぞれ + 型, 0 型, − 型 とよび, − 型でないとき 非負型 である, ということにする.

1.1.3 の例に対しては, その型は次のようになる .

$$
\begin{aligned}
&+ \text{型} \quad S^4, \boldsymbol{P}^2, S^1 \times S^3 \\
&0 \text{型} \quad \boldsymbol{P} \times \Sigma_g, (S^1)^4, \text{Calabi-Yau 曲面} \\
&- \text{型} \quad D/\Gamma, B/\Gamma \ .
\end{aligned}
$$

0-型ではトーラス $(S^1)^4$ は Calabi-Yau 曲面の特殊な場合ともみなせる .

---

[1]ケーラー曲面 (M, g) の場合, (M, g) 反自己双対 $\Leftrightarrow$ スカラー曲率 $\equiv 0$.

[2]脚注 1) を参照

1.1.5 自己双対多様体の型と位相

正整数 m に対し, $m\boldsymbol{P}^2$ で複素射影平面 m 個の連結和を表し $0\boldsymbol{P}^2$ で 4 次元球面 S^4 を表す．$b_i(M)$ を M の i 次ベッチ数とする. 非負型の自己双対多様体には非常に強い位相的制限がつく [14].

定理 $(M,[g])$ をコンパクト非負型自己双対多様体とする. このとき次のいずれかが成立する.

a) $H^2(M,\boldsymbol{R})$ 上の交差形式は正定値.

b) M は 0-型で, スカラー曲率 $\equiv 0$ の計量 $g\in[g]$ をとると, $(\bar{M},g)$ はケーラー曲面となる. (ただし $\bar{M}$ は M の向きを逆にしたもの.)

a) の場合 M が単連結なら M は $m\boldsymbol{P}^2, m=b_2(M)$, と同相になる.

注意. 1. a) の場合次が成立する.

$$b_2=0 \Leftrightarrow M \text{ が共形的に平坦.}$$

ここで $b_1\neq 0$ の典型例は $S^1\times S^3(b_1=1,b_2=0)$ の場合である. この場合自己双対計量は, 共形的に平坦な Hopf 曲面上の次のエルミート計量となる．

$$(4)\quad M=(\boldsymbol{C}^2-\{0\})/\langle h\rangle, h(z_1,z_2)=(\alpha z_1,\beta z_2), |\alpha|=|\beta|\neq 1$$
$$g=(dz_1d\bar{z}_1+dz_2d\bar{z}_2)/\|z\|^2.$$

1.2. 自己双対多様体からツイスター空間へ

自己双対多様体 (M,g) があたえられると, これに付随してツイスター空間とよばれる 3 次元の複素多様体が自然に構成できる. この構成のあらましを以下に述べる．

1.2.1 線形代数からの準備

4 次元実ユークリッド空間を四元数の集合 $\boldsymbol{H}$ と同一視する．

$$\boldsymbol{R}^4=\boldsymbol{H}=\boldsymbol{R}+\boldsymbol{R}i+\boldsymbol{R}j+\boldsymbol{R}k.$$

$\boldsymbol{R}^4$ には, $1, i, j, k$ が正の向きの基底として向きを定める．$Sp(1) = \{q \in \boldsymbol{H}; \|q\| = 1\}$. とおき, $Sp(1)$ を左および右乗法で $\boldsymbol{H}$ に作用させることにより, リー群の間の同型

$$(Sp(1) \times Sp(1))/\langle(-1,-1)\rangle \cong SO(4)$$

がえられることはよく知られている．($SO(4)$ は特殊直交群.) いま

$$\begin{aligned} C &= \{q \in Sp(1); q^2 = -1\} = \{ai + bj + ck; a^2 + b^2 + c^2 = 1\} = S^2 \\ &= \{qiq^{-1}; q \in Sp(1)\} = Sp(1)/U(1) = \boldsymbol{P} \end{aligned}$$

とおく. ただし $\boldsymbol{P}$ は複素射影直線．また $\mathrm{End}\ \boldsymbol{R}^4$ 内で考えれば, C は次の形にも表される：

$$(5) \qquad C = SO(4)/U(2),\ U(2) = [Sp(1) \times U(1)]/\langle(-1,-1)\rangle.$$

$SO(4)$ の各元の $C \cong \boldsymbol{P}$ への作用は正則であることに注意. さて右乗法により C の各元は $\boldsymbol{R}^4 = \boldsymbol{H}$ 上の複素構造 $J, J^2 = -id$, を定める. 実際, 集合として

$$C := \{J \in SO(4); J^2 = -id,\ \boldsymbol{R}^4 \text{ の向きと非両立 }\}$$

が成立する. ただし id は恒等写像, また e_1, e_2 が $(\boldsymbol{R}^4, J)$ の複素基底とするとき, $e_1, J(e_1), e_2, J(e_2)$ が負の向きである場合, J は $\boldsymbol{R}^4$ の向きと非両立であるという.)

また $q \to -q$ は, $SO(4)$ の C への作用と可換, かつ固定点を持たない, $C = \boldsymbol{P}$ の反正則 (anti-holomorphic) な対合同型 (involution) $\sigma_C : C \to C$ をさだめることに注意する.

1.2.2 C^∞ **ツイスター空間と概複素構造**

一般に (M, g) を 4 次元の向き付けられた C^∞ リーマン多様体とする. 付随する $SO(4)$-主 frame 束 (oriented orthonormal frame bundle)

を $\pi : P \to M$ とする. $SO(4)$ の C への自然な作用に関して, 主束 π に随伴する $C = \boldsymbol{P}$ をファイバーとする, M 上の C^∞ fiber 束 $t : Z \to M$:

$$Z = P \times_{SO(4)} C := (P \times C)/SO(4),\ (p, J)g := (pg^{-1}, gJg^{-1})$$

を考える．(ただし $p \in P, J \in C, g \in SO(4)$.) 構成から, Z の各ファイバー $L_x := t^{-1}(x)$ は, 集合としての自然な同一視

(6)

$$L_x := \{T_xM \text{ の複素構造で } g_x \text{ を保ち}, T_xM \text{ の向きと非両立なもの }\}$$

をうる． L_x の点 z に対応する TxM の複素構造を J_z で表す．

このことを用いて Z 上に自然な概複素構造を次のように定義する. t のファイバーへの接束 TF は Z の接束 TZ の部分束であるが

$$TZ \cong TF \oplus HZ \tag{7}$$

となる部分ベクトル束 HZ が, Levi-Civita 接続 ∇ を用いて自然に定まる．(TP を P の接束とすると, ∇ は, TP の $SO(4)$-不変な (水平) 部分束 HP で, 自然な束写像 $TP \to \pi^*TM$ が同型 $HP \cong \pi^*TM$ を与えるものが自然に定まる．不変性から, この水平束は TZ の部分束を誘導するがこれが HZ である.)

t の各ファイバーは $C \cong \boldsymbol{P}$ の等質複素構造から誘導される複素構造をもつので, TF は自然に Z 上の C^∞ 複素直線束となる. 一方, 各点 $z \in Z, x = t(z)$, に対し, HZ のファイバー H_zZ の複素構造を, T_xM の複素構造 J_z を t_* による同型 $H_zZ \cong T_xM$ により 引き戻すことにより定める．したがって分解 (7) から, Z の概複素構造 J_Z が自然に定まる．

1.2.3 概複素構造の可積分性と自己双対性

自己双対性が, この概複素構造 J_Z の可積分性として現れる, というのが [1] の次の基本定理である.

定理. (M, g), (Z, J_Z) を上述のとおりとする. 次は同値である.

i) J_Z が積分可能, したがって (Z, J_Z) が 3 次元複素多様体となる.

ii) (M, g) は自己双対多様体である．

注意. 実際は (Z, J_Z) の構成も, g の共形類 $[g]$ のみに依存する．

定義. 自己双対多様体 $(M, [g])$ に対し, 対応する 3 次元複素多様体 $Z = (Z, J_Z)$ を $(M, [g])$ の ツイスター空間 という.

1.2.4 ツイスター空間の最初の性質と Pensorse 逆対応

以後 (M, g) を自己双対多様体, Z を対応するツイスター空間とする. Z の複素多様体としての, 最初の性質をのべておく.

まず定義から次のことは明らかである．

i) 各 fiber L_x は, $\boldsymbol{P}$ と同型な Z の複素部分多様体である.

さらに次が成立する.

ii) L_x の Z 内での正則法束 (normal bundle) N は, $O(1) \oplus O(1)$ と同型である. ただし, $O(1)$ は次数 1 の $L_x \cong \boldsymbol{P}$ 上の正則直線束.

また

iii) 固定点を持たない Z の反正則対合同型 σ で, 各ファイバー L_x をそれ自身に写すものが存在する.

実際, これは固定点を持たない C の反正則対合同型 σ_C (1.2.1) から自然に誘導する．σ を Z の 実構造 という. 特にツイスター空間 Z は実数体上定義された複素多様体の構造を持つといえる. 実構造は, 複素多様体 Z の構造にしばしば強い制限をあたえる．

定理. M を C^∞ 多様体とし, $t : Z \to M$ を C^∞ $\boldsymbol{P}$ 束とする. Z が複素多様体で, t に対し上の i),ii),iii) が満たされるとする．このとき M 上に自然な自己双対構造 $[g]$ が誘導される．(Penrose 逆対応)

2. コンパクト 複素多様体概観

この節では複素多様体はコンパクトかつ連結とする.

2.1 射影多様体

もっとも基本的なコンパクト複素多様体である n 次元複素射影空間 $\boldsymbol{P}^n$ は, 複素ユークリッド空間 $\boldsymbol{C}^{n+1}$ の原点を通る直線全体の集合, あるいは $n+1$ 個の複素数の比 $(z_0 : \ldots : z_n)$ の集合と同一視される．したがって, $\boldsymbol{P}^n$ 上には大域的な同次座標 $(z_0, \ldots, z_n)$ が存在し, 有限個の同次多項式 f_i の零点集合 $X := \{(z_0, \ldots, z_n) \in \boldsymbol{P}^n; f_i(z_0, \ldots, z_n) = 0, 1 \leq i \leq k\}$ は, f_i を “一般に” 選ぶことにより, $\boldsymbol{P}^n$ の複素部分多様体となる. f_i の選択をいろいろに変化させれば, 極めて多くのこのような多様体が存在することは明らかであろう. これらが古典的な代数幾何学の対象であり, 複素多様体宇宙の中心部分を形成する 射影 (複素) 多様体である．その重要性は, 次の結果からも明らかである．

定理 (Riemann) 1 次元複素多様体, すなわちコンパクトリーマン面は射影的である.

また次の自明な事実にも注意しておこう：射影多様体の部分多様体はふたたび射影多様体である.

2.2 複素トーラス

$\boldsymbol{C}^n$ を格子 $\Gamma \cong \boldsymbol{Z}^{2n}$ でわってえられる商複素多様体が n 次元複素トーラスである. 1 次元の場合は楕円曲線と同一視され, 射影的であることは上述のとおりである．しかし 2 次元以上になると, このことは成り立たない．射影的である複素トーラスをアーベル多様体と呼ぶ．格子をいろいろに動かしてえられる複素トーラスの「モジュライ」の次元が n^2 であるのにに比し, アーベル多様体のそれは $n(n+1)/2$ である. したがって, 一般の複素トーラスは射影的でない複素多様体の例をあたえる．

しかし, おそらく 1948 年に Hopf 多様体が発見されるまでは, 複素トーラスが唯一の非射影的複素多様体だったと思われる．

2.3 ケーラー多様体

2.3.1 定義と例

X を複素多様体とし, h を X 上のエルミート計量とする. h に随伴する基本 2-形式 ω が, d-閉であるとき, h をケーラー計量といい, ケーラー計量を許す多様体を ケーラー多様体 という. このとき ω をケーラー形式といい, その定める (de Rham) コホモロジー類 $[\omega] \in H^2(X, \boldsymbol{R})$ をケーラー類という.

定義から, ケーラー多様体の部分多様体はふたたびケーラー多様体である. 複素射影空間の Fubini-Study 計量はケーラーであり, したがってすべての射影多様体はケーラーである. また複素トーラス上の平坦なエルミート計量は, ケーラー計量であるから, 射影多様体と複素トーラスはともにケーラー多様体の一員である

2.3.2 位相的制限

Hodge は 1940 年代後半にケーラー多様体の上の調和積分論を展開し, 特にその応用として, すべての多様体は共通の位相的制限を有することを発見した . たとえば,

奇数次元のベッチ数はすべて偶数である .

また近年 “非アーベルなホッヂ理論” などを用いて, ケーラー多様体の基本群に課されるさまざまな制限が発見されている .

2.3.3 射影多様体との関係

ケーラー多様体と射影多様体ではその定義の仕方がまったく異なるために一見してはそれらの関係が不可解であった . これに関し Hodge は Fubini-Study 計量のケーラー類が $H^2(M, \boldsymbol{Q})$ に属することに着目して, 次を予想した ('50) . すなわち :「 ケーラー多様体 X が射影多様体になる必要十分条件は, $H^2(X, \boldsymbol{Q})$ に属するケーラー類が存在することである .」 実際, これは時を経ずして小平 ('54) により肯定的解決がえられた . これによって, 一般に射影多様体の類とケーラー多様体の類間のの関係が明らかになった . いわば前者は後者の中に有理点として分布している訳である .

2.3.4 小平-Spencer の変形安定性定理

ケーラー多様体は微小変形で閉じている [14]．すなわち $f : X \to Y$ が複素多様体の間の固有な正則 submersion であるとする．一点 $o \in Y$ のファイバー $f^{-1}(o)$ が，ケーラー多様体なら，o の十分小さな近傍に属する任意の点 y に対して $f^{-1}(y)$ もやはりケーラー多様体である．

このケーラー性の安定性定理は，複素トーラスの例からわかるように射影多様体の中では成立しない．これはまた射影多様体でないケーラー多様体を構成する (あるいは存在を証明する) 有力な手段でもある．

2.3.5 2 次元の場合

射影多様体との関連でのケーラー多様体の分布状況は，2 次元の場合はほぼ解明されており．次の決定的な結果が知られている．すなわち，

a) ケーラー曲面は，すべて射影曲面の変形としてえられる．また

b) 複素曲面 X について次は同値である：i) X は ケーラー，ii) 1 次ベッチ数 b_1 が偶数．

3 次元以上では，b) はまったく成立しないが，a) は小平予想として大きな懸案となっている．もし正しければ，ケーラー多様体の類はは射影多様体の類を変形により広げたもの，という非常に明快な描像がえられることになる．

2.4 Siegel の定理と代数次元

ケーラー多様体とは別の方向への射影多様体の拡張が Moishezon により試みられた．これを説明するために，まず代数次元を復習しておく．

定理 (Siegel, 1955) X をコンパクトな複素多様体とし，$\boldsymbol{C}(X)$ を X 上の有理形関数全体のなす体とする．$\boldsymbol{C}(X)$ の $\boldsymbol{C}$ 上の超越次数 ($= \boldsymbol{C}$ 上代数的に独立な元の最大個数) を $a = a(X)$ とすると，$0 \leq a \leq \dim X$ が成立する．しかも，$\boldsymbol{C}(X)$ は超越次数が a の代数関数体となる，すなわち，$\boldsymbol{C}(X)$ は a 変数の有理関数体上代数的である．

注意．X が射影多様体ならば $a = \dim X$ である．このとき X 上の有理形関数は必然的に有理関数となり $\boldsymbol{C}(X)$ は X 上の有理関数体に一致する．

定義. $a = a(X)$ を X の 代数次元 という.

代数次元はしたがって, X と射影多様体との隔たりを測る量といえる .

例 . $n > 1$ ならば, 任意の整数 $a,\ 0 \leq a \leq n$, に対し $a(X) = a$ となる n 次元複素トーラス X が存在する.

2.5. Moishezon 多様体

2.5.1 定義と基本的性質

定義. 代数次元が次元に一致する多様体を, (最初に組織的に研究したロシア人数学者 Moishezon (モイシェツォン) にしたがって) Moishezon 多様体とよぶ [18].

Moishezon 多様体の基本的性質述べる . X を Moishezon 多様体とする.

a) X の部分多様体, および X の正則 (ないし有理形) 写像による像はふたたび Moishezon 多様体である.

b) X ををの部分多様体を中心に何回か blowing-up すると射影多様体になる. 特に X は射影多様体と双有理形同値である[3].

c) ケーラーかつ Moishezon である多様体は射影的である.

c) より ケーラー性と Moishezon 性は完全に異なる方向への射影多様体の拡張であることがわかる .

2.5.2 非射影的 Moishezon 多様体の (非) 存在.

a) 2 次元 (以下) では, すべての Moishezon 多様体は射影多様体である (Chow-小平).

b) 3 次元以上では, すべての射影多様体に対し, これと双有理形同値であって射影多様体でないものが存在する (広中の構成法).

---

[3]コンパクト複素多様体 X,Y が 双有理形同値 とは, 別のコンパクト複素多様体 Z と正則改変 $Z \to X$ および $Z \to Y$ が存在する場合をいう . ただし正則改変 (modification) とは稠密な開集合の間の同形をあたえる正則写像である.

注意. 広中の構成法は, 普遍的な方法ではあるが, かなり人工的なものであり, 一般に非射影的 Moishezon 多様体を構成することは容易でない.

従来, 非射影的 Moishezon 多様体は, たとえば森理論の構成などでも明らかなように本来病的なものと考えられてきた. いかにして非射影的なものに陥らないで多様体を blowing-down できるか, その手順をあたえるのが極小モデルプログラムであるともいえる. ところが, 後述のように, ツイスター空間のカテゴリーでは非射影的 Moishezon 多様体が「自然に」現れる. これは非射影的 Moishezon 多様体に対する別の見方を要求している (ように思える).

2.6 class $\mathcal{C}$ の多様体

2.6.1 定義と性質

射影多様体から Moishezon 多様体への拡張の類似として, 筆者はケーラー多様体に対する有理形写像の像として得られる複素多様体をクラス $\mathcal{C}$ の多様体とよんだ. 後に Varouchas が, クラス $\mathcal{C}$ の多様体は, かならず ケーラー多様体と双有理形同値であることを示した.

X をクラス $\mathcal{C}$ 多様体とする.

a) X の部分多様体, および X の正則 (ないし有理形) 写像による像はふたたびクラス $\mathcal{C}$ の多様体である.

b) X をその部分多様体を中心に何回か blowing-up すると射影多様体になる.

2.6.2 非ケーラーなクラス $\mathcal{C}$ の多様体の (非) 存在については, 射影をケーラー, Moishezon をクラス $\mathcal{C}$ と読み替えれば 2.5.2 の類似がそのまま成立する.

2.6.3「射影→ Moishezon」と「ケーラー→クラス $\mathcal{C}$」の類似を考えて, 小平-Spencer の安定性定理 (2.3.3) の類似として筆者は次の問題を提出した ('83).

問題. クラス $\mathcal{C}$ の多様体の微小変形はふたたびクラス $\mathcal{C}$ に属するか.

2.7 Categorical な閉性

2.7.1 これまでに導入した多様体の類の包含関係を図示すると

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P} := \{\text{ 射影多様体 }\} & \subseteq & \mathcal{M} := \{\text{Moishezon 多様体 }\} \\ \cap & & \cap \\ \mathcal{K} := \{\text{ コンパクト ケーラー多様体 }\} & \subseteq & \mathcal{C} := \{\text{ クラス}\mathcal{C}\text{ の多様体 }\} \end{array}$$

となる. 2.1 により次元 1 ではすべてのクラスは一致する. 2.5.3 と 2.6.2 により次元 2 では横の包含関係は等号となり, 3 次元以上ではこれらはすべて異なる.

2.7.2 これらの多様体の類の大きな特徴は, それらがある意味で圏論的に閉じているということである. 上述の部分多様体はかならずその類に含まれる, というのもその一例であるが, もっと一般に (代数幾何学的なことばを使えば) 自然に定義される関手がその圏 (=類) 内で表現されることであろう. これをたとえば Hilebert 概型 (= Douady 空間) に例をとって説明してみる.

定理. $\mathcal{A}$ を $\mathcal{P}, \mathcal{K}, \mathcal{M}, \mathcal{C}$ のいずれかとし, X を $\mathcal{A}$ に属する多様体とする. X の部分多様体 (特異点やべき零元を許す) の全体の集合 D_X は, (一般に複素解析空間の構造をもつが) さらに D_X の各既約成分はコンパクトでふたたび $\mathcal{A}$ に属する.

注意. 正確には, $\mathcal{A}$ を特異点を許す場合に拡張しておく必要がある. また $\mathcal{A} = \mathcal{K}$ の場合 (結果は正しいと思われるが) 厳密に示されているのは (D_X の類似である) Chow 多様体の場合のみである.

しかもこのような性質を持つ多様体のクラスで $\mathcal{C}$ を真に含むものは多分存在しないと思われる. (D_X の場合はそもそも既約成分がコンパクトになることが期待できない.)

2.8 代数 reduction

2.8.1 X を定数でない有理形関数を持つが Moishezon 多様体でない, すなわち $0 < a(X) < \dim X$ となるコンパクト複素多様体とする. こ

のような X を調べるもっとも標準的な手段として, 代数次元の幾何学的な表現である次の代数 reduction がある. すなわち

定義 X の 代数 reduction とは, コンパクト複素多様体と正則写像からなる次のような図式

$$\begin{array}{ccc} \hat{X} & \stackrel{f}{\to} & Y \\ u\downarrow & & \\ X & & \end{array} \tag{8}$$

であって, u は双有理形写像, Y は射影多様体, f は連結ファイバーを持つ全射正則写像で f (と u) が有理形関数体の同型 $f^*\boldsymbol{C}(Y) \cong \boldsymbol{C}(\hat{X}) \cong u^*\boldsymbol{C}(X)$ をあたえるものである.

したがって特に $a(X) = \dim Y$ である. このような図式は X をあたえると双有理形同値をのぞいては唯一つ定まる . したがって, たとえば f の一般ファイバー F の双有理形同値類は, もとの X の不変量になる . F を代数 reduction (8) の 一般 fiber ともいう.

2.8.2 一般 fiber の構造とクラス $\mathcal{C}$ の多様体

F の小平次元 $\kappa(F)$ および反小平次元 $\kappa^{-1}(F)$ は 0 以下である . 特に, $\dim F = 1$ のときは, F は楕円曲線となる. 一般に X がクラス $\mathcal{C}$ の場合にはさらに付加的な制限が加わる . たとえば $\dim F = 2$ のとき, F は種数 1 の線織面, 複素トーラス, 代数次元 0 の K3 曲面のいずれかと双有理形同値となる. 実際, クラス $\mathcal{C}$ の多様体については, ここでは詳細には述べないが, 代数 reduction をはじめ類似のいくつかの方法を組み合わせてその構造を組織的に研究することができる (cf. [7]).

非ケーラー多様体 (cf. 2.9) にたいしては, 代数 reduction は, ほとんど唯一の一般的研究方法であるが, クラス $\mathcal{C}$ の場合ほど有効とはいえず, 研究も進んでいない .

2.9 非ケーラー多様体

双有理幾何学的にはクラス $\mathcal{C}$ の多様体とケーラー多様体は同じであるから, 本稿ではクラス $\mathcal{C}$ に属さない多様体を 非ケーラー多様体 ということにする.

2.9.1 2 次元の場合

2 次元の場合は, ほぼ全体像が見えている . 非ケーラー曲面は, 1 次元ベッチ数が奇数で, $b_1 \geq 3$ ではこれらは代数 reduction によって, コンパクトリーマン面上の楕円曲面の構造を持つ . $b_1 = 1$ の曲面は小平により VII 型曲面とよばれ, $b_2 = 0$ では Hopf 曲面および井上曲面からなる. $b_2 > 0$ で極小ならば知られている例は Hopf 曲面の blowing-up の変形としてえられており, これらにつきることが期待されている. 期待通りであれば, 2 次元非ケーラーの世界は, ケーラーの世界に比して比較的変化に乏しい世界といえる .

2.9.2 3 次元以上の場合

3 次元以上の場合, そもそも例を構成する方法が数えるほどしか知られておらず, またそれら知られているいくつかの系列をどのように配置すればよいのかその全体像は依然不明である. その意味で (3 次元) 複素多様体の地理学の理解という観点からは, 非ケーラーの外側の世界はいまだに大航海時代であって, 地理学上の空白地帯が茫漠と広がっているような印象を受ける .

3. 複素多様体論の中のツイスター空間

この節では, ツイスター空間として生ずる 3 次元コンパクト複素多様体の分布を, 2 節で述べた複素多様体のいろいろなクラスとの関連で述べる . 以後, 多様体は常にコンパクトとする.

3.0 概説

ツイスター空間の方法は, 上述の複素多様体のいくつかの特殊な構成方法のひとつである. ツイスター空間として生ずる複素多様体は, これまでの枠組みで述べると次のように大きくまとめることができる .

a) ツイスター空間が ケーラーなら射影的である. それらに該当するのは 2 例のみである．

b) ツイスター空間がケーラーでないが クラス $\mathcal{C}$ である場合, それらは非射影的 Moishezon 多様体である. このような例は数多く存在し, 特殊な場合には非常に豊かな幾何学的構造を有する．(そのような非射影的 Moishezon 多様体の例は, これらが最初であろう.)

c) 代数次元が正のものは, その位相構造が極めて制限される．Moishezon でなければ, 非ケーラーであり, そのとき代数次元は $2, 1$ のいずれの値も取りうるこれらは非ケーラー多様体の代数 reduction の具体的な例をあたえる．特に 代数次元 1 の場合は クラス $\mathcal{C}$ の場合では起こりえない一般ファイバーが現れる．

d) ほとんどのツイスター空間上には, 有理形関数は定数しか存在せず, 非ケーラーである．これらは複素多様体としては, ほとんど構造を持たないが, 位相的には非常にバラエティ富んでいる．これは, 2 次元の場合と異なり, 一般に 3 次元非ケーラー多様体の驚くべき (位相的) 多様性を示唆する．

3.1. 1.1.3 の例に対応するツイスター空間

まず, 1.1.3 の初期の例について, ツイスター空間の代数次元をみておこう．1.1.4 の型による分類にしたがってのべる．

型	M	$a(Z)$	Z
$+$	S^4	3	$\boldsymbol{P}^3$ 複素射影空間 (射影的)
$+$	$\boldsymbol{P}^2$	3	旗多様体 (射影的)
$+$	$S^1 \times S^3$	$0, 1, 2$	非 ケーラー
0	Calabi-Yau 曲面	1	非ケーラー
0	$\boldsymbol{P} \times \Sigma_g$	0	非ケーラー
$-$	D/Γ	0	非ケーラー
$-$	B/Γ	0	非ケーラー

3.2 存在定理

コンパクト自己双対多様体が (思いがけず) きわめて豊富に存在すること, したがって対応する複素多様体としてのツイスター空間も同様であることが, Floer [6], Donaldson-Friedman [5] の結果を経て最終的に次の Taubes [22] の仕事によって確立された．

定理. 任意の向き付けられたコンパクト C^∞ 4 次元多様体 M に対し, ある正整数 m_0 が存在し, $\forall m \geq m_0$ に対し $M\#m\boldsymbol{P}^2$ 上に自己双対計量が存在する.

系. 任意の有限表示の群 G は, あるツイスター空間の基本群として実現される．

系は, 任意の有限表示の群は, ある M の基本群として実現できることと上の定理からしたがう. G が非自明ならこれらのツイスター空間はすべて非ケーラーである. これは 3 次元 (以上) の非ケーラーの世界の驚くべき位相的多様性を示すものである．(しかも, これらはツイスター空間という極めて局所的な族で実現されている.)

3.3. ケーラーおよびクラス $\mathcal{C}$ のツイスター空間

ツイスター空間はほとんどケーラーにならない [11].

定理. $M = (M, g)$ をコンパクト自己双対多様体とし, そのツイスター空間を Z とする. Z がケーラーならば, M は, 3.1 の表の S^4 か $\boldsymbol{P}^2$ のいずれかに一致する．このときツイスター空間は射影的である.

特にケーラーなら射影的であるが, これの類似として次が成立する [4].

定理. $M = (M, g)$ をコンパクト自己双対多様体とし, そのツイスター空間を Z とする. Z がクラス $\mathcal{C}$ ならば, Z は Moishezon である.

したがって, ツイスター空間については, $\mathcal{P} = K, M = \mathcal{C}$ が成立し, Moishezon でなければ非ケーラーである.

3.4. Moishezon ツイスター空間

3.2 により, 上述の 2 例以外の Moishezon ツイスター空間は必然的に非射影的となる. このようなツイスター空間の明示的な例が, Poon [20], LeBrun [15] および Joyce [12] により構成された . これらは, いずれも複素多様体としての構造が非常に豊かで美しい非射影的 Moishezon 多様体の (著者の知る限りはじめての) 例である. これまでと同様 $m\boldsymbol{P}^2$ で複素射影平面 m 個の連結和を, $0\boldsymbol{P}^2$ で S^4 を表す .

定理. m を非負整数とする .

1) $m\boldsymbol{P}^2$ 上の半自由な S^1-作用 (同型をのぞき一意) に対し $m\boldsymbol{P}^2$ 上の S^1-不変な自己双対構造は実 $\max\{3m-5,0\}$-次元族をなし, おのおのに対応するツイスター空間とともに明示的に構成できる. ツイスター空間は (非射影的)Moishezon 多様体となる [15]. (LeBrun ツイスター空間)

2) $m\boldsymbol{P}^2$ 上に非自明な $(S^1\times S^1)$-作用を固定する . このとき $(S^1\times S^1)$-不変な自己双対構造は実 $\max\{(m-1),0\}$-次元族をなし, すべて明示的に構成できる [12]. そのツイスター空間はやはり構造のよくわかった (非射影的)Moishezon 多様体となる [8]. (Joyce ツイスター空間)

3) $m\leq 2$ に対し 1), 2) の自己双対構造の族は一致する. 実際 $m=0,1$ に対してはこれらは 1.1.3 の S^4 および $\boldsymbol{P}^2$ にほかならない .

注意. $m=2$ のとき, 対応するツイスター空間は各 $3/2<\lambda<2$ に対し定まる $\boldsymbol{P}^5$ 内の完全交差多様体

$$z_0^2+z_1^2+z_2^2+z_3^2+z_4^2+z_5^2=0$$
$$2z_0^2+2z_1^2+\lambda z_2^2+\frac{3}{2}z_3^2+z_4^2+z_5^2=0$$

の 4 個の通常二重点を適当に非特異化したものである [20] .

3.5 $m\boldsymbol{P}^2$ 上のツイスター空間の代数次元

定理. $m\boldsymbol{P}^2$ 上の $+$ 型自己双対計量に付随したツイスター空間の代数次元の可能な値は次の表であたえられる . またこれらの値は実際にこのようなあるツイスター空間で実現される .

m	$a(Z)$
≤ 3	3
4	$3, 2, 1$
≥ 5	$3, 2, 1, 0$

特に $m \leq 3$ なら, Z はすべて Moishezon である. また 各 m を固定するとき適当な LeBrun ツイスター空間 $(a = 3)$ の微小変形の中にすべての可能な代数次元の値が実現される .

注意 . $a = 1$ の場合, 代数 reduction の一般ファイバーが有理曲面になるツイスター空間が多く存在する. これはこのような複素多様体の最初の例である . クラス $\mathcal{C}$ の多様体ではこのようなことは決しておこらない .

3.6 クラス $\mathcal{C}$ は微小変形で閉じていない.

3.3 および 3.5 の定理から次をうる .

定理. LeBrun ツイスター空間の微小変形で, クラス $\mathcal{C}$ に属さないものが存在する [4] [17].

特に, クラス $\mathcal{C}$ は微小変形で閉じていない . これは 2.6.3 の問題に対する否定的な解答である. このような例は現在でもツイスター空間を用いる上例以外に発見されておらず非常に興味ある現象である .

3.7 代数次元と型

3.1 の表から自己双対多様体の型と対応するツイスター空間の代数次元のある種の関係がみてとれる. 実際, それらには次のような関係がある [21][19]. Z をある自己双対多様体に随伴するツイスター空間とする .

定理. 1) $a(Z) \geq 2$, ならば (M, g) は $+$-型.

2) $a(Z) = 1$, ならば (M, g) は 非負型.

3) $a(Z) = 1$ かつ M が 0-型ならば M の有限次不分岐被覆 $\tilde{M}$ は Calabi-Yau K3 曲面 あるいは平坦複素トーラスと同型となる.

注意. 3) の場合, Z の代数 reduction は, Z 自身から $\boldsymbol{P}$ への正則写像 $f : Z \to \boldsymbol{P}$ であたえられ, その構造はよく解明されている．特に $M = \tilde{M}$ に対しては, f は正則 submersion となり, たとえば K3 曲面の moduli の研究に重要な役割を演ずる．

したがって代数次元正のツイスター空間の研究は, $+$-型の自己双対多様体のみを対象とすべきことがわかる．

しかし, 逆に代数次元の値から, 型に関する情報をうる事は, もともと期待できない．代数次元は複素構造の微小変形に関し不変でない (弱い意味での上半連続) のに対し, 少なくとも $\pm$ 型であることは自己双対構造の微小変形で不変だからである．

3.8. 代数次元と位相

1.1.4 で自己双対多様体の型と位相の関連を述べた．位相と代数次元の間にも, ある意味で 3.7 に類似の関連がある [3][9]．

定理. 1) Z が Moishezon ならば, M は $m\boldsymbol{P}^2, m = b_2(M)$, と同相である.

2) $a(Z) = 2$ ならば, M は $m\boldsymbol{P}^2, m = b_2(M)$, と同相であるか, そのある不分岐被覆 $\tilde{M}$ が $(S^1 \times S^3)\#m\boldsymbol{P}^2, m = b_2(M)$, と同相である.

3) $a(Z) = 1$ とする. M が $+$-型なら, ある例外的な場合を除き 2) と同じ結論が成立する.

3) の例外的な場合は実際は存在しないことが予想されている．したがって代数次元が正の場合に本質的なのは M が $m\boldsymbol{P}^2$ または $(S^1 \times S^3)\#m\boldsymbol{P}^2$ の場合, ということになる．また定理は, 3.4, 3.5 で, $m\boldsymbol{P}^2$ を考えることの必然性をあきらかにしている．. (M は $m\boldsymbol{P}^2$ と微分同相であると思われるが, $m \geq 5$ では現在のところ不明である.)

3.9. $M = (S^1 \times S^3)\#m\boldsymbol{P}^2$ の場合

3.9.1 $m = 0$ (Hopf 曲面) の場合:

$m=0$ の場合の自己双対計量は Pontecorvo により分類されている. それらは 1.1.5 であたえられた共形平坦なエルミートと有限次被覆を除き共形同値である. そのツイスター空間は (4) における α, β の値に応じて代数次元 $2, 1, 0$ のいずれかの値を取る (cf. 3.1).

3.9.2 $m>0$ の場合:

LeBrun [16] は 3.4 定理の構成を一般化して $m>0$ の場合にも $(S^1 \times S^3)\#m\boldsymbol{P}^2$ 上に不変自己双対計量を明示的に構成した.

定理. $m \geq 0$ とする. $M := (S^1 \times S^3)\#m\boldsymbol{P}^2$ 上の半自由な S^1-作用 (同型をのぞき一意) に対し M 上に S^1-不変な自己双対構造の族が存在する [16]. その代数次元は 1 であり, 代数 reduction の一般 fiber F ば種数 1 の線織面 (ruled surface) の blowing-up である [10].

この事実と, 3.4 の定理を見比べて筆者は次の予想を提出したが, 全面的な解決には至っていない .

予想. $m>0$ ならば, $M := (S^1 \times S^3)\#m\boldsymbol{P}^2$ 上のいかなる自己双対計量に対しても, 対応するツイスター空間 Z の代数次元 $a(Z)$ は $a(Z) \leq 1$ を満たす .

$a(Z)=1$ の場合の代数 reduction の一般 fiber については, $m\boldsymbol{P}^2$ の場合もこめて, 次のことが予想される .

予想. (M, g) を自己双対多様体, Z を対応するツイスター空間とする. いま $a(Z)=1$ とし 代数 reduction (8) の一般 fiber を F とする.

1) $M = m\boldsymbol{P}^2$ のとき, F は有理曲面である. (3.5 の注意参照)

2) $M = (S^1 \times S^3)\#m\boldsymbol{P}^2$ のとき, F ば 種数 1 の線織面の blowing-up である.

References

[1] Atiyah, M.F., Hitchin, N.J., and Singer, I.M., Self-duality in four-dimensional Riemannian geometry, *Proc. R. Soc. London A.*, 362 (1978),425–461.

[2] Besse, A.L., Einstein manifolds, Erg. Math. Grenzgeb., Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1987.

[3] Campana, F., On twistor spaces of the class $\mathcal{C}$, *J. Differential Geom.*, **33**(1991), 541–549.

[4] Campana, F., The class $\mathcal{C}$ is not stable by small deformations, *Math. Ann.*, 290 (1991), 541–549.

[5] Donaldson, S., and Friedman, R., Connected sums of self-dual manifolds and deformations of singular spaces, *Nonlinearity* **2** (1989), 197–239.

[6] Floer, A., Selfdual conformal structure on $l\boldsymbol{CP}^2$, *J. Differential Geom.*, 33 (1991), 551–573.

[7] Fujiki A., On the structure of compact complex manifolds in $\mathcal{C}$, Advanced studies in Pure Math., 1 (1983), 229-300.

[8] Fujiki, A., Compact self-dual manifolds with torus actions, J. Differential Geom., **55** (2000), 229–324.

[9] Fujiki, A., Topology of compact self-dual manifolds whose twistor space is of positive algebraic dimension, *J. Math. Soc. Japan*, **54** No.3 (2002), 587–608.

[10] Fujiki, A., On certain classes of twistor spaces for blowing up Hopf surfaces with algebraic dimension one, *preprint*

[11] Hitchin, N.J., Kählerian twistor spaces, *Proc. London Math. Soc.*, (3) 43, (1981), 133–150.

[12] Joyce, D., Explicit construction of self-dual 4-manifolds, *Duke J. Math.*, **77** (1995), 519–552.

[13] 小林昭七, 接続の微分幾何とゲージ理論, 裳華房, 1990.

[14] Kodaira, K., and Spencer, D.C., On deformations of complex analytic structures, III, Stability theorems for complex structures, *Ann. of Math.* 71, (1960), 43–76.

[15] Le Brun, C., On the topology of self-dual four manifolds, *Proc. of AMS*, 98 (1986), 637–640.

[16] Le Brun, C., Explicit self-dual metrics on $\boldsymbol{CP}^2\#\cdots\#\boldsymbol{CP}^2$, *J. Differential Geom.*, **34** (1991), 223–253.

[17] Le Brun, C., Anti-self-dual hermitian metrics on the blown-up Hopf surfaces, *Math. Ann.*, **289** (1991), 383–392.

[18] Le Brun, C. and Poon Y.S., Twistor, Kähler manifolds and bimeromorphic geometry II, *J. Amer. Math. Soc.*, 5 (1992), 317–325.

[19] Moishezon, B., On n-dimensional compact complex varieties with n algebraically independent meromorphic functions I, *AMS Translations Ser.* 2, 63, 51–92.

[20] Pontecorvo, M., Algebraic dimension of twisror spaces and scalar curvature of antiself dual metrics, *Math. Ann.*, 291 (1991), 113–122.

[21] Poon, Y.S., Compact self-dual manifolds with positive scalar curvature, *J. Differential Geom.*, 24 (1986), 97–132.

[22] Poon, Y.S., Algebraic dimension of twistor spaces, *Math. Ann.*, **282**, 621–627 (1988)

[23] Taubes, C.H., The existence of anti-self-dual conformal structures, *J. Differential Geometry*, **36** (1992), 163–253.