群作用の剛性

名古屋大学 大学院 多元数理科学研究科
金井 雅彦

Margulis の超剛性定理を典型とするような Lie 群の格子に対する剛性問題に対する「無限次元化」として，群作用に対する剛性問題を解釈することが可能です．そこで，まずは Lie 群の剛性問題に関し，簡単に復習をすることにしましょう．

少々唐突ではありますが，以下のような設定を考えます．ただし，G, H は $SL(n,\mathbb{R})$, $SO(n,1)$ などの非コンパクト単純 Lie 群，Γ は G の（一様）格子，そして，ρ は準同型写像であるとします．

$$\begin{array}{ccc} G & & \\ \cup & & \\ \Gamma & \underset{\rho}{\longrightarrow} & H \end{array}$$

このとき， ρ が G からの連続準同型に拡張可能であるか否かを問う，それが Lie 群の格子に対する剛性問題のおそらく最も「広汎」な定式化でしょう．例えば，G の実階数が 2 以上，しかも ρ の像が Zariski 稠密かつ非有界という仮定の下では，ρ は G からの準同型に拡張可能です．納谷氏の講演の主題，すなわち Margulis の超剛性定理の主張がまさにこれであったはずです．あるいは，Margulis の超剛性に先行する Mostow の強剛性定理は，G が $SL(2,\mathbb{R})$ と局所的に非同型，一方 ρ が単射かつその像が H の（一様）格子であるという仮定の下，同様な結論が得られることを保証します．

ここで，Lie 群の格子に対する剛性問題の歴史を手短に振り返ってみましょう．周知の通り，$PSL(2,\mathbb{R})$ の格子は，極めて「柔軟」です．実際，その柔軟性は Teichmüller 空間により記述されます．ところがこれに反し，高次元の Lie 群の格子は，強い「剛性」を示すのではないかという「指摘」が，1960 年頃 Selberg によってなされました．そしてこれを契機として，Lie 群ないし代数群の格子，そしてその剛性に関する体系的研究が爆発的と言ってもよい勢いで始められることになりました．Selberg の問題提起に直ちに答える形で示されたのが， Weil による局所剛性定理です．$SL(2,\mathbb{R})$ と局所的に同型ではない非 compact 単純 Lie 群に対し，その一様格子は非自明な（局所）変形を許容しない，というのがその内容です．$SL(2,\mathbb{R})$ の格子と高次元 Lie 群の格子の差異がこれで浮き彫りにされた訳です．これに続いて，Mostow の強剛性剛性定理がとくに $G = SO(n,1)$ $(n \geq 3)$ に対して証明されたのが 1960 年代中盤，さらに一般の G に対するそれが登場したのが 70 年代前半のことでした．そして，70 年

代前半から中半にかけて，Margulis の超剛性定理が姿を現します．Weil の局所剛性定理の証明においては，調和積分論（これは，調和写像の出自のひとつと捉えることも可能でしょう）が用いられました．それに対し，Mostow の強剛性定理の証明，および Margulis の超剛性定理の彼自身による証明は，全く異なる様相を持っています(それを標語的に述べるならば,「無限遠方でのエルゴード理論」とでも言うことになるでしょうか)．ちなみに，納谷氏の講演で紹介されるであろう，調和写像を用いた Margulis 超剛性定理の別証明が現れるのは，これらに大きく遅れて 90 年代初頭のことです（この歴史的なギャップに関する「反省」については，拙著「剛性問題と調和写像」，雑誌『数理科学』，2000 年，9 月号 をご覧下さい）．調和写像，あるいはそれに類する変分法的着想が剛性問題において極めて強力な道具であることがようやく明確に認識されるに至りました．

さて，ここで群作用の剛性問題に目を転じましょう．Lie 群の格子に対する剛性問題において値域として現れる Lie 群 H を，微分同相群という無限次元 Lie 群で置き換えたときにも，同様な問いを発することが出来ます．これが群作用に対する剛性問題です．あるいは言い換えるならば，Lie 群の格子などの（離散）群の，与えられた微分可能多様体への滑らかな作用全体の記述が，群作用に対する剛性問題の最終目的のひとつです．微分同相群の無限次元性がかつてない困難を引き起こします．しかし，それがまた同時に群作用に対する剛性問題の醍醐味でもあります．Lie 群の格子に対する「古典的」な剛性問題と比した場合，群作用の剛性に対する我々の理解は極めて乏しいと言わざるをえません．Weil の局所剛性定理の「無限次元化」に相当する結果はいくつかの群作用に対し示されてはいる（例えば，Katok–Spatzier）ものの，Mostow や Margulis の剛性定理のような大域的な剛性定理は，群作用に対してはまだほとんど何も得られていない，というのが現状です（例外としては，ある種の格子の円周 S^1 への群作用に対する Ghys 等の結果が挙げられますが）．まして，調和写像の群作用への応用は（ほとんど）皆無といってよいかと思います．しかしながら，これは群作用の剛性問題において調和写像が無力であるということを意味する訳ではないと考えます．群作用の剛性問題が調和写像の新たな応用をもたらすことを期待するのは私だけではありません．この講演では，調和写像応用の可能性を探りつつ，群作用の剛性問題を概観するつもりです．