

調和写像と超剛性

名古屋大学多元数理科学研究科 納谷 信

1. 序論

本稿の目的は、離散群の超剛性とよばれる現象への、調和写像を用いるアプローチについて解説することである。

調和写像の剛性問題への応用は、少なくとも Siu [27] まで遡ることができるが、超剛性への応用は Corlette [3] に始まる。彼は、調和写像を用いて $Sp(n, 1)$ ($n \geq 2$), F_4^{-20} の格子が超剛性をもつことを証明した。Gromov-Schoen [8] は、Euclid 的ビルディングへのエネルギー最小写像の存在と Lipschitz 正則性を確立し、これを用いて Corlette の結果を、格子の表現の行き先が局所体¹上の代数群である場合へと拡張した。これらの仕事に引き続き、Mok-Siu-Yeung [25], Jost-Yau [15] は、階数 2 以上の半単純リー群の格子に対する Margulis 超剛性 [23] の調和写像を用いた別証明を与えた(ただし、格子としてはコンパクトなものを扱っている)。以上の研究においては、証明に用いる調和写像は非コンパクト型対称空間というリーマン多様体からの写像であった。一方、局所体上の代数群の格子に対する Margulis 超剛性を、同様の手法によって証明しようとする、Euclid 的ビルディングという単体複体からの調和写像(とよぶべきもの)を考える必要がある。

本稿の構成は以下のとおりである。第 2 節において、超剛性の典型例である Margulis 超剛性と、その証明への幾何学的アプローチについて述べる。第 3 節で、後の節で用いられる手法の原型である Bochner テクニックについて述べる。第 4 節では、定義空間が対称空間の場合に、幾何学的超剛性定理を証明し、Margulis 超剛性の一般化が導かれることをみる。この節は Mok-Siu-Yeung の論文 [25] に基づく。第 5 節では、Wang [28, 29] および井関裕靖氏(東北大)と筆者 [9, 10, 11] による、定義空間が単体複体の場合の研究について概説する。

2. MARGULIS 超剛性への幾何学的アプローチ

まず、Margulis 超剛性の具体例をみておこう。

例 1. p, r を素数あるいは ∞ , n, N を自然数 ($n \geq 3$) とし、

$$G = PGL(n, \mathbf{Q}_p), \quad H = PGL(N, \mathbf{Q}_r)$$

¹本稿では、非アルキメデス的な局所体を単に局所体とよぶことにする。

とおく．ここで

$$\mathbf{Q}_p = \begin{cases} \mathbf{R} & (p = \infty \text{ のとき}) \\ p \text{ 進体} & (p \text{ が素数のとき}) \end{cases}$$

である． Γ を G の格子²とし、 $\rho: \Gamma \rightarrow H$ を準同型で、像 $\rho(\Gamma)$ が H において Zariski 稠密なものとする．このとき次のいずれかが成立する：

- (i) $p = r$ で、 ρ は G から H の上への連続な準同型に拡張する．
- (ii) $p \neq r$ で、 $\rho(\Gamma)$ は H において (ハウスドルフ位相に関して) 相対コンパクトである．

この例をもとにして、超剛性の証明の筋書きについて述べておこう． K を G の極大コンパクト群³とし、 $X = G/K$ とおく． X は、 $p = \infty$ のとき非コンパクト型対称空間であり、 p が素数のときは Euclid 的ビルディングとよばれる単体複体となる (第 5 節を参照せよ)．同様に L を H の極大コンパクト群とし、 $Y = H/L$ とおく．このとき、 Y の可縮性により、 ρ 同変写像 $f: X \rightarrow Y$ が存在するが、もし f が定値写像にとれるなら、 $\rho(\Gamma)$ は f の像である Y の点を固定することになる．これは $\rho(\Gamma)$ が L に共役な部分群 (やはり H の極大コンパクト部分群) に含まれることを意味し、上述の例の (ii) が成立する状況になる．一方、例の (i) の状況は、 $p = \infty$ のとき、 f が全測地的写像にとれる場合に対応し、 p が素数のときにも類似のことがいえると期待される．

ρ 同変写像として調和写像 (エネルギー最小写像) をとることができれば、この写像が定値写像 (エネルギー零の写像) あるいは全測地的写像を与えることが期待できる．実際、第 4 節においてみるように、リーマン多様体からの調和写像を用いた超剛性の証明は、このようなアイデアに基づいてなされる．

3. BOCHNER テクニック

この節では、リーマン多様体のコホモロジー群の消滅を示すのに有効な手段である Bochner テクニックとよばれる技法について簡単に解説しておく． (M, g) をコンパクトなリーマン多様体とし、その Hodge-de Rham ラプラシアンを $\Delta (= dd^* + d^*d)$ 、リッチ曲率を Ric で表す．まず、Hodge の定理により、コホモロジー群 $H^1(M, \mathbb{R})$ の各元は、調和 1 形式によって一意的に代表される．すなわち、

$$H^1(M, \mathbb{R}) \cong \{\omega \in \Omega^1(M) \mid \Delta\omega = 0\}$$

である．一方、1 形式 ω に対して

$$\langle \Delta\omega, \omega \rangle = \frac{1}{2} \Delta(|\omega|^2) + |\nabla\omega|^2 + \langle \text{Ric}\omega, \omega \rangle$$

² G の離散部分群で、 $\Gamma \backslash G$ の測度が有限なもの

³ $K = \begin{cases} PO(n) & (p = \infty) \\ PGL(n, \mathbf{Z}_p) & (p \text{ が素数}) \end{cases}$

という等式が成り立ち, これを積分して

$$\int_M \langle \Delta \omega, \omega \rangle = \int_M (|\nabla \omega|^2 + \langle \text{Ric} \omega, \omega \rangle)$$

を得る. この公式から, (M, g) の Ricci 曲率が正ならば, 調和 1 形式は自明なものしかなく, Ricci 曲率が非負ならば, 調和 1 形式は平行になることが分かる. 以上をまとめるて次を得る:

定理 3.1 (c.f. [30]). (M, g) をコンパクトな *Riemann* 多様体とする. (M, g) の Ricci 曲率が正ならば $b_1(M) = 0$ であり, 非正ならば $b_1(M) \leq \dim M$ が成り立つ. ここで, $b_1(M)$ は M の第 1 Betti 数を表す.

一方, 次の定理は松島の消滅定理とよばれ, 階数 2 以上の非コンパクト型の局所対称空間に対して, その第 1 Betti 数が零であることを主張する.

定理 3.2 ([24, 17, 18]). (M, g) を既約で階数が 2 以上の非コンパクト型対称空間とする. Γ を (M, g) の等長変換群 $G = \text{Isom}(M, g)$ の離散部分群で, M に自由かつコンパクトに作用するものとする. このとき, $\Gamma \backslash M$ の第 1 Betti 数は零である.

定理の (M, g) はスカラー曲率が負の Einstein 多様体であるから, その Ricci 曲率は不定値である. この定理も, 定理 3.1 と同様にある積分公式 (松島の公式とよばれる) から導かれる. 次の節において, この公式の非線型化を書き下し, それを用いて幾何学的超剛性とよばれる定理を証明する. 松島の消滅は, 幾何学的超剛性の特別な場合とみなすことができる.

4. 定義空間が対称空間の場合

本節では, [25] にしたがって, 次の「幾何学的超剛性定理」を証明する.

定理 4.1. (M, g) を既約で階数が 2 以上の非コンパクト型対称空間とする. Γ を (M, g) の等長変換群 $G = \text{Isom}(M, g)$ の離散部分群で, M に自由かつコンパクトに作用するものとする. (N, h) を *Hadamard* 多様体 (完備単連結な非正曲率リーマン多様体) とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(N, h)$ を準同型とする. このとき, 任意の ρ 同変調和写像 $f: M \rightarrow N$ は定値写像か全測地的な等長埋め込み (計量の定数倍を除いて) である.

注意 1. [25] には, M が既約でない場合や, 階数が 1 (四元数双曲空間, Cayley 双曲平面) の場合の結果もあるが, 本稿では省略する. 後者の場合の結果は, Corlette [3] の結果をカバーしている.

定理 4.1 の証明の鍵となるのは, 次の「非線型松島の公式⁴」である. この公式は, M 上に以下の条件をみたす $(0, 4)$ 型テンソル Q が与えられた場合書き下すことができる.

⁴[25] では “Bochner type formula” とよんでいる.

- (i) Q は G 不変な曲率型テンソル⁵ である. とくに, Q は平行である.
- (ii) $\langle Q, R^M \rangle = 0$. ここで, R^M は (M, g) の曲率テンソルである.
- (iii) すべてのトレース零の対称 $(0, 2)$ 型テンソル $(\xi^{ij}) \neq 0$ に対して $Q_{ijkl}\xi^{il}\xi^{jk} > 0$ である.
- (iv) すべての非正曲率をもつ⁶ 曲率型テンソル T に対して $\langle Q, T \rangle \leq 0$ である.

定理 4.2 (非線型松島の公式). $(M, g), (N, h), \Gamma, \rho$ を定理 4.1 のとおりとし, Q を上の条件をみたす $(0, 4)$ 型テンソルとする. このとき, 任意の ρ 同変 C^∞ 写像 (調和とは限らない) $f: M \rightarrow N$ に対して, 次の積分公式が成り立つ:

$$(1) \quad \int_{\Gamma \setminus M} \langle (Q \circ \sigma_{24}) \otimes f^{-1}h^*, \nabla df \otimes \nabla df \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} \langle Q, f^{-1}R^N \rangle.$$

ここで, σ_{24} は第 2 変数と第 4 変数を交換する写像であり, R^N は N の曲率テンソルである.

定理 4.2 の証明を与える前に, 定理の主張および証明に現れる記号の意味を説明しておこう. まず, ∇df は次の式で定義される $\text{Sym}^2 T^*M \otimes f^{-1}TN$ の切断である:

$$(\nabla df)(X, Y) = \nabla_X(df(Y)) - df(\nabla_X Y).$$

ここで, 右辺一つ目の ∇ は N の Levi-Civita 接続から誘導される $f^{-1}TN$ 上の接続であり, 二つ目の ∇ は M の Levi-Civita 接続である. 局所座標を用いて表示すると

$$\nabla df = (\nabla_i f_j^\alpha) dx^i \otimes dx^j \otimes \frac{\partial}{\partial y^\alpha}, \quad \nabla_i f_j^\alpha = \frac{\partial^2 f^\alpha}{\partial x^i \partial x^j} + (\Gamma_N)_{\beta\gamma}^\alpha f_i^\beta f_j^\gamma - (\Gamma_M)_{ij}^k f_k^\alpha$$

であり, ここで Γ^M, Γ^N はそれぞれ M, N の Christoffel 記号を表す. h^* はリーマン計量 h の双対計量である. h^* は $\text{Sym}^2 TN$ の切断であり, テンソル積 $Q \otimes f^{-1}h^*$ は $(T^*M)^{\otimes 4} \otimes (f^{-1}TN)^{\otimes 2}$ の切断である. 一方, $\nabla df \otimes \nabla df$ もまた $(T^*M)^{\otimes 4} \otimes (f^{-1}TN)^{\otimes 2}$ の切断であるから, 内積 $\langle (Q \circ \sigma_{24}) \otimes f^{-1}h^*, \nabla df \otimes \nabla df \rangle$ が意味をもつ.

局所座標を用いて書くと, 上の公式は

$$\int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} \nabla_i f_l^\alpha \nabla_k f_j^\beta h_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} f_i^\alpha f_j^\beta f_k^\gamma f_l^\delta R^N_{\alpha\beta\gamma\delta}$$

となる. ここで, $h = h_{\alpha\beta} dy^\alpha \otimes dy^\beta$, $R^N = R^N_{\alpha\beta\gamma\delta} dy^\alpha \otimes dy^\beta \otimes dy^\gamma \otimes dy^\delta$ である.

Proof. M 上の $(0, 4)$ 型テンソル $\varphi = \varphi_{ijkl} dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes dx^l$ と接ベクトル $X = X^i(\partial/\partial x^i)$ に対して, 内部積 $\iota(X)\varphi$ を $\iota(X)\varphi = \varphi_{ijkl} X^l dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k$ によって定義する. また, 内部積 $\iota(df)\varphi$ を $\iota(df)\varphi = g^{lm} \varphi_{ijkl} f_m^\alpha dx^i \otimes dx^j \otimes dx^k \otimes (\partial/\partial y^\alpha)$ によって定義する.

⁵ $(0, 4)$ 型テンソル T が曲率型テンソルであるとは, $T(X, Y, Z, W) = -T(Y, X, Z, W)$, $T(X, Y, Z, W) = T(Z, W, X, Y)$, $T(X, Y, Z, W) + T(X, Z, W, Y) + T(X, W, Y, Z) = 0$ をみたすときをいう.

⁶曲率型テンソル T が非正曲率をもつとは, $T(X, Y, X, Y) \leq 0$ をみたすときをいう.

θ を

$$\theta(X, Y) = \frac{1}{2}(\langle \iota(X)Q, \iota(Y)R \rangle + \langle \iota(Y)Q, \iota(X)R \rangle)$$

によって定義される M 上の $(0, 2)$ 型テンソルとする. 局所座標を用いると

$$\theta = \theta_{lm} dx^l \otimes dx^m, \quad \theta_{lm} = \frac{1}{2}(g_{ls} Q^{ijks} R_{ijkm} + g_{ms} Q^{ijks} R_{ijkl})$$

である.

主張. θ はいたるところ零である.

実際, θ は平行かつ対称な $(0, 2)$ 型テンソルであり, M は既約であるから, θ は計量テンソル g の定数 c 倍でなければならない. ところが, 条件 (ii) により, θ のトレースは零であるから, $c = 0$ でなければならず, よって $\theta = 0$ である.

非線型松島の公式の証明は, 部分積分を一回行い, 上の主張を適用すれば終わる. 局所座標に関して計算すると, 次のようである:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} \nabla_i f_l^\alpha \nabla_j f_k^\beta h_{\alpha\beta} \\ &= - \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} f_l^\alpha \nabla_i \nabla_j f_k^\beta h_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} f_l^\alpha [\nabla_i, \nabla_j] f_k^\beta h_{\alpha\beta} \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} f_l^\alpha R_{ijk}{}^m f_m^\beta h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} f_l^\alpha R_{\gamma\delta\alpha\epsilon}^N f_i^\gamma f_j^\delta f_k^\epsilon \\ &= -\frac{1}{4} \int_{\Gamma \setminus M} (g^{ms} Q^{ijkl} R_{ijks} + g^{ls} Q^{ijkm} R_{ijks}) f_l^\alpha f_m^\beta h_{\alpha\beta} \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N f_i^\alpha f_j^\beta f_k^\gamma f_l^\delta \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} Q^{ijkl} R_{\alpha\beta\gamma\delta}^N f_i^\alpha f_j^\beta f_k^\gamma f_l^\delta. \end{aligned}$$

以上の計算を座標によらない形で書くと次のようになる:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \setminus M} \langle (Q \circ \sigma_{24}) \otimes f^* h^*, \nabla df \otimes \nabla df \rangle \\ &= - \int_{\Gamma \setminus M} \langle Q \otimes f^* h^*, \nabla \nabla df \otimes df \rangle = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} \langle Q \otimes f^* h^*, ([\nabla, \nabla] df) \otimes df \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} \langle \iota(df)Q, \iota(df)R \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} \langle Q, f^* R^N \rangle \\ &= -\frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} \langle \theta, f^* h \rangle + \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} \langle Q, f^* R^N \rangle = \frac{1}{2} \int_{\Gamma \setminus M} \langle Q, f^* R^N \rangle. \end{aligned}$$

□

定理 4.2 の証明においては, Q に課した条件のうち, (i), (ii) だけを用いたことに注意しておく.

条件 (i)–(iv) をみたす曲率型テンソル Q を構成するに先だって, 定理 4.2 から定理 4.1 が導かれることをみておこう. 実際, 定理 4.2 の公式 (1) の右辺は (iv) により非正である. さらに, f の調和性と (iv) により, $\nabla df = 0$ が結論される. このことから定理 4.1 の結論がしたがう.

残っているのは, 条件 (i)–(iv) をみたす曲率型テンソル Q の構成である. M 上の平行な曲率型テンソルのなすベクトル空間の $\mathbb{R}$ 上の次元を $d(M)$ で表す. これは $o = K \in M$ で定義された K 不変な曲率型テンソルのなすベクトル空間の $\mathbb{R}$ 上の次元に等しい. 以下, 階数 ≥ 2 かつ $d(M) = 2$ という単純な場合に, Q を構成することにする. この場合は, 実グラスマン多様体の非コンパクト双対を除いて, すべての非エルミートの, 非四元数的かつ階数 ≥ 2 の場合を含む (c.f. [25], p. 64 – p. 65). 他の場合については [25] を参照されたい.

断面曲率が恒等的に 1 に等しい曲率型テンソルを I で表す. $c(M) = -\langle R, R \rangle / \langle R, I \rangle$ とおくと $\langle c(M)I + R, R \rangle = 0$ である. $\langle R, I \rangle$ はスカラー曲率の 2 倍に等しいから, $c(M) > 0$ である.

補題 4.3. 曲率型テンソル $Q = c(M)I + R$ は条件 (i)–(iv) をみたす.

Proof. 条件 (iii) を確かめるために, 金行-長野 [17, 18] の計算結果を用いる. そのために, 定数 $c(M)$ をリー環に関して計算する. G の極大コンパクト部分群 K のリー環を $\mathfrak{k}$ で表し, $\mathfrak{k} = \mathfrak{z} \oplus (\oplus_s \mathfrak{k}_s)$ を $\mathfrak{k}$ の中心 $\mathfrak{z}$ と単純部分環 $\mathfrak{k}_s$ への分解とする. $\mathfrak{k}$ は $\Lambda^2 T_o M$ ($o = K$) の部分空間とみなされる. $\mathfrak{k}$ の分解は K の作用で不変であるから, 同じく K 不変な曲率テンソル R^M は $-a_0 \text{id}_{\mathfrak{z}} - \sum_s a_s \text{id}_{\mathfrak{k}_s}$ (a_0, a_s は正の定数) に等しい.

中心 $\mathfrak{z}$ が非自明になるのは, 対称空間がエルミート的な場合に限る. この場合, $\dim \mathfrak{z} = 1$ で K の中心は円周群 S^1 である. そして S^1 の位数 4 の元が M の複素構造 J を定める. $R(X, Y)$ (X, Y は任意の接ベクトル) は接空間の準同型として J と可換であるから, $a_0 = 1$ である. よって

$$c(M) = \left(\dim \mathfrak{z} + \sum_s (a_s)^2 \dim \mathfrak{k}_s \right) / 2 \left(\dim \mathfrak{z} + \sum_s a_s \dim \mathfrak{k}_s \right)$$

である.

松島 [24] にしたがって, M が非エルミートな場合に $b(M) = \min_s a_s/2$ とおく. すると, 上の式から明らかに $c(M) \geq b(M)$ である. 金行-長野 [17, 18] による $b(M)$ と 2 次形式 $(\xi^{ij}) \mapsto R_{ijkl} \xi^{il} \xi^{jk}$ (ξ^{ij} は対称かつトレース零) の最小固有値の計算により, 四元数双曲空間 $\text{Sp}(n, 1)/\text{Sp}(1) \times \text{Sp}(n)$ ($n \geq 2$) の場合を除いて, 条件 (iii) が $Q = b(M)I + R$ に対して成り立つことが読みとれる. とくに, 条件 (iii) が $Q = c(M)I + R$ に対して成り立つ. 四元数双曲空間の場合には, 条件 (iii) は $Q = b(M)I + R$ に対しては成り立たないが, $Q = c(M)I + R$ に対しては成り立つことが確かめられる.

二つの正規直交する接ベクトル X, Y に対して, $S(X, Y) = (X \wedge Y) \otimes (X \wedge Y)$ とおき, M のリーマン計量 g によって添え字を下げて得られる $(0, 4)$ 型テンソルも同じ記号で表す. $S(X, Y)$ は曲率型テンソルである. 以下, 条件 (iv) を確かめる. M の階数 ≥ 2 であるから, 二つの正規直交する接ベクトル $X, Y \in T_o M$ で, M の断面曲率が $X \wedge Y$ において零になるものがとれる. o において, $S(X, Y)$ を K の $T_o M$ への作用によって平均して得られる曲率型テンソルを $\tilde{Q}$ とする. すなわち,

$$\tilde{Q} = \int_{k \in K} S(k \cdot X, k \cdot Y)$$

($k \cdot X$ は k のベクトル X への作用を表す) である. G 作用を用いて $\tilde{Q}$ を M 全体に拡張する. 点 o において

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q}, R \rangle &= \int_{k \in K} \langle R, S(k \cdot X, k \cdot Y) \rangle \\ &= \int_{k \in K} R(k \cdot X, k \cdot Y, k \cdot X, k \cdot Y) \\ &= \int_{k \in K} R(X, Y, X, Y) = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ.

$d(M) = 2$ であるから, 曲率型テンソル $\tilde{Q}$ は I と R の線型結合である. $\langle \tilde{Q}, R \rangle = \langle c(M)I + R, R \rangle = 0$ であるから, ある定数 η が存在して $c(M)I + R = \eta \tilde{Q}$ と書ける. η の符号を決定するために, $c(M)I + R = \eta \tilde{Q}$ の両辺と I との内積をとると,

$$\langle c(M)I + R, I \rangle = \frac{1}{c(M)} \langle c(M)I + R, c(M)I + R \rangle$$

は正である. 一方, $\tilde{Q}$ の定義により $\langle \tilde{Q}, I \rangle$ は $I(k \cdot X, k \cdot Y, k \cdot X, k \cdot Y)$ の $k \in K$ についての平均に等しく, この値は 1 である. よって η は正である. すべての断面曲率が非正の曲率型テンソル T に対して

$$\begin{aligned} \langle c(M)I + R, T \rangle &= \eta \langle \tilde{Q}, T \rangle = \eta \int_{k \in K} \langle T, S(k \cdot X, k \cdot Y) \rangle \\ &= \eta \int_{k \in K} T(k \cdot X, k \cdot Y, k \cdot X, k \cdot Y) \leq 0 \end{aligned}$$

であるから, 条件 (iv) がみたされる. $\square$

定理 4.1 が Margulis 超剛性を導くことをみるためには, 次を示せばおおよそ十分である.

定理 4.4. (M, g) を既約で階数が 2 以上の非コンパクト型対称空間とする. Γ を (M, g) の等長変換群 $G = \text{Isom}(M, g)$ の離散部分群で, M に自由かつコンパクトに作用するものとする. (N, h) を Hadamard 多様体とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(N, h)$ を固有⁷な準同型とする. このとき, ρ 同変調和写像 $f: M \rightarrow N$ が存在する.

⁷定義は第 5 節で与えてある.

Proof. N が可縮であるから, ρ 同変写像 $f_0 : M \rightarrow N$ が存在する. f_0 を初期値とする Eells-Sampson 方程式の解を f_t ($0 \leq t \leq \infty$) とすると, f_t は ρ 同変であり, df_t のノルムは t によらず一様に有界である. $x_0 \in M$ を固定する. $t \rightarrow \infty$ としたとき, $f_t(x_0)$ が N の有界集合にとどまるならば, f_t は ρ 同変調和写像 f_∞ に収束することが証明される (例えば [12] をみよ). よって, ρ 同変調和写像が存在しないとすると, ∞ に発散する時間列 $\{t_n\}$ が存在して, $f_{t_n}(x_0)$ は N の無限遠点 y に収束することになる. このとき, f_t は一様 Lipschitz であるから, 任意の $\gamma \in \Gamma$ に対して

$$d(\rho(\gamma)(f_{t_n}(x)), f_{t_n}(x)) = d(f_{t_n}(\gamma x), f_{t_n}(x))$$

は一様に有界である. よって, すべての $\gamma \in \Gamma$ に対して $\rho(\gamma)y = y$ となるが, これは ρ が固有であることに矛盾する. $\square$

5. 定義空間が単体複体の場合

この節では, 単体複体から非正曲率空間への同変写像のエネルギーを定義し, エネルギーを最小化する同変写像の存在およびその性質について述べる⁸. また, 離散群の超剛性への応用として, 一つの固定点定理を与える. その証明は, エネルギー最小同変写像に非線型 Garland の公式を適用することによってなされる.

まず, Hadamard 空間の定義, 基本事項および例について復習しておこう. 距離空間 (Y, d) が**測地的空間** (geodesic space) であるとは, Y の任意の 2 点 p, q に対して p から q への測地線, すなわち曲線 $c : [a, b] \rightarrow Y$ で

$$d(c(t), c(t')) = |t - t'|, \quad \forall t, t' \in [a, b]$$

という性質を持つものが存在するときをいう. Δ を Y 内の測地三角形とする. すなわち, Δ は Y の 3 点 p, q, r とそれらを結ぶ 3 つの測地線分を指定したものである. Δ に対応して, 平面 $\mathbb{R}^2$ 上の三角形 $\overline{\Delta} = \overline{pqr}$ を

$$d(p, q) = |\overline{p} - \overline{q}|, \quad d(q, r) = |\overline{q} - \overline{r}|, \quad d(r, p) = |\overline{r} - \overline{p}|$$

をみたすようにとる. このとき, Δ の周上の任意の 2 点 x, y と対応する $\overline{\Delta}$ 上の 2 点 $\overline{x}, \overline{y}$ に対して

$$d(x, y) \leq |\overline{x} - \overline{y}|$$

が成り立つとき, Δ は CAT(0) 条件をみたすという. 測地的空間 (Y, d) が **Hadamard 空間** (Hadamard space) であるとは, (Y, d) が距離空間として完備であり, Y 内の任意の測地三角形が CAT(0) 条件をみたすときをいう. Hadamard 空間内の任意の 2 点を結ぶ測地線は一意的である. また, Hadamard 空間は可縮である.

以下, (Y, d) を Hadamard 空間とする. $p \in Y$ に対して, p における Y の接錐 $TC_p Y$ とその上の「内積擬き」および距離が定義できる. 詳細は文献 [2] を参照してもらうことにして, ここでは概略を述べておく. まず, $p \in Y$ を始点とする非自

⁸特異点をもつ空間を定義域とする調和写像, エネルギー最小写像の研究としては, Jost [13, 14], Lebeau [22], 小谷-砂田 [20] がある.

明な測地線 c, c' の間の角度 $\angle_p(c, c')$ を比較三角形の角度を使って定義することができる. p を始点とする非自明な測地線全体の集合に, 角度が 0 のときに同値とする同値関係を定め, 同値類全体の集合を $S_p Y$ で表す. $S_p Y$ は p における**方向空間** (space of direction) とよばれる. 測地線 c の属する同値類を $[c]$ で表す. $\angle_p(\cdot, \cdot)$ は $S_p Y$ に距離を誘導する. $S_p Y$ 上の錘

$$TC_p Y = S_p Y \times [0, \infty) / S_p Y \times \{0\}$$

を p における Y の**接錘** (tangent cone) とよぶ. $TC_p Y$ 上には「内積擬き」 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ および距離 $d_{TC_p Y}$ がそれぞれ

$$\langle ([c], t), ([c'], t') \rangle = tt' \cos \angle_p([c], [c']),$$

$$d_{TC_p Y}([c], t), ([c'], t')^2 = t^2 + t'^2 - 2\langle ([c], t), ([c'], t') \rangle$$

によって定義される. 最後に, 写像 $\pi_p : Y \rightarrow TC_p Y$ を $\pi_p(q) = ([c_{p,q}], d_Y(p, q))$ によって定義する. ここで, $c_{p,q}$ は p と q を結ぶ測地線である. π_p は距離を減少させる写像である.

Hadamard 空間の典型的な例をいくつかあげておく.

例 2. (i) アダマール多様体 (完備かつ単連結な Riemann 多様体で, 断面曲率が非正であるもの).

(ii) 樹木 (tree) Y を局所有限な樹木とし, 各頂点は少なくとも 3 つの辺の端点になっていると仮定する. 各辺の長さを例えば 1 として距離を定めると, Y は Hadamard 空間である. 辺の内点における接錐は直線に等長的である. 一方, p が頂点のとき, $TC_p Y$ はいくつかの半直線の和集合においてすべての端点を同一視したものに等長的であり, $v, w \in TC_p Y$ の間の角度は

$$\angle_p(v, w) = \begin{cases} 0 & (v, w \text{ が同じ半直線に属するとき}) \\ \pi & (\text{そうでないとき}) \end{cases}$$

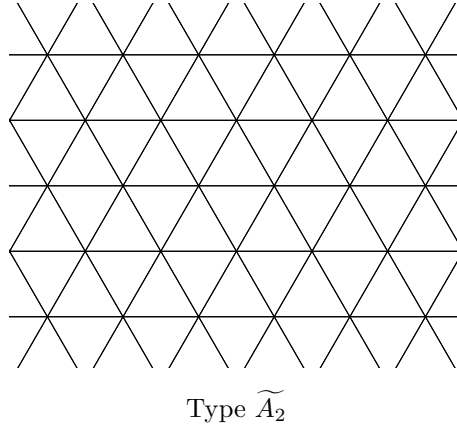
によって与えられる.

Hadamard 空間の直積は再び Hadamard 空間であるので, とくに局所有限な樹木の直積は Hadamard 空間である.

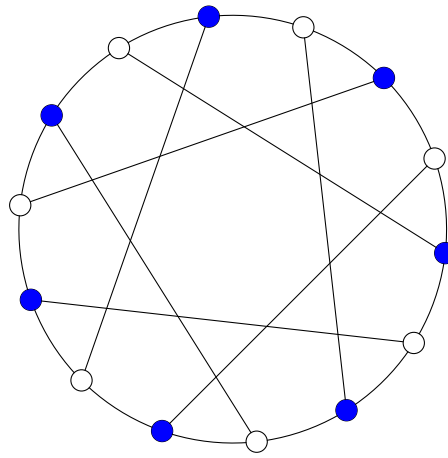
(iii) Euclid 的ビルディング ビルディングとは, ある性質をもつ部分複体 (アパートメントとよばれる) の族が指定された単体複体で, 各アパートメントはコクセター複体 (コクセター群に付随して定まる単体複体) に同型であることが要請される. コクセター複体が Euclid 空間を三角形分割したものであるとき, ビルディングは Euclid 的ビルディングとよばれる. このとき, 各アパートメントに Euclid 距離を移植することにより, ビルディングに距離を定めることができ, この距離によって Euclid 的ビルディングは Hadamard 空間になる.

1 次元の Euclid 的ビルディングは, 樹木で各頂点が少なくとも 2 つの辺の端点になっているものに他ならない.

2次元の Euclid 的ビルディングの例として, 代数群 $PGL(3, \mathbb{Q}_p)$ ($\mathbb{Q}_p$ は p 進体) に付随して定まるものがよく知られている. この場合, コクセター複体は下図のものであり, 対応するコクセター群は, 図の直線に関する鏡映によって生成される Euclid 的鏡映群 ($\widetilde{A}_2$ 型とよばれるもの) である.



$p = 2$ の場合, 各頂点のリンクは次のようなグラフである:



図の中に様々な 6 角形が見えるが, これらはアパートメントによるリンクの切り口を表しており, コクセター複体における頂点のリンクである正 6 角形に対応する.

次に, 単体複体から非正曲率空間への同変写像のエネルギーを定義する. X を単体複体とし, $X(r)$ (resp. $\vec{X}(r)$) で X の r 単体 (resp. 順序つき r 単体) 全体の集合を表す.

定義 5.1. X 上の許容ウェイト (admissible weight) とは, $\cup_{r \geq 0} X(r)$ 上の正值関数 m で

$$\sum_{t \in X(r+1), t \supset s} m(t) = m(s), \quad s \in X(r)$$

をみたすもののことをいう.

m を自然に $\cup_{r \geq 0} \vec{X}(r)$ 上の関数とみなしたのも同じ記号で表す.

以後, X には許容ウェイト m が与えられているとし, 群 Γ が単体的, 固有不連続かつコンパクトに, しかも m を保って作用しているとする. $\vec{\mathcal{F}}(r)$ で $\vec{X}(r)$ への Γ 作用の代表系を表す. また, $s \in \vec{X}(r)$ に対し Γ_s で s の固定化群を表す. Γ 作用は固有不連続だから, Γ_s の位数 $|\Gamma_s|$ は有限である.

Y を Hadamard 空間とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(Y)$ ($\text{Isom}(Y)$ は Y の等長変換群を表す) を準同型とする. 写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ が ρ 同変であるとは, $f(\gamma x) = \rho(\gamma)f(x)$ ($x \in X(0), \gamma \in \Gamma$) をみたすときをいう. 任意の ρ に対して ρ 同変写像が存在する.

定義 5.2. ρ 同変写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ のエネルギー $E(f)$ を

$$E(f) = \frac{1}{2} \sum_{(x,y) \in \vec{\mathcal{F}}(1)} \frac{m(x,y)}{|\Gamma_{(x,y)}|} d_Y(f(x), f(y))^2$$

によって定義する.

ρ 同変写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ がエネルギー最小であるとは, すべての ρ 同変写像 $g: X(0) \rightarrow Y$ に対して $E(f) \leq E(g)$ をみたすときをいう.

エネルギー最小な ρ 同変写像の存在について述べるために, 次の定義をおく.

定義 5.3. Γ を有限生成群 (よって可算群) とし, その生成元 $\{\gamma_1, \dots, \gamma_m\}$ を選んでおく. このとき, 準同型 $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(Y)$ が固有であるとは, 任意の $L > 0$ に対して

$$\left\{ p \in Y \mid \max_{i=1, \dots, m} d_Y(\rho(\gamma_i)p, p) \leq L \right\}$$

が Y において有界であるときをいう.

ρ が簡約的であるとは, 次の条件のいずれかをみたすときをいう:

- (i) Y の ρ 不変な閉凸集合 C が存在して, 準同型 $\gamma \in \Gamma \mapsto \rho(\gamma)|_C \in \text{Isom}(C)$ は固有である;
- (ii) Y の ρ 不変な閉凸集合 F で, $\mathbf{R}^k$ ($k \geq 0$) に等長的なものが存在する.

次の命題が成り立つ.

命題 5.4. X, Γ, Y, ρ は前述の通りとし, さらに Y は局所コンパクト, ρ は簡約的であると仮定する. このとき, エネルギー最小な ρ 同変写像 $f: X(0) \rightarrow Y$ が存在する.

命題 5.5. $f : X(0) \rightarrow Y$ を命題 5.4 のとおりとする. このとき, 任意の $x \in X(0)$, $v \in TC_{f(x)}Y$ に対して

$$(2) \quad \sum_{y \in (\text{Lk } x)(0)} \langle F_x(y), v \rangle \leq 0$$

が成り立つ. ここで, $F_x(y) = \pi_{f(x)}(f(y))$ とおいている. $(TC_{f(x)}Y, d_{TC_{f(x)}Y})$ が $\mathbb{R}^N$ に等長的なら, 不等号は等号になる.

注意 2. 不等式 (2) は, $\{F_x(y) \mid y \in (\text{Lk } x)(0)\}$ の $TC_{f(x)}Y$ における「重心」が原点 $0_{f(x)}$ に一致することを意味している.

次にのべる結果は, 非線型松島の公式の類似である. この公式は, 後述する固定点定理の証明の鍵になる. Garland [7] ([1] もみよ) が, 松島の公式の単体複体に対する類似物を書き下したことにちなんで, 非線型 Garland の公式とよぶ.

命題 5.6. X, Γ, Y, ρ は前述のとおりとし, $f : X(0) \rightarrow Y$ を ρ 同変写像とする. このとき, 次の和公式が成り立つ:

$$(3) \quad \begin{aligned} 0 = & \sum_{x \in \mathcal{F}(0)} \frac{1}{|\Gamma_x|} \left[\sum_{(y, y') \in (\overrightarrow{\text{Lk } x})(1)} m(x, y, y') d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y), F_x(y'))^2 \right. \\ & - \sum_{y \in (\text{Lk } x)(0)} m(x, y) d_{TC_{f(x)}Y}(0_{f(x)}, F_x(y))^2 \\ & \left. + \sum_{(y, y') \in (\overrightarrow{\text{Lk } x})(1)} m(x, y, y') \left\{ d_Y(f(y), f(y'))^2 - d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y), F_x(y'))^2 \right\} \right]. \end{aligned}$$

注意 3. $\pi_{f(x)} : Y \rightarrow TC_{f(x)}Y$ は距離を減少させる写像なので,

$$d_Y(f(y), f(y')) \geq d_{TC_{f(x)}Y}(F_x(y), F_x(y')), \quad (y, y') \in (\overrightarrow{\text{Lk } x})(1)$$

が成り立つ. よって, (3) の右辺 [] 内の第 3 項は非負である.

超剛性に関する結果を述べるために, 少し準備を行う. 以後, すべての $x \in X(0)$ に対して $\text{Lk } x$ は連結であると仮定し,

$$\begin{aligned} \mu_1(\text{Lk } x) = & \inf \left\{ \frac{\frac{1}{2} \sum_{(y, y') \in (\overrightarrow{\text{Lk } x})(1)} m(x, y, y') (\varphi(y) - \varphi(y'))^2}{\sum_{y \in (\text{Lk } x)(0)} m(x, y) \varphi(y)^2} \mid \right. \\ & \left. \varphi \in C^0(\text{Lk } x), \varphi \not\equiv 0, \sum_{y \in (\text{Lk } x)(0)} m(x, y) \varphi(y) = 0 \right\} \end{aligned}$$

とおく. $\mu_1(\text{Lk } x)$ は $\text{Lk } x$ の離散的ラプラシアン

$$(\Delta \varphi)(y) = \varphi(y) - \frac{1}{m(x, y)} \sum_{y'; (y, y') \in (\overrightarrow{\text{Lk } x})(1)} m(x, y, y') \varphi(y'), \quad \varphi \in C^0(\text{Lk } x)$$

の最小正固有値に他ならない.

我々にとって興味があるのは, すべての $x \in X(0)$ に対して $\mu_1(\text{Lk } x) > 1/2$ が成り立つ場合である.

例 3. そのような単体複体 X の典型的な例として, 次元 2 以上の Euclid 的ビルディングや Ballmann-Swiatkowski 複体 [1] 等がある. 例えば, X を例 2 (iii) の $\tilde{A}_2$ ビルディングとする. このとき, すべての $x \in X(0)$ に対して $\text{Lk } x$ は同型なグラフであり, Feit-Higman [6] の計算により

$$\mu_1(\text{Lk } x) = 1 - \sqrt{p}/(p+1) > \frac{1}{2}$$

である.

次に, Hadamard 空間 Y の接錐のある種の剛性をはかる不変量を導入する.

定義 5.7. $p \in Y$ とし, $\{v_1, \dots, v_m\} \subset TC_p Y \setminus \{0\}$ と $\{t_1, \dots, t_m\} \subset \mathbb{R}_{>0}$ ($\sum_{i=1}^m t_i = 1$) で条件

$$\sum_{i=1}^m t_i \langle v_i, w \rangle \leq 0, \quad \forall w \in TC_p Y$$

をみたすものが与えられたとする⁹. このとき, Euclid 空間 $\mathbb{R}^m$ 内のベクトル $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$ で

$$|\mathbf{v}_i| = d_{TC_p Y}(0_p, v_i), \quad |\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_j| \leq d_{TC_p Y}(v_i, v_j)$$

をみたすものをすべて考え,

$$\delta(\{v_i\}, \{t_i\}) = \inf_{\{\mathbf{v}_i\}} \left[\left| \sum_{i=1}^m t_i \mathbf{v}_i \right|^2 \middle/ \sum_{i=1}^m t_i |\mathbf{v}_i|^2 \right] \in [0, 1]$$

とおく. そして

$$\delta(TC_p Y) = \sup_{\{v_i\}, \{t_i\}} \delta(\{v_i\}, \{t_i\}) \in [0, 1]$$

と定義する. $\delta(TC_p Y) = 0$ のときに, 接錐 $TC_p Y$ は柔軟 (flexible) であるという.

非線型 Garland の公式 (3) を用いて, 次の固定点定理を証明することができる.

定理 5.8. X を許容ウェイト m の与えられた単体複体とし, すべての $x \in X(0)$ に対して $\text{Lk } x$ が連結で $\mu_1(\text{Lk } x) > \frac{1}{2}$ が成り立つと仮定する. Γ を X に単体的, 固有不連続かつコンパクトに作用する離散群とする. Y を局所コンパクトな Hadamard 空間とし, $\rho: \Gamma \rightarrow \text{Isom}(Y)$ を簡約的な準同型とする. さらに, 次の条件がみたされているとする:

$$(4) \quad \left(1 - \sup_{p \in Y} \delta(TC_p Y) \right) \inf_{x \in X(0)} \mu_1(\text{Lk } x) > \frac{1}{2}.$$

このとき, 命題 5.4 の ρ 同変エネルギー最小写像は定値写像である. とくに, $\rho(\Gamma)$ は Y に固定点をもつ.

⁹条件は, $\{v_i\}$ の $TC_p Y$ における $\{t_i\}$ を重みとする重心が, $TC_p Y$ の原点 0_p に一致することを意味する.

注意 4. 定理の条件は, Y の接錐がすべて柔軟であればみたされる. 一方, この条件が意味をもつのは, $\delta(TC_p Y) < \frac{1}{2}$ の場合である.

例 4. 接錐が Euclid 空間に等長的ならば明らかに柔軟であるが, Euclid 空間に等長的でなくても, 接錐が柔軟になることがある. 実際, Y を例 2 (ii) の樹木とすると, その特異点における接錐は 3 本以上の半直線の和集合においてすべての端点を同一視したものに等長的である. この接錐が柔軟であることを示すことができる (練習問題).

また, Y をこれらの例のいくつかの直積とするとき, その接錐もやはり柔軟である.

一方, 例 2 (iii) の $\tilde{A}_2$ ビルディングの頂点 P における接錐は柔軟でない. 実際,

$$(5) \quad \delta(TC_P Y) \geq 1 - \frac{1}{2(1 - \sqrt{p}/(p+1))} = \frac{(\sqrt{p} - 1)^2}{2(p - \sqrt{p} + 1)}$$

が成り立つ. (5) において等号が成立すると予想している.

REFERENCES

- [1] W. Ballmann and J. Świątkowski, *On L^2 -cohomology and property (T) for automorphism groups of polyhedral cell complexes*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 615–645.
- [2] M. R. Bridson and A. Haefliger, *Metric Spaces of Non-positive Curvature*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 1999.
- [3] K. Corlette, *Archimedean superrigidity and hyperbolic geometry*, Ann. Math. **135** (1992), 165–182.
- [4] J. Eells and L. Lemaire, *Selected Topics in Harmonic Maps*, Amer. Math. Soc., Providence, 1983.
- [5] J. Eells and J. H. Sampson, *Harmonic maps of Riemannian manifolds*, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.
- [6] W. Feit and G. Higman, *The nonexistence of certain generalized polygons*, J. Algebra **1** (1964), 114–131.
- [7] H. Garland, *p -adic curvature and the cohomology of discrete subgroups of p -adic groups*, Ann. Math. **97** (1973), 375–423.
- [8] M. Gromov and R. Schoen, *Harmonic maps into singular spaces and p -adic superrigidity for lattices in groups of rank one*, Publ. Math. IHES **76** (1992), 165–246.
- [9] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and superrigidity* (Japanese), Hyperbolic spaces and discrete groups II (Kyoto, 2001), RIMS Kokyuroku **1270** (2002), 182–194.
- [10] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and superrigidity — the case of singular target* (Japanese), Perspectives of hyperbolic spaces (Kyoto, 2002), RIMS Kokyuroku **1329** (2003), 1–7.
- [11] H. Izeki and S. Nayatani, *Combinatorial harmonic maps and superrigidity*, in preparation.
- [12] J. Jost, *Harmonic mappings between Riemannian manifolds*, Proc. CMA **4**, ANU-Press, Canberra, 1984.
- [13] J. Jost, *Equilibrium maps between metric spaces*, Calc. Var. **2** (1997), 173–204.

- [14] J. Jost, *Convex functionals and generalized harmonic maps into spaces of nonpositive curvature*, Comment. Math. Helv. **70** (1995), 659–673.
- [15] J. Jost and S.-T. Yau, *Harmonic maps and superrigidity*, Differential geometry: partial differential equations on manifolds, Proc. Symp. Pure Math. **54-I** (1993), 245–280.
- [16] 金井雅彦, 剛性問題と調和写像, 数学の未解決問題 – 21 世紀数学への序章 –, サイエンス社.
- [17] S. Kaneyuki and T. Nagano, *On the first Betti numbers of compact quotient spaces of complex semi-simple Lie groups by discrete subgroups*, Sci. Pap. Coll. Gen. Ed. Univ. Tokyo **12** (1962), 1–11.
- [18] S. Kaneyuki and T. Nagano, *On certain quadratic forms related to symmetric Riemannian spaces*, Osaka Math. J. **14** (1962), 241–252.
- [19] M. Korevaar and R. Schoen, *Sobolev spaces and harmonic maps for metric space targets*, Comm. Anal. Geom. **1** (1993), 561–659.
- [20] M. Kotani and T. Sunada, *Standard realizations of crystal lattices via harmonic maps*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2000), 1–20.
- [21] F. Labourie, *Existence d'applications harmoniques toudues à valeurs dans les variété à courbure négative*, Proc. Amer. Math. Soc. **111** (1991), 877–882.
- [22] É. Lebeau, *Applications harmoniques entre graphes finis et un théorème de superrigidité*, Ann. Inst. Fourier **46** (1996), 1183–1203.
- [23] G. Margulis, *Discrete subgroups of semisimple Lie groups*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.
- [24] Y. Matsushima, *On the first Betti number of compact quotient spaces of higher-dimensional symmetric spaces*, Ann. Math. **75** (1962), 312–330.
- [25] N. Mok, Y.-T. Siu and S.-K. Yeung, *Geometric superrigidity*, Invent. Math. **113** (1993), 57–83.
- [26] 西川青季, 落合卓四郎, *Harmonic Maps の存在と応用*, R. G. A. II, 1980.
- [27] Y.-T. Siu, *The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds*, Ann. Math. **112** (1980), 73–111.
- [28] M.-T. Wang, *A fixed point theorem of discrete group actions on Riemannian manifolds*, J. Diff. Geom. **50** (1998), 249–267.
- [29] M.-T. Wang, *Generalized harmonic maps and representations of discrete groups*, Comm. Anal. Geom. **8** (2000), 545–563.
- [30] K. Yano and S. Bochner, *Curvature and Betti numbers*, Ann. Math. Studies **32**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1953.