調和写像の存在と応用

西川 青季 (東北大学大学院理学研究科) *

落合卓四郎氏の主催のもとに，第 1 回の “Surveys in Geometry” シンポジウムが慶應大学工学部において開催されたのは 1980 年 2 月 6, 7 日であった．そのとき「塊より始めよ」ということで，落合氏と二人で選んだシンポジウムのテーマが「Harmonic Map とその応用」であった．

このシンポジウムでは，落合氏が前半で Plateau 問題の解法を中心に「変分問題の直接法」を基礎から解説され，私が後半でいわゆる「熱流の方法」を中心に Eells-Sampson [5] の存在定理と，この定理の Siu [19, 20] による負曲率 Kähler 多様体の剛性定理への応用について解説した．このシンポジウムの予稿集に加筆訂正を加えたものは，その年の 6 月に小畠守生，大森英樹，落合卓四郎氏の編集・発行になる “Reports on Global Analysis” シリーズの第 2 巻 [15] として刊行されている．

実は，このシンポジウムのテーマとして「調和写像の存在と応用」を選んだ際，われわれの念頭にあったもう一つの主題は，ちょうどその当時発表された Sacks-Uhlenbeck [18] による極小球面の存在定理と，Siu-Yau [21] による Frankel 予想の解決へのその応用であった．とくに Siu と Yau による Frankel 予想の解決は，落合氏が小林昭七氏との共同研究 [13] で示しておられた「複素射影空間の特徴付け」を調和写像の存在を利用して実現したもので，調和写像の理論の有効性に対する認識が甘かったと反省させられた出来事であった．[1]

そこで今回の “Surveys in Geometry” 特別シンポジウムでは，第 1 回のシンポジウムのテーマと同じタイトルで，そのとき触れられなかった「調和写像の存在と複素射影空間の特徴付け」との関係について再考してみたい．

§1 調和写像の定義
§2 調和写像の存在定理
§3 正則ベクトル束と複素 Finsler 計量
§4 Hartshorne 予想と Frankel 予想
§5 Kähler Finsler 多様体への調和写像

*Surveys in Geometry, Special Edition (落合卓四郎先生還暦記念), 2003 年 10 月 31 日, 予稿

[1] その当時落合氏から伺った話では，「Sacks-Uhlenbeck の極小球面の存在定理を用いて Frankel 予想を解決出来るのではないか」という話を Yau にされていたとのことであった．

§1 調和写像の定義

$M=(M,g)$ をコンパクトな m 次元 Riemann 多様体，$N=(N,h)$ を完備な n 次元 Riemann 多様体とする．M から N への C^∞ 級写像 $f:M\to N$ に対し，写像 f の微分 $df:TM\to TN$ は，M の余接ベクトル束 TM^* と f により N の接ベクトル束 TN を M 上に引き戻したベクトル束 $f^{-1}TN$ のテンソル積 $TM^*\otimes f^{-1}TN$ への C^∞ 級切断面を定める．

$X,Y\in\Gamma(TM)$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場とし，∇^{TM} と $\nabla^{f^{-1}TN}$ をそれぞれ M の Levi-Civita 接続および N の Levi-Civita 接続の f による引き戻しとするとき，C^∞ 級切断面 $df\in\Gamma(TM^*\otimes f^{-1}TN)$ の共変微分 $\nabla df\in\Gamma(TM^*\otimes TM^*\otimes f^{-1}TN)$ が

$$\nabla df(X,Y)=\nabla^{f^{-1}TN}_X df(Y)-df(\nabla^{TM}_X Y) \tag{1}$$

で定義される．f が等長的はめ込みのとき，∇df は Riemann 部分多様体 $f(M)\subset N$ の第 2 基本形式に他ならない．

そこで，Riemann 部分多様体の場合の平均曲率ベクトル場の一般化として，写像 f のテンション場 (tension field) とよばれる f に沿ったベクトル場 $\tau(f)\in\Gamma(f^{-1}TM)$ を，$\{E_i\}$ を M 上の正規直交標構ベクトル場として

$$\tau(f)=\mathrm{Trace}_g\nabla df=\sum_{i=1}^m\nabla df(E_i,E_i)$$

で定義することができる．このテンション場 $\tau(f)$ が恒等的に零ベクトル場となるとき，f を M から N への調和写像 (harmonic map) という．

M の局所座標系 (x^i) および N の局所座標系 (y^α) のもとで，M と N の Riemann 計量 g と h はそれぞれ

$$g=\sum_{i,j=1}^m g_{ij}dx^idx^j,\quad h=\sum_{\alpha,\beta=1}^n h_{\alpha\beta}dy^\alpha dy^\beta$$

と表示され，写像 f は

$$f(x)=\big(f^1(x^1,\dots,x^m),\dots,f^n(x^1,\dots,x^m)\big)=\big(f^\alpha(x^i)\big)$$

とあらわすことができる．このとき

$$e(f)=|df|^2=\mathrm{Trace}_g f^*h=\sum_{i,j=1}^m\sum_{\alpha,\beta=1}^n g^{ij}h_{\alpha\beta}(f)\frac{\partial f^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial f^\beta}{\partial x^j}$$

で定義される C^∞ 級関数 $e(f):M\to\boldsymbol{R}$ を f のエネルギー密度 (energy density) といい，M 上で $e(f)$ を積分した値

$$E(f)=\frac{1}{2}\int_M e(f)d\mu_g$$

を写像 f のエネルギー (energy) という．ここに (g^{ij}) は正値対称行列 (g_{ij}) の逆行列を，また μ_g は Riemann 計量 g から M 上に定義される標準的な測度をあらわす．

M から N への C^∞ 級写像全体のなす空間を $C^\infty(M,N)$ とするとき，写像のエネルギー $E(f)$ は写像空間 $C^\infty(M,N)$ 上の汎関数を定義していると考えられる．このとき，調和写像はこのエネルギー汎関数 $E : C^\infty(M,N) \to \boldsymbol{R}$ の臨界点をあたえる写像に他ならない．すなわち $f \in C^\infty(M,N)$ に対して，$\{f_t\}_{t\in I}$, $I = (-\epsilon, \epsilon)$ $(\epsilon > 0)$ を $f = f_0$ の C^∞ 級変分とし，

$$V = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} f_t \in \Gamma(f^{-1}TN) \tag{2}$$

を f の変分ベクトル場とするとき，$E(f_t)$ の第 1 変分が

$$\left.\frac{d}{dt}E(f_t)\right|_{t=0} = -\int_M \langle \tau(f), V\rangle d\mu_g \tag{3}$$

であたえられる．ただし $\langle\ ,\ \rangle$ は Riemann 計量 h から誘導束 $f^{-1}TN$ 上に定義される自然なファイバー計量をあらわす．

したがって，調和写像の定義方程式

$$\tau(f) = \sum_{\alpha=1}^{n} \tau(f)^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y^\alpha}\right)_f = 0$$

はこのエネルギー汎関数 E の Euler-Lagrange 方程式に他ならず，また定義 (1) より M と N の局所座標系のもとで

$$\tau(f)^\alpha = \Delta f^\alpha + \sum_{i,j=1}^{m}\sum_{\beta,\gamma=1}^{n} g^{ij}\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(f)\frac{\partial f^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial f^\gamma}{\partial x^j} = 0, \quad 1 \le \alpha \le n \tag{4}$$

とかきあらわされることがわかる．ここで Δ は M 上の Laplace-Beltrami 作用素であり，$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ は N 上の Christoffel の記号

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2}\sum_{\delta=1}^{n} h^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial h_{\gamma\delta}}{\partial y^\beta} + \frac{\partial h_{\beta\delta}}{\partial y^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial y^\delta}\right)$$

をあらわす．(4) 式は M 上の 2 階準線形楕円型偏微分方程式系である．したがって，C^2 級の写像 $f : M \to N$ で方程式系 (4) をみたすものは実は C^∞ 級写像となることがわかる．

調和写像の例は，微分幾何学のいろいろな局面にあらわれる．たとえば $N = \boldsymbol{R}$ のとき，エネルギーは関数 $f : M \to \boldsymbol{R}$ の Dirichlet 積分に等しく，(4) 式は Laplace の方程式 $\Delta f^\alpha = 0$ となり，調和写像 f は調和関数に他ならない．一方 $M = \boldsymbol{R}$ のとき，エネルギーは曲線 $f : \boldsymbol{R} \to N$ の通常のエネルギー積分に一致し，(4) 式は測地線の方程式

$$\frac{d^2 f^\alpha}{dt^2} + \sum_{\beta,\gamma=1}^{n} \Gamma^\alpha_{\beta\gamma}(f)\frac{df^\beta}{dt}\frac{df^\gamma}{dt} = 0$$

となり，調和写像は N 上の測地線に他ならない．またテンション場の定義より，等長的はめこみ $f : M \to N$ が調和写像であることと M が N の極小部分多様体となることが同値であることがわかる．したがってとくに全測地的等長写像 $f : M \to N$ は調和写像であり，さらに M と N が Kähler 多様体のときには，M から N への正則（または反正則）写像が調和写像となることがわかる．

調和写像の基本的事項に関しては，Eells-Lemaire の総合報告 [2, 3, 4] や西川 [16] などに詳しく述べられている．

§2 調和写像の存在定理

コンパクトな Riemann 多様体間の調和写像については，現在までにいろいろな存在定理がえられている．そのなかでも最も基本的な存在定理は，1964 年に Eells-Sampson によって証明された次の結果といえる．

定理 1 ([5]) (M, g) と (N, h) をコンパクトな Riemann 多様体とし，N の断面曲率はつねに非正であるとする．このとき任意の C^∞ 級写像 $f \in C^\infty(M, N)$ に対して，f と自由ホモトープな調和写像 $f_\infty : M \to N$ が存在する．

とくに N の断面曲率がつねに負ならば，定理 1 における調和写像 f_∞ は，f_∞ が定値写像の場合やその像が N の測地線になる場合を除いて，$C^\infty(M, N)$ の各自由ホモトピー類に対して一意的に定まる ([9])．また，M と N が境界をもつ Riemann 多様体である場合にも，調和写像の境界値問題に対して，定理 1 に対応する存在定理が Hamilton [8] により証明されている．

Eells-Sampson は，無限次元多様体上での Morse 理論を参考に，熱流の方法 (heat flow method) とよばれる方法をもちいて定理 1 を証明した．その考え方の要点は次のようなものである.

まず，細かいことは気にせずに $\mathcal{M} = \mathcal{C}^\infty(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ を '多様体' のごとくみなし, エネルギー汎関数 $E : C^\infty(M, N) \to \boldsymbol{R}$ を $\mathcal{M}$ 上の '関数' と考える. このとき f の変分 $\{f_t\}_{t \in I}$ は $\mathcal{M}$ 内の '曲線' を定めていると考えることができるから，(2) で定義される変分ベクトル場 $V \in \Gamma(f^{-1}TN)$ はこの曲線の $t = 0$ における '接ベクトル' に他ならない．したがって，$E(f_t)$ の第 1 変分は $\mathcal{M}$ 上の関数 E の点 $f \in \mathcal{M}$ における $V \in T_f\mathcal{M}$ 方向への '微分' $dE_f(V)$ を定義していると考えられる．一方，$W_1, W_2 \in \Gamma(f^{-1}TN)$ に対して

$$\langle\!\langle W_1, W_2 \rangle\!\rangle = \int_M \langle W_1, W_2 \rangle d\mu_g,$$

と定めると，$\langle\!\langle\ ,\ \rangle\!\rangle$ は接空間 $T_f\mathcal{M}$ の '内積' を定義することになり，結局第 1 変分公式 (3) は $\mathcal{M}$ 上の関数 E に対して

$$dE_f(V) = -\langle\!\langle \tau(f), V \rangle\!\rangle$$

がなりたつことを意味する．このことから，写像 f のテンション場 $\tau(f)$ は実は $\mathcal{M}$ 上の関数 $-E$ の勾配ベクトル場 $-\operatorname{grad} E$ に他ならず，Morse 理論のアナロジーから，関数 E は $\tau(f)$ の方向に最も効率よく減少することがわかる．

そこで，この勾配ベクトル場 $\tau(f)$ の定義する '流れ' に沿ってあたえられた写像 $f_0 \in C^\infty(M,N)$ を '変形' していこうと考えると，その軌跡 f_t が非線放物型偏微分方程式（あるいは簡単に非線形熱方程式）

$$\frac{\partial u_t}{\partial t} = \tau(f_t)$$

の解として求められることになる．したがって調和写像の存在問題は，この f_t に沿って f_0 を変形していくことにより，エネルギー汎関数 E の停留点 $\tau(f_\infty) = 0$ まで到達できるかどうかということになるわけである．

以上のことを念頭において，写像 $f : M \times [0,T) \to N$ に対して，次の非線形熱方程式の初期値問題を考える．

$$\text{(5)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \tau(f(x,t)), & (x,t) \in M \times (0,T) \\ f(x,0) = f_0(x) \end{cases}$$

ここに $T > 0$ であり，$f_0 \in C^\infty(M,N)$ は初期値としてあたえられた写像である．また f は $M \times [0,T)$ 上で連続かつ $M \times (0,T)$ 上で C^∞ 級な写像であるとする．

定理 1 を証明するには，この初期値問題に対して次のことを示せばよい：

(1) 任意の初期値 f_0 に対して，(5) は時間大域解 $f : M \times [0,\infty) \to N$ をもつ．
(2) f_0 の変形 f_t を $f_t(x) = f(x,t)$ で定義し $t \to \infty$ とするとき，必要ならば適当な部分列 f_{t_n} をとることにより，f_t は調和写像 $f_\infty : M \to N$ に収束し，かつ f_0 と f_∞ は自由ホモトープである．

(1), (2) の各ステップの証明には，(5) の解 $f(x,t)$ の時間 t に対する '増大度' の評価が重要な課題となってくる．その際，方程式 (2) の非線型項からくる影響をコントロールするために，Riemann 多様体 N の曲率が重要な役割を果たす．ここで N の断面曲率がいたるところ非正であるという条件が本質的にもちいられる．一方，N のコンパクト性は必ずしも必要でなく，時間大域解 $f : M \times [0,\infty) \to N$ の像 $f(M \times [0,\infty))$ が N のあるコンパクト集合に含まれていれば，(2) のステップの収束性は保証される．

以上の証明の詳細については，原論文 [5] または西川 [16, 15] をみるとよい．

§3 正則ベクトル束と複素 Finsler 計量

さて，以下 M をコンパクトな m 次元複素多様体とし，$\pi : E \to M$ を M 上の正則ベクトル束とする．E の元を，M の点 $z \in M$ と z 上の E のファイバー $E_z = \pi^{-1}(z)$

のベクトル $\zeta \in E_z$ の組 $(z,\zeta) \in E$ であらわし，E からその零切断面の像を取り去ったものを $E^\circ = E \setminus \{\mathbf{0}\}$ であらわす．このとき，E 上の実数値関数 $F : E \to \boldsymbol{R}$ で次の条件をみたすものを E の複素 **Finsler** 計量 (complex Finsler metric) という．

(1)（非負性）$F(z,\zeta) \geq 0$，かつ $F(z,\zeta) = 0$ となるのは $\zeta = 0$ のときに限る．
(2)（微分可能性）$F \in C^2(E^\circ)$，すなわち F は E° 上で C^2 級である．
(3)（斉次性）$F(z,\lambda\zeta) = |\lambda|F(z,\zeta)$ が任意の $\lambda \in \boldsymbol{C}$ と $(z,\zeta) \in E$ に対してなりたつ．

$z = (z^1,\ldots,z^m)$ を M の局所複素座標系，$\zeta = (\zeta^1,\ldots,\zeta^r)$ を E の局所正則枠 $s = (s_1,\ldots,s_r)$ に関するファイバー座標とするとき，E の局所座標系は $(z,\zeta) = (z^1,\ldots,z^m,\zeta^1,\ldots,\zeta^r) = (z^\mu,\zeta^i)$ であたえられる．E の各局所座標系 (z^μ,ζ^i) に関して，$G(z,\zeta) = F^2(z,\zeta)$ の複素 Hesse 行列

$$(G_{i\bar{j}}) = \left(\frac{\partial^2 G}{\partial\zeta^i \partial\bar{\zeta}^j}\right)$$

が E° 上でつねに正定値のとき，F を強擬凸 (strongly pseudoconvex) な複素 Finsler 計量という．

容易にわかるように，正則ベクトル束 E の通常の Hermite 計量

$$g(z,\zeta) = \sum_{i,j=1}^{r} g_{i\bar{j}}(z)\zeta^i\bar{\zeta}^j$$

に対し $F(z,\zeta) = \sqrt{g(z,\zeta)}$ とおくと，F は E の強擬凸な複素 Finsler 計量を定める．実は一般の複素 Finsler 計量 F に関しても，斉次性の条件 (3) から E° 上で $G(z,\zeta)$ は

$$G(z,\zeta) = \sum_{i,j=1}^{r} G_{i\bar{j}}(z,\zeta)\zeta^i\bar{\zeta}^j$$

とあらわされ，かつ任意の $\lambda \in \boldsymbol{C}^* = \boldsymbol{C} \setminus \{0\}$ に対して

$$G_{i\bar{j}}(z,\lambda\zeta) = G_{i\bar{j}}(z,\zeta), \qquad (z,\zeta) \in E^\circ$$

がなりたつことがわかる．したがって F が強擬凸なとき，$G(z,\zeta)$ は E に随伴する射影化束 $p : P(E) = E^\circ/\boldsymbol{C}^* \to M$ 上に E を引き戻したベクトル束 $\tilde{E} = p^{-1}E$ の Hermite 計量を定めることがわかる．

$L(E)$ を $P(E)$ 上の自然線束 (tautological line bundle) とする．$L(E)$ は $(z,[\zeta]) \in P(E)$ 上のファイバーとして，$[\zeta]$ に対応する E_z の 1 次元部分空間をとることによりえられる $\tilde{E}$ の部分束である．

$$\begin{array}{ccccc} L(E) & \subset & \tilde{E} & \xrightarrow{\tilde{p}} & E \\ & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{\pi}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ & & P(E) & \xrightarrow{p} & M \end{array}$$

$L(E)$ からその零切断面の像を取り去ったものを $L(E)^\circ$ であらわすとき，自然な束写像 $\tilde{p} : L(E) \to E$ のもとで，$L(E)^\circ$ と $E^6\circ$ は双正則となる．この対応のもとで，自然線束 $L(E)$ 上の Hermite 計量 h と正則ベクトル束 E 上の複素 Finsler 計量 F が 1 対 1 に対応する．実際，$(z,\zeta) \in E^\circ$ に対し

$$F^2(z,\zeta) = h(\tilde{p}^{-1}(z,\zeta),\, \tilde{p}^{-1}(z,\zeta)) \tag{6}$$

と定めればよい．

一般に正則ベクトル束 E に対し，自然線束 $L(E)$ の第 1 Chern 類 $c_1(L(E))$ が負のとき，いいかえると $L(E)$ の Hermite 計量 h で，(6) の右辺で定義される $L(E)^\circ$ 上の関数を $\hat{h}$ であらわすとき，$L(E)$ の曲率形式

$$\sqrt{-1}\Phi = \sqrt{-1}\bar{\partial}\partial \log \hat{h}$$

が $P(E)$ 上で負定値となるものが存在するとき，E は負 (negative) であるといい，$E < 0$ とかく．また $L(E)$ の第 1 Chern 類 $c_1(L(E))$ が正のとき，E は正 (positive) あるいは豊富 (ample) であるといい，$E > 0$ とかく．定義より，E が正であることと E の双対束 E^* が負であることは同値である．このとき，小林昭七氏により次が知られている．

定理 2 ([11, 12]) コンパクトな複素多様体 M 上の正則ベクトル束 E に対し，h を自然線束 $L(E)$ 上の Hermite 計量とし，(6) により h に対応する E 上の複素 Finsler 計量を F とする．このとき，$E < 0$ であること，すなわち $\sqrt{-1}\Phi$ が $P(E)$ 上で負定値であることと，F が強擬凸かつ負曲率をもつこととは同値である．

ここで強擬凸な複素 Finsler 計量 F が負曲率をもつとは，

$$R_{i\bar{j}\mu\bar{\nu}} = -\frac{\partial^2 G_{i\bar{j}}}{\partial z^\mu \partial \bar{z}^\nu} + \sum_{k,l} G^{\bar{k}l} \frac{\partial G_{i\bar{k}}}{\partial z^\mu} \frac{\partial G_{l\bar{j}}}{\partial \bar{z}^\nu}, \qquad \left(G^{\bar{k}l}\right) = \left(G_{i\bar{j}}\right)^{-1}$$

で定義される F の曲率テンソルに対して，Hermite 行列 $\left(\sum_{i,j} R_{i\bar{j}\mu\bar{\nu}}\zeta^i\bar{\zeta}^j\right)$ が任意の $(z,\zeta) \in E^\circ$ について負定値になることを意味する．また E が正である場合にも，$\tilde{E}$ の双対束 $\tilde{E}^*$ を考えることにより，正曲率をもつような複素 Finsler 計量の存在がわかる．

§4 Hartshorne 予想と Frankel 予想

第 1 回の “Surveys in Geometry” シンポジウムが開かれた前年の 1979 年に，次の予想が森重文氏 [14] と Siu-Yau [21] により相次いで解決された．

Hartshorne 予想 ([10], [14]) 正の正則接ベクトル束をもつ m 次元非特異既約射影代数多様体 M は m 次元複素射影空間 $P_m(\boldsymbol{C})$ と正則同型である．[2]

Frankel 予想 ([6], [21]) 双正則断面曲率がいたるところ正であるコンパクトな m 次元 Kähler 多様体 M は m 次元複素射影空間 $P_m(\boldsymbol{C})$ と正則同型である．

実はこれらの予想が証明される以前に，落合氏と小林氏の共同研究 [13] により，複素射影空間 $P_m(\boldsymbol{C})$ の特徴付けとして，コンパクトな m 次元複素多様体 M の第 1 Chern 類 $c_1(M)$ が，M 上のある正の正則直線束 L に対して $c_1(M) \geq (m+1)c_1(L)$ となるならば，M は $P_m(\boldsymbol{C})$ と正則同型となることが知られていた．とくに M の正則接ベクトル束が正の場合には，一般に $P_1(\boldsymbol{C})$ 上の正則ベクトル束は正則直線束の直和に分解することから ([7])，結局このような M が有理曲線 $P_1(\boldsymbol{C}) \subset M$ を含むことを示せばよいことになる．

森氏の証明も Siu と Yau の証明も，本質的な部分はこのような有理曲線の存在を示すことであり，Siu と Yau は当時発表されたばかりの Sacks-Uhlenbeck [18] による極小球面 (エネルギー最小な調和写像 $S^2 \to M$) の存在定理を利用して，このような有理曲線の存在を証明したわけである．その際，エネルギー最小な調和写像 $S^2 = P_1(\boldsymbol{C}) \to M$ の複素解析性を証明する部分 (次の定理 3) において，M が Kähler 計量を許容し，かつその双正則断面曲率が正であることが本質的にもちいられた．

定理 3 ([21]) M を双正則断面曲率が正のコンパクトな Kähler 多様体とする．このとき，任意のエネルギー最小な調和写像 $f : P_1(\boldsymbol{C}) \to M$ は正則写像 (あるいは反正則写像) となる．

一般にコンパクトな Hermite 多様体 M の双正則断面曲率がいたるところ正であれば，M の正則接ベクトル束が正であることが導かれるので，Frankel 予想は Hartshorne 予想の特別な場合と考えることができる．一方，森氏の証明は標数 $p > 0$ での代数幾何の手法をもちいるもので，極めて代数的色彩の強いものである．したがって，上記の (複素数体の場合の) Hartshorne 予想も Frankel 予想の証明の場合と同様に，複素解析幾何学の基本的概念の枠内で微分幾何的手法によって証明できることが望まれる．

前節でみたように，コンパクトな複素多様体上の正則ベクトル束 E は，E に随伴する射影化束 $P(E)$ の自然直線束 $L(E)$ 上の Hermite 計量から自然に誘導される複素 Finsler 計量をもつ．したがって，調和写像の理論を複素 Finsler 計量の範疇まで拡張し，落合氏と小林氏による複素射影空間の特徴付けに帰着する方向で Hartshorne 予想が証明できるかどうかは興味深い問題といえる．

[2] Hartshorne 予想は，複素数体 $\boldsymbol{C}$ のみでなく一般の標数の代数的閉体 k 上の射影空間に関する予想であり，標数 $p > 0$ での代数幾何の手法を駆使して，森氏により一般の形で肯定的に解決されている．

§5 Kähler Finsler 多様体と調和写像

M をコンパクトな m 次元複素多様体とし，$\pi : T^{1,0}M \to M$ を M の正則接ベクトル束とする．$z = (z^1, \ldots, z^m)$ を M の局所複素座標系とするとき，局所的に $T^{1,0}M$ の元は $v = \sum_\mu v^\mu (\partial/\partial z^\mu)$ とあらわされるから，$T^{1,0}M$ の局所複素座標系が $(z, v) = (z^1, \ldots, z^m, v^1, \ldots, v^m) = (z^\mu, v^\alpha)$ であたえられる．したがって，$F : T^{1,0}M \to \boldsymbol{R}$ を $T^{1,0}M$ の強擬凸な複素 Finsler 計量とし，$\tilde{M} = T^{1,0}M \setminus \{\mathbf{0}\}$ とおくとき，$\tilde{M}$ 上で $G = F^2$ は

$$G(z, v) = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} G_{\alpha\bar{\beta}}(z, v) v^\alpha \bar{v}^\beta, \qquad G_{\alpha\bar{\beta}} = \partial^2 G / \partial v^\alpha \partial \bar{v}^\beta$$

とあらわすことができる．

N を閉 Riemann 面とし，w を N の局所複素座標とする．$f : N \to M$ を N から M への C^∞ 級写像とし，$f(w) = (f^1(w), \ldots, f^m(w)) = (f^\mu(w))$ を f の局所表示とするとき，N の反正則接ベクトル束 $T^{0,1}N$ から M の正則接ベクトル束 $T^{1,0}M$ への微分写像 $\bar{\partial} f : T^{0,1}N \to T^{1,0}M$ が

$$\bar{\partial} f \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) = \sum_{\mu=1}^{m} \frac{\partial f^\mu}{\partial \bar{w}} \frac{\partial}{\partial z^\mu}$$

によって定義される．この $\bar{\partial} f$ に対し，f の $\bar{\partial}$-エネルギー ($\bar{\partial}$-energy) を

$$E_{\bar{\partial}}(f) = \int_N F^2 \left(f(w),\ \bar{\partial} f \left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}} \right) \right) \frac{\sqrt{-1}}{2} dw \wedge d\bar{w} \tag{7}$$

で定義しよう．(7) 式の右辺が N の局所座標 w の取り方によらないことは，複素 Finsler 計量の斉次性の条件 (3) から保証される．

一方，$\tilde{\pi} : T^{1,0}\tilde{M} \to \tilde{M}$ を $\tilde{M}$ の正則接ベクトル束とするとき，$T^{1,0}\tilde{M}$ の垂直ベクトル束 (vertical bundle) $\mathcal{V} = \operatorname{Ker} d\pi \subset T^{1,0}\tilde{M}$ の Hermite 計量を

$$W_1 = \sum_{\alpha=1}^{m} W_1^\alpha \left(\frac{\partial}{\partial v^\alpha} \right)_{(z,v)}, \quad W_2 = \sum_{\beta=1}^{m} W_2^\beta \left(\frac{\partial}{\partial v^\beta} \right)_{(z,v)}$$

に対して，

$$\langle W_1, W_2 \rangle_{(z,v)} = \sum_{\alpha,\beta=1}^{m} G_{\alpha\bar{\beta}}(z, v) W_1^\alpha \overline{W}_2^\beta, \qquad (z, v) \in \tilde{M}$$

で定義することができる．この Hermite 計量に関する $\mathcal{V}$ の Hermite 接続を D とすると，D から $T^{1,0}\tilde{M}$ の水平ベクトル束 (horizontal bundle) $\mathcal{H} \subset T^{1,0}\tilde{M}$ が定まり，$\mathcal{V}$ と $\mathcal{H}$ の間の自然な同型写像をもちいて，$T^{1,0}\tilde{M} = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}$ 上に Hermite 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ と Hermite 接続

$$D : \Gamma(T^{1,0}\tilde{M}) \to \Gamma(T^*_{\boldsymbol{C}}\tilde{M} \otimes T^{1,0}\tilde{M})$$

が誘導される ([1]) .

このようにして $T^{1,0}M$ の強擬凸な複素 Finsler 計量 F から $T^{1,0}\tilde{M}$ 上に誘導された Hermite 接続 D は Hermite 計量 $\langle\ ,\ \rangle$ を保つ，すなわち ∇ を D に対応する共変微分とするとき

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_{\overline{X}} Z\rangle, \qquad X,Y,Z \in \Gamma(T^{1,0}\tilde{M})$$

がなりたつが，一般に捩率 (torsion) をもつ . たとえば，$\nabla_X Y$ は X と Y について対称ではなく，$T^{1,0}\tilde{M}$ に値をとる $\tilde{M}$ 上の $(2,0)$ 次微分形式 θ が存在して

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] + \theta(X,Y), \qquad X,Y \in \Gamma(T^{1,0}\tilde{M})$$

がなりたつ . この捩率 θ に関して

$$\langle \theta(H,\chi),\ \chi\rangle = 0 \tag{8}$$

が，任意の $H \in \mathcal{H}$ と水平ベクトル束の標準的切断面 $\chi : \tilde{M} \to \mathcal{H}$ に対してなりたつとき，F を**弱 Kähler** (weakly Kähler) Finsler 計量という . 条件 (8) を $\tilde{M}$ の局所座標系をもちいてかきくだせば

$$\sum_{\alpha,\mu} G_\alpha [\Gamma^\alpha_{\nu;\mu} - \Gamma^\alpha_{\mu;\nu}] v^\mu = 0, \qquad (z,v) \in \tilde{M}$$

となる . ここに $G_\alpha = \partial G/\partial v^\alpha$ であり，

$$\Gamma^\alpha_{\nu;\mu} = \sum_{\tau,\gamma,\rho} G^{\bar{\tau}\alpha}\left(\frac{\partial G_{\beta\bar{\tau}}}{\partial z^\mu} - G^{\bar{\rho}\gamma}\frac{\partial G_{\nu\bar{\tau}}}{\partial v^\gamma}\frac{\partial^2 G}{\partial \bar{v}^\rho \partial z^\mu}\right), \qquad \left(G^{\bar{\gamma}\delta}\right) = \left(G_{\alpha\bar{\beta}}\right)^{-1}$$

は D の接続係数である . [3]

以下，$F : T^{1,0}M \to \boldsymbol{R}$ を弱 Kähler Finsler 計量とする . さて $f \in C^\infty(N,M)$ に対して，$\{f_s\}_{s\in I}$, $I = \{s \in \boldsymbol{C} \mid |s| < \epsilon\}$ を複素数をパラメーターとする $f = f_0$ の C^∞ 級変分とし，$\bar{\partial}$-エネルギー $E_{\bar{\partial}}(f_s)$ の第 1 変分を考えると，汎関数 $E_{\bar{\partial}}$ の Euler-Lagrange 方程式として

$$\frac{\partial^2 f^\sigma}{\partial w \partial \bar{w}} + \sum_{\mu,\nu=1}^m \Gamma^\sigma_{\nu;\mu}\frac{\partial f^\mu}{\partial w}\frac{\partial f^\nu}{\partial \bar{w}} = 0, \qquad 1 \le \sigma \le m \tag{9}$$

をえる . ただし

$$\frac{\partial^2 f^\sigma}{\partial w \partial \bar{w}}(w) + \sum_{\mu,\nu=1}^m \Gamma^\sigma_{\nu;\mu}\left(f(w),\ \bar{\partial} f\left(\frac{\partial}{\partial \bar{w}}\right)\right)\frac{\partial f^\mu}{\partial w}(w)\frac{\partial f^\nu}{\partial \bar{w}}(w) = 0$$

[3] $\theta \equiv 0$ のときが，通常の Kähler 計量の場合に対応する .

において，$\bar{\partial} f\left(\partial/\partial\bar{w}\right) = 0$ の場合は

$$\Gamma^{\sigma}_{\nu;\mu}\left(f(w),\ \bar{\partial} f\left(\partial/\partial\bar{w}\right)\right) = 0$$

と考える．

そこで，閉 Riemann 面 N から弱 Kähler 計量 F をもつコンパクトな複素多様体 M への C^{∞} 級写像 $f : N \to M$ が方程式 (9) をみたすとき，f を調和写像とよぶことにすると，定義より N から M への正則 (または反正則) 写像は調和写像であることがわかる．

さらに定理 3 に対応して，次がなりたつことが確かめられる．

定理 4 ([**17**]) M を弱 Kähler 計量 $F : T^{1,0}M \to \boldsymbol{R}$ をもつコンパクトな複素多様体とし，F の曲率は正であるとする．このとき，任意の $\bar{\partial}$-エネルギー最小な調和写像 $f : P_1(\boldsymbol{C}) \to M$ は正則写像 (あるいは反正則写像) となる．

定理 4 は，定理 3 の場合と同様に，$\bar{\partial}$-エネルギー $E_{\bar{\partial}}(f_s)$ の第 2 変分

$$\left.\frac{\partial^2}{\partial\bar{s}\partial s} E_{\bar{\partial}}(f_s)\right|_{s=0} (\geq 0)$$

の中にあらわれる F の曲率と捩率を調べることにより証明される．

参考文献

[1] M. Abate and G. Patrizio, Finsler Metrics – A Global Approach, Lecture Notes in Math. Vol. 1591, Springer-Verlag, 1994.

[2] J. Eells and L. Lemaire, A report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. **10** (1978), 1–68.

[3] J. Eells and L. Lemaire, Selected Topics in Harmonic Maps, C. B. M. S. Regional Conference Series No. 50, Amer Math Soc., 1983.

[4] J. Eells and L. Lemaire, Another report on harmonic maps, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), 385–524.

[5] J. Eells and J. H. Sampson, Harmonic mappings of Riemannian manifolds, Amer. J. Math. **86** (1964), 109–160.

[6] T. Frankel, Manifolds with positive curvature, Pacific J. Math. **11** (1961), 165–174.

[7] A. Grothendieck, Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann, Amer. J. Math. **79** (1957), 121–138.

[8] R. S. Hamilton, Harmonic Maps of Manifolds with Boundary, Lecture Notes in Math. Vol. 471, Springer-Verlag, 1975.

[9] P. Hartman, On homotopic harmonic maps, Canad J. Math. **19** (1967), 673–687.

[10] R. Hartshorne, Ample subvarieties of algebraic varieties, Lecture Notes in Math. Vol. 156, Springer-Verlag, 1970.

[11] S. Kobayashi, Negative vector bundles and complex Finsler structures, Nagoya Math. J. **57** (1975), 153–166.

[12] S. Kobayashi, Complex Finsler bundles, Contemp. Math. **196** (1996), 145–153.

[13] S. Kobayashi and T. Ochiai, Characterizations of complex projective spaces and hyperquadrics, J. Math. Kyoto Univ. **13** (1973), 31–47.

[14] S. Mori, Projective manifolds with ample tangent bundles, Ann. of Math. **110** (1979), 593–606.

[15] 西川青季・落合卓四郎, Harmonic Maps の存在と応用, Reports on Global Analysis II, 1980.

[16] 西川青季, 幾何学的変分問題, 岩波講座「現代数学の基礎」, 岩波書店, 1998.

[17] S. Nishikawa, Harmonic maps into complex Finsler manifolds, in preparation.

[18] J. Sacks and K. Uhlenbeck, The existence of minimal immersions of 2-spheres, Ann. of Math. **113** (1981), 1–24.

[19] Y.-T. Siu, The complex-analyticity of harmonic maps and the strong rigidity of compact Kähler manifolds, Ann. of Math. **112** (1980), 73–111.

[20] Y.-T. Siu, Strong rigidity of compact quotients of exceptional bounded symmetric domains, Duke Math J. **48** (1981), 857–871.

[21] Y.-T. Siu and S.-T. Yau, Compact Kähler manifolds of positive bisectional curvature, Invent. Math. **59** (1980), 189–204.

(2003 年 10 月 7 日提出)