数学と物理学の絡み合い

中島 啓

京都大学大学院理学研究科

大阪大学理学部 「理学への招待」

2006 年 7 月 7 日

数学と物理学の絡み合い

歴史

- ニュートン力学 $\longleftrightarrow$ 微分積分学 (17 世紀)
- アインシュタインの一般相対性理論
  $\longleftrightarrow$ リーマン幾何学 (20 世紀)

数学と物理学の絡み合い

歴史

- ニュートン力学 $\longleftrightarrow$ 微分積分学 (17 世紀)
- アインシュタインの一般相対性理論
  $\longleftrightarrow$ リーマン幾何学 (20 世紀)

現在

- 弦理論, 特に位相的場の理論
  $\longleftrightarrow$ モジュライ空間の幾何学

どちらも最先端の分野でつながっている.

なぜ, そのようなことがおきているのだろうか?

数学と物理学の絡み合い

歴史的な理由 (?)

- **物理は**, **数学を用いて記述される**.
- **一方**, **数学は物理に動機付けされて発展する**.

数学と物理学の絡み合い

歴史的な理由 (?)

- 物理は, 数学を用いて記述される.
- 一方, 数学は物理に動機付けされて発展する.

現在の理由 (?)

- 日常から離れているため (e.g. 弦, ブラックホール, ビックバン), 実験ではチェックできないので, 数学的な論理の整合性のみが理論の正しさを保証する
- 論理の整合性だけでは面白いことが見付けられない. 物理的な直観が, しばしば面白い数学的な理論を作る.

数学の厳密性

- 数学では, 正しいことはつねに正しい.
  (例えば, 昔の理論が否定されることがない.)

数学の厳密性

- 数学では, 正しいことはつねに正しい.
(例えば, 昔の理論が否定されることがない.)
- 数学は, 普遍的にどこでも正しい.

数学の厳密性

- 数学では, 正しいことはつねに正しい.
  (例えば, 昔の理論が否定されることがない.)
- 数学は, 普遍的にどこでも正しい.
- 数学は実験で見る必要がない. 実験できないことでも, 数学は記述する力を持っている.

数学の厳密性

- 数学では, 正しいことはつねに正しい.
  (例えば, 昔の理論が否定されることがない.)
- 数学は, 普遍的にどこでも正しい.
- 数学は実験で見る必要がない. 実験できないことでも, 数学は記述する力を持っている.
- 数学は, 直観とは関係ない. 日常とはかけ離れた世界でも, 記述可能である.

数学の厳密性

- 数学では, 正しいことはつねに正しい. (例えば, 昔の理論が否定されることがない.)
- 数学は, 普遍的にどこでも正しい.
- 数学は実験で見る必要がない. 実験できないことでも, 数学は記述する力を持っている.
- 数学は, 直観とは関係ない. 日常とはかけ離れた世界でも, 記述可能である.

したがって, 極小の世界 (e.g. 弦) でも, 宇宙でも, ブラックホールでも, 数学にさえなれば, どこでも正しい理論が作れる.

物理的な直観

- 論理だけでは，意味があることができない．面白いことが見付けられない．

物理的な直観

- 論理だけでは，意味があることができない．面白いことが見付けられない．
- 新しい理論・定理を見付けるのには，論理だけでは不十分．直観が必要．

物理的な直観

- 論理だけでは, 意味があることができない. 面白いことが見付けられない.
- 新しい理論・定理を見付けるのには, 論理だけでは不十分. 直観が必要.

物理的な直観が新しいことを見付けるのにしばしば役に立つ. (歴史的にもそうである.)

物理的な直観

- 論理だけでは, 意味があることができない. 面白いことが見付けられない.
- 新しい理論・定理を見付けるのには, 論理だけでは不十分. 直観が必要.

物理的な直観が新しいことを見付けるのにしばしば役に立つ. (歴史的にもそうである.)

特に現在では

- 数学的に厳密な裏付けのない場の量子論

に基づいて, 豊かな数学が生み出されてきた…

物理的な直観 その 2

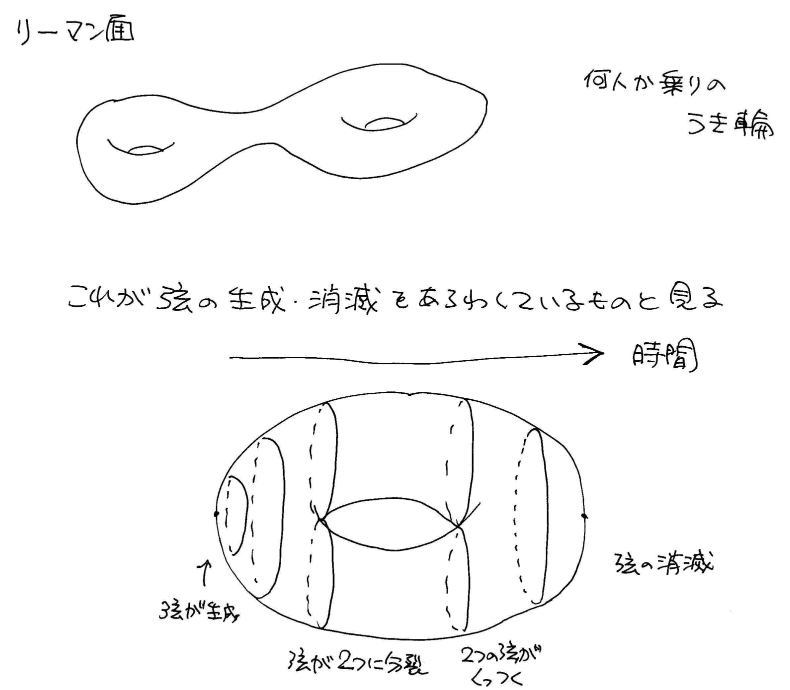
場の理論の特徴

- 無限個の自由度を持つ. (無限個の粒子を取り扱う.)
- 無限次元の幾何を, (数学的な裏付けのある) 有限次元の幾何のように取り扱う.
- 場の量子論の数学的に厳密な正当化はなされていない. (e.g. ファインマンの経路積分)
- にもかかわらず, 20 世紀後半から場の理論は大成功をおさめてきた.

数学への侵略 (さまざまな予想)

- 数学的な不変量を, 物理的な観測量として定義し, その性質を調べる.
- ミラー対称性
- 弦理論の研究からリーマン面の幾何学へ. (すべてのリーマン面を同時に考える.)
- さらに数論の世界へ (双対性からラングランズ予想を導く)

弦理論



粒子の生成・消滅をすべて調べる

⟶ すべてのリーマン面を調べる.

モジュライ空間

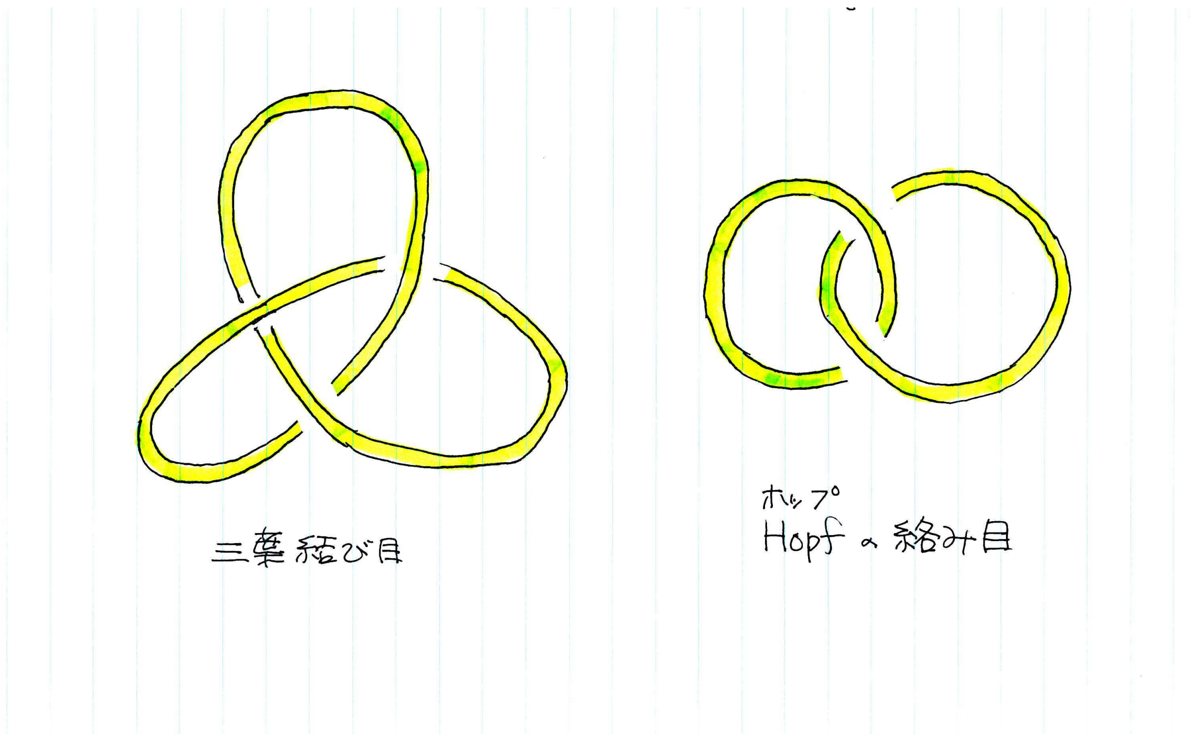
たくさんのものを集めて, その全体に幾何学的な構造を入れたものをモジュライ空間という.
弦理論では, すべてのリーマン面を同時に取り扱うことから, モジュライ空間の幾何学と自然に結び付く.

量子力学では, 粒子の全ての経路について考える必要がある. (ファインマンの経路積分)
すべての経路の全体のなす空間 (=path space) が重要になる.

場の量子論では, すべての場の全体のなすモジュライ空間が大切になる.

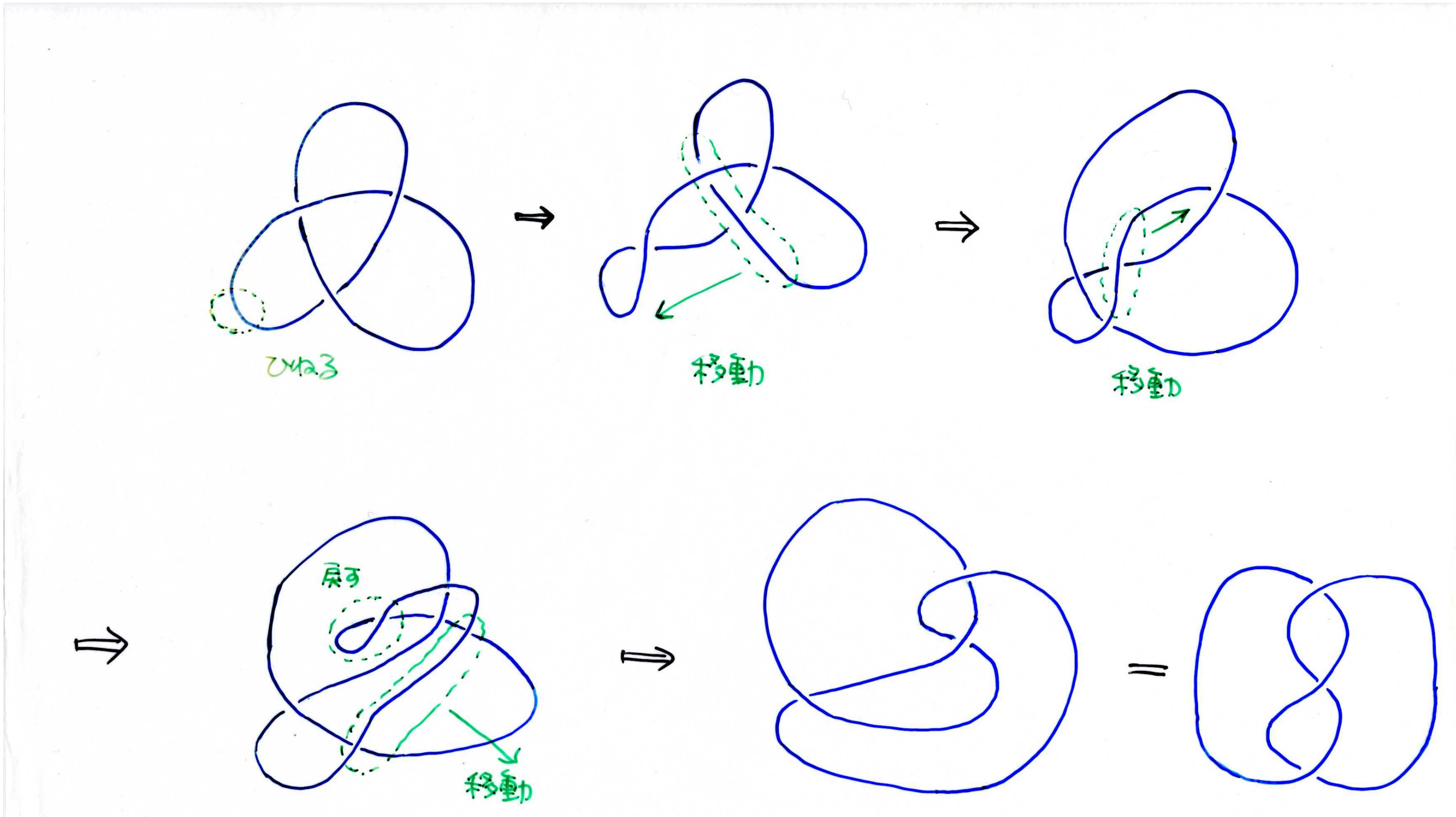
結び目・絡み目

物理学に動機付けされて，活発に研究されている対象の例として，結び目・絡み目をあげよう．



- 結び目 = 3 次元空間内の閉じたひも (一本)
- 絡み目 = 何本のひもでもよい
  - 3 次元空間の中で, 交叉することなく, ひもを連続的に動かしてうつりあえるときは同じとみなす.
  - 平面に射影して, 交点において上下を定めることによって表示する.

問題. 二つの結び目 (絡み目) が同じであるか, 否かを判定せよ. 特に, 結び目はいつほどけるか?



ひねる
移動
移動
戻す
移動

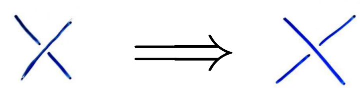
不変量 = 結び目, 絡み目に対して数や式を対応させるもの
(同じ結び目に対しては, 同じ数, 式が対応する)

不変量 = 結び目, 絡み目に対して数や式を対応させるもの
(同じ結び目に対しては, 同じ数, 式が対応する)

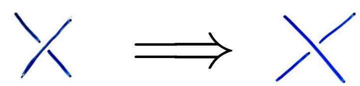
もしも不変量が異なれば, 二つの結び目は同じではない.

(ただし不変量が同じであっても, 結び目が同じとなるかどうかはわからない.)

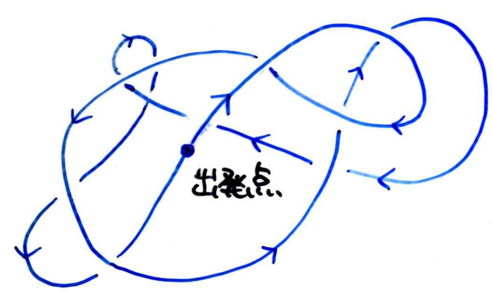
定理. 全ての結び目は, 適当な交点において上下を入れ換えることによって, やがては自明な結び目に変えることができる.



定理. 全ての結び目は, 適当な交点において上下を入れ換えることによって, やがては自明な結び目に変えることができる.



証明. ある点から出発して結び目を平面に書いていく. すでに書かれた部分と交わるときには, 必ず下を通るように書いていく. できた結び目は, ほどける結び目である.

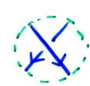
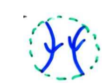


Jones 多項式

定理. **向きのついた絡み目** L **の不変量** V **で, 次の二つの性質を満たすものがただ一つ定まる.**

1. $V($  $) = 1$

2. **スケイン関係式**

$\frac{1}{t}V($  $) - tV($  $) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)V($  $)$

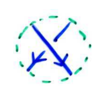
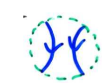
ただし, 緑の丸の外は同じ絡み目とする.

Jones 多項式

定理. 向きのついた絡み目 L の不変量 V で, 次の二つの性質を満たすものがただ一つ定まる.

1. $V($  $)=1$

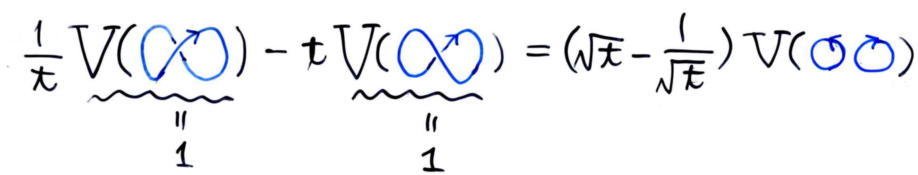
2. スケイン関係式

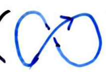
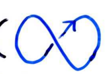
$\frac{1}{t}V($  $)-tV($  $)=\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)V($  $)$

ただし, 緑の丸の外は同じ絡み目とする.

証明は難しいが, 計算は容易である.

例.



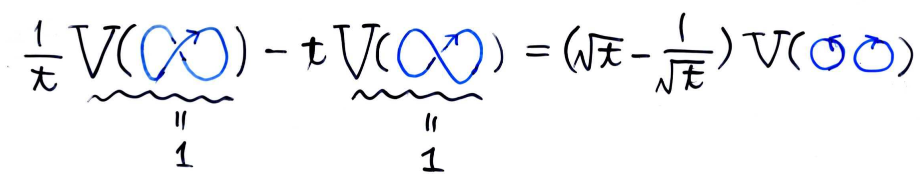
例. $\frac{1}{t}V($  $) - tV($  $) = \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)V($  $)$

$\qquad = 1 \qquad\qquad\qquad = 1$

よって

$V($  $) = \dfrac{\frac{1}{t} - t}{\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}} = -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$

例.



よって

$$V(\bigcirc\bigcirc) = \frac{\frac{1}{t} - t}{\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}} = -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

問. $V(\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{n\text{コ}}) = \left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1}$ **を証明せよ.**

例. $\frac{1}{t}\underbrace{V(\infty)}_{\overset{\shortparallel}{1}} - t\underbrace{V(\infty)}_{\overset{\shortparallel}{1}} = \left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)V(\bigcirc\ \bigcirc)$

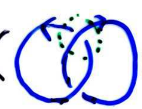
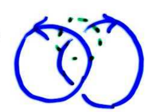
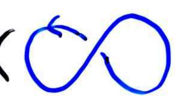
よって

$$V(\bigcirc\ \bigcirc) = \frac{\frac{1}{t} - t}{\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}} = -\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$$

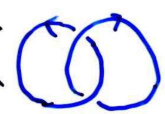
問. $V(\underbrace{\bigcirc\cdots\bigcirc}_{n\text{コ}}) = \left(-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right)^{n-1}$ を証明せよ.

どんなやり方をしても答えが同じになることの証明が数学的には難しかった. → 統計力学的な解釈により，明らかになった.

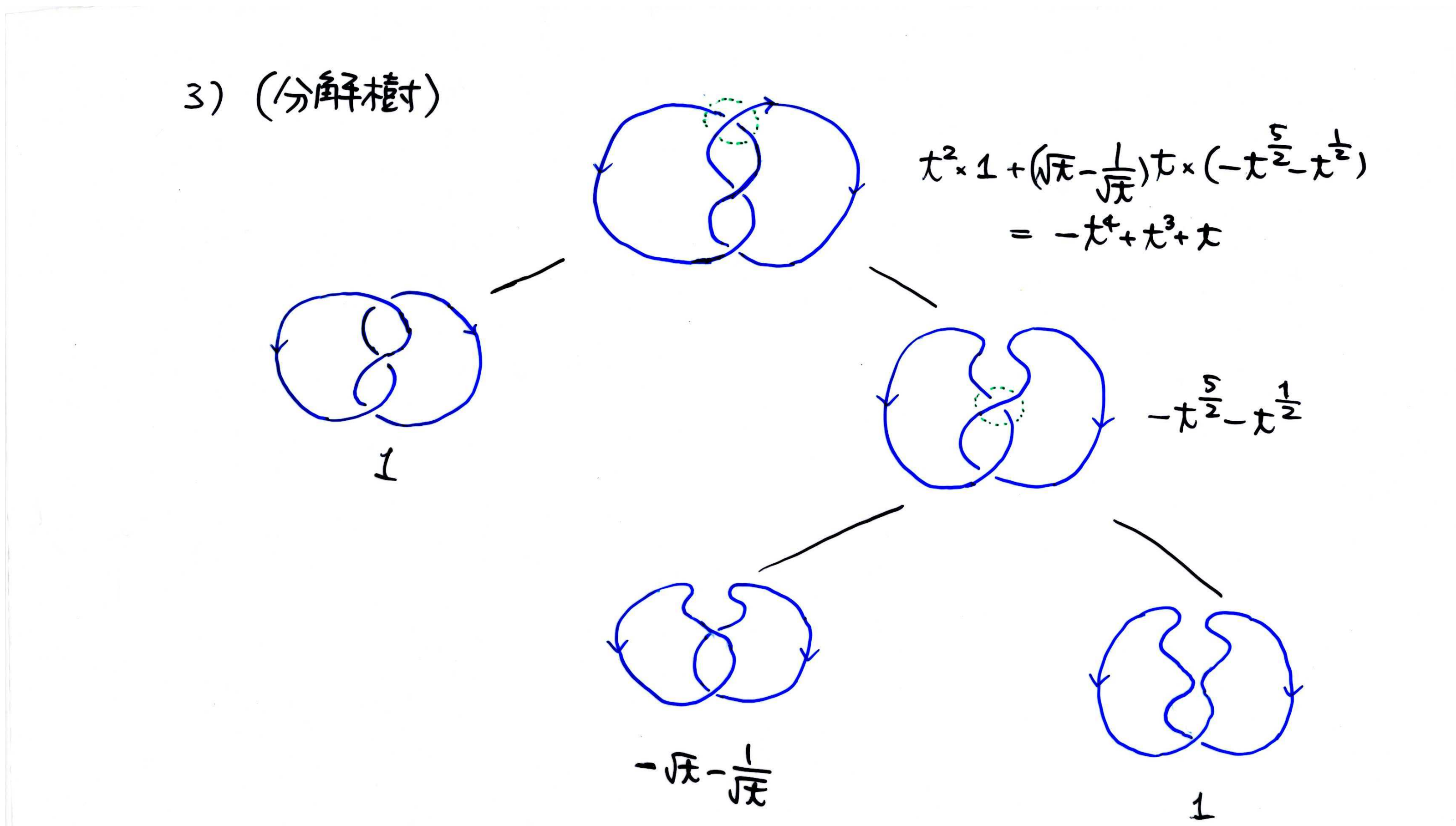
例 2.

$\frac{1}{t}V($  $) - t\,V($  $) = \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) V($  $)$

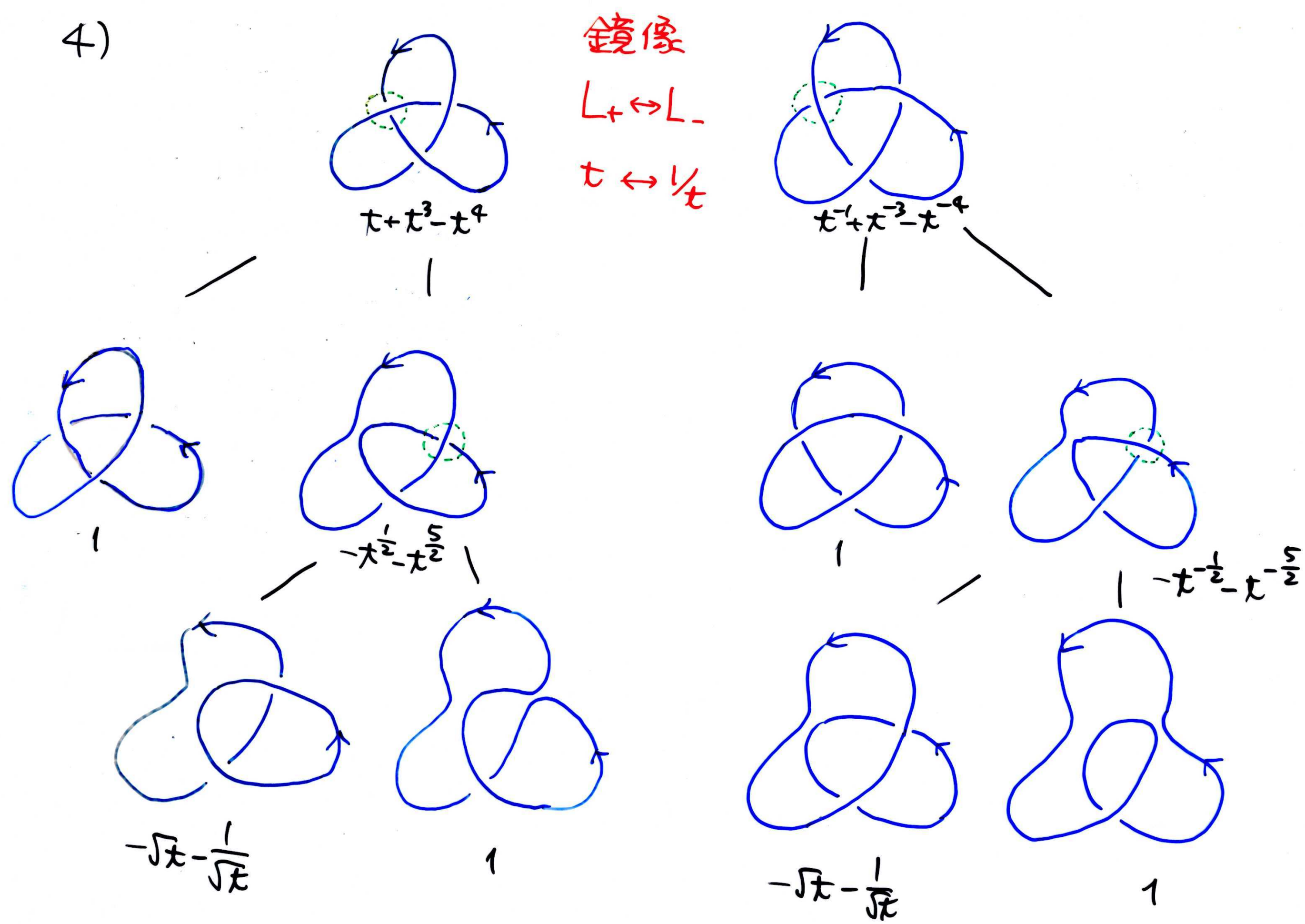
$-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$ $\quad 1$

$\therefore\ V($  $) = -t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$

例.

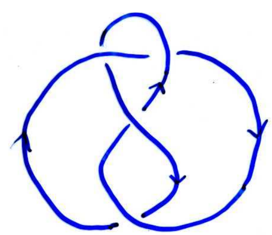

3) (分解樹)
$t^2 \times 1 + (\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}) t \times (-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}})$
$= -t^4 + t^3 + t$
1
$-t^{\frac{5}{2}} - t^{\frac{1}{2}}$
$-\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}$
1

例.

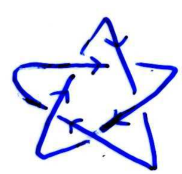


4)
鏡像
$L_+ \leftrightarrow L_-$
$t \leftrightarrow 1/t$
$t+t^3-t^4$
$t^{-1}+t^{-3}-t^{-4}$
1
$-t^{\frac{1}{2}}-t^{\frac{5}{2}}$
1
$-t^{-\frac{1}{2}}-t^{-\frac{5}{2}}$
$-\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$
1
$-\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}$
1

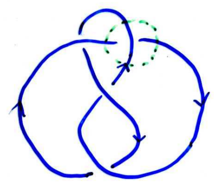
問.

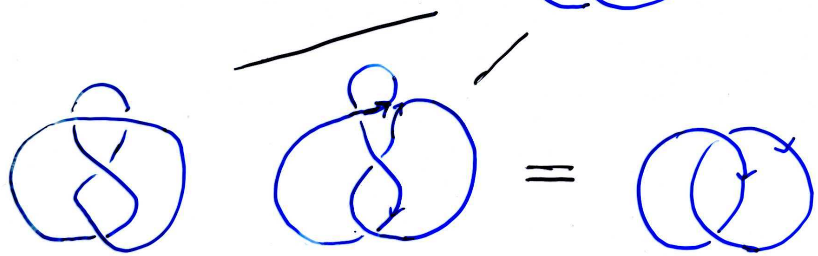


の Jones 多項式は？



の Jones 多項式は？

問. 八の字結び目  の Jones 多項式は？



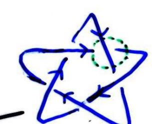
1 $\qquad$ $-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}}$

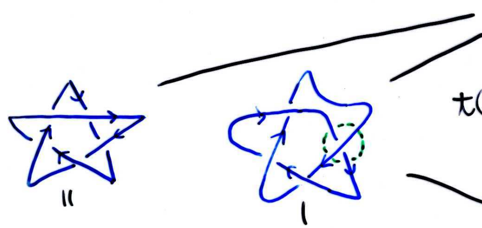
よって $-t^{-1}\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)$

$+t^{-2}$

$= \underline{t^2-t+1-\frac{1}{t}+\frac{1}{t^2}}$

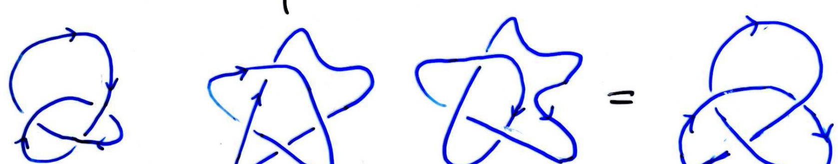
答.

問.  の Jones 多項式は？



$t\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)(t+t^3-t^4)+t^2\left(-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}}\right)$

$=-t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{7}{2}}+t^{\frac{9}{2}}-t^{\frac{11}{2}}$



$t+t^3-t^4$ $\qquad$ $-t^{\frac{5}{2}}-t^{\frac{1}{2}}$ $\qquad$ $t+t^3-t^4$

よって

$t^2(t+t^3-t^4)$

$+t\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\left(-t^{\frac{3}{2}}-t^{\frac{7}{2}}+t^{\frac{9}{2}}-t^{\frac{11}{2}}\right)$

$=\underline{t^2(1+t^2-t^3+t^4-t^5)}$

答

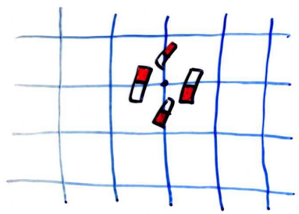
Jones はもともとは, 作用素環とよばれる結び目理論とは違うものの専門家であった.
Jones 以降, 結び目理論と他の分野との関連が次々と見付けられた.
統計力学, 表現論, …

Jones はもともとは, 作用素環とよばれる結び目理論とは違うものの専門家であった.
Jones 以降, 結び目理論と他の分野との関連が次々と見付けられた.
統計力学, 表現論, …

物理学者 Witten は, Chern-Simons 理論という, ゲージ理論の分配関数として Jones 多項式を定式化しなおし, 同時に 3 次元多様体の不変量へと拡張した.

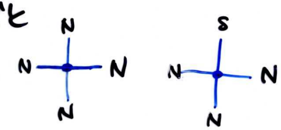
それ以降, 弦理論との関係, など次々と発展があり, 現在も活発に研究されている.

統計力学



各辺ごとに小さな磁石が並んでいて、
S極かN極が上を向いているとする。
それらの相互作用によって全体の磁性
が定まる。

各頂点ごと



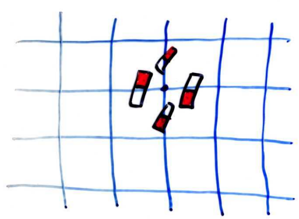
....

8通りの可能性があり、
それぞれについて数（ウェイトと呼ばれる）
が定められているとする。

このとき分配関数を次で定義する.

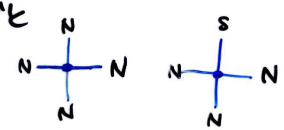
$$Z = \sum_{\text{全ての磁石の配置}} (\text{各頂点ごとのウェイトの積})$$

統計力学



各辺ごとに小さな磁石が並んでいて，
S極かN極が上を向いているとする．
それらの相互作用によって全体の磁性
が定まる．

各頂点ごと



....

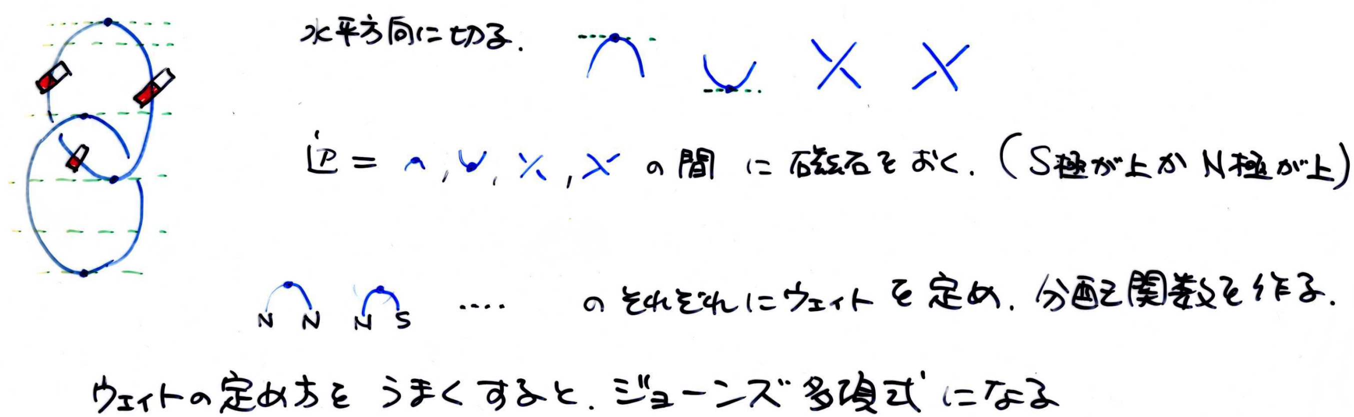
8通りの可能性があり，
それぞれについて数（ウェイトと呼ばれる）
が定められているとする．

このとき分配関数を次で定義する．

$$Z = \sum_{\text{全ての磁石の配置}} (\text{各頂点ごとのウェイトの積})$$

$2^{\text{辺の数}}$個 (たくさん) ある．

実は, Jones 多項式も分配関数としての定式化がある.



Witten による定式化も, これとよく似ている.

まとめ

自分の専門にこだわらず，いろいろなことに興味を持とう!

まとめ

自分の専門にこだわらず, いろいろなことに興味を持とう!

御静聴ありがとうございました.