曲面上の点のHilbert概型とHeisenberg代数

中島 啓
京都大学理学研究科

平成10 年 2 月 17 日

この論説では, 二つの一見関連のない対象の間に掛け橋を渡す. ひとつは, アファイン Lie 環の表現論で基礎的な役割を果たす無限次元 Heisenberg 代数であり, もう一方は, 代数幾何に現れる曲面の上の点の Hilbert 概型である.

すぐに説明するように, Heisenberg 代数はフォック空間と呼ばれる無限変数の多項式環に表現を持つが, 多項式の次数 (但し, 各変数には違う次数づけを与える) によりこの表現は直和分解 (ウェイト分解) する. 一方, Hilbert 概型の方は, 点の数によって無限個の連結成分に分解されている. Göttsche[7] は, Hilbert 概型の Betti 数を計算したが, 結果としては n 個の点の Hilbert 概型の Betti 数は, フォック空間の次数 n の部分空間の次元に等しかった. 言い換えれば, 点の数を動かすことによって Poincaré 多項式の母関数を考えると, Heisenberg 代数の表現の指標と一致するということである. この一致および物理学者 Vafa-Witten の S-双対性の予想 [20] に触発されて, 筆者は Hilbert 概型のホモロジー群に Heisenberg 代数の表現を幾何学的に構成することによって, Göttsche の公式を “理解” することに成功した. ([15]) このとき大切なことは, 表現は Hilbert 概型自身に作られるのではなく, あくまでそのホモロジー群の上であること, そしてこれはおそらくより重要であろうが, Hilbert 概型の連結成分を同時に全て考えることで初めて構成されることである. 例えば, Borel-Weil 理論のように空間自身に群が作用して表現が構成される, といった構成法とはまったく趣が異なるものである.

アファイン Lie 環は, 共形場理論で重要な役割を果たすので (cf. [18]) 通常は実二次元の対象と理解されている. 一方, Hilbert 概型は複素二次元=実四次元の対象である. 上の筆者の構成は, Heisenberg 代数の生成元を幾何学的に定義して定義関係式をチェックするというものだったので, 構成をしたあともなぜ二次元と四次元の間に繋がりがあるのか, という疑問には答えることができなかった. しかし, その後物理において対称性の考察が進む中で, これは弦対称性 (例えば, [19] を参照) の反映であると捉えられるようになってきた. 弦対称性がなぜ存在するのかはまだ明らかになっておらず, これを理解することは来世紀に向けて理論物理, 数学両者に課せられた大きな課題であるように筆者は思っている.

この論説は, 講義録 [16] を要約して日本語に訳したものである. この論説を読んで興味が湧かれた読者は, [16] にも目を通していただければ幸いである.

1　代数的準備: Heisenberg/Clifford 代数とその表現

まず Heisenberg 代数とその表現を説明する. まず表現の方から出発しよう. 可算無限個の変数 $p_1, p_2, \ldots$ を用意し, その有理係数多項式の全体 $R = \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ を考える. 自然数 i に対して $i\partial/\partial p_i$ を $P[i]$ とおき, R の元に p_i を掛ける作用素を $P[-i]$ と定義する. すると, 次の交換関係式

$$\left[\, P[i], P[j] \,\right] = i\delta_{i+j,0}\, \mathrm{id}_R$$

が成立する. そこで, $P[i]$ $(i \neq 0)$ と K で生成され, 関係式

$$\left[\, P[i], P[j] \,\right] = i\delta_{i+j,0} K \tag{1.1}$$

で定義される Lie 環を考え, **(無限次元の)Heisenberg 代数**と呼ぶ. R は, その表現になり, 物理ではボソンのフォック空間と呼ばれる. 定数多項式 $1 \in R$ は, 次の性質を満たす:

$$\begin{aligned} &P[i]1 = 0 \qquad (i > 0) \\ &R = \mathrm{Span}\{P[-j_1] \cdots P[-j_k]1 \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_{>0}\} \end{aligned}$$

すなわち, 有限次元 Lie 環の有限次元既約表現との類似で言えば, 1 は最高ウェイトベクトルである. また, 物理では, 1 は真空ベクトル, $P[i]$ $(i < 0)$ を生成演算子, $P[i]$ $(i > 0)$ を消滅演算子と呼ばれる. 真空は何も無い状態を表わし, 生成/消滅演算子によって粒子が生成/消滅するというわけである.

次数作用素 $D\colon R \to R$ を

$$D(p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots) = \left(\sum_i i m_i\right) p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots$$

で定義する. (対応する元を Heisenberg 代数に付け加えることもある.) R は, D によって固有空間分解されるが, 固有値 n の固有空間の基底として,

$$p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots \qquad \left(\sum_i i m_i = n\right).$$

を持つ. 上の基底の元と n の分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$[1] が一対一に対応するから, 固有空間の次元は, n の分割数に等しくなる. ($p_1^{m_1} p_2^{m_2} \cdots$ は, p_λ と書かれる.) よって次元の母関数 (表現論の言葉では, 指標) は,

$$\mathrm{tr}_R\, q^D \overset{\mathrm{def.}}{=} \sum_{n \in \mathbb{Z}} q^n \dim\{v \in R \mid Dv = nv\} = \prod_{d=1}^{\infty} \frac{1}{1 - q^d}$$

で与えられることが分かった.

---

[1] 分割の表わし方としては, 次の二つを用いる: $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$ と $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$. 前者では, 分割の成分は 1 が m_1 個, 2 が m_2 個であることを表わし, 後者では, $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots$ で, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ が成分である.

以上の Heisenberg 代数の定義には, $P[0]$ を含めなかったが, 定義式(1.1) を見れば, $P[0]$ を中心に含めておいても問題はない. 以下 $P[0]$ を含めるときは, R へは 0 で作用すると約束する.

次に, 非退化な対称双一次形式 $(\ ,\ )$ を持つ $\mathbb{Q}$ 上の有限次元ベクトル空間 V に対して, それに付随する Heisenberg 代数を定義する. $W = (V \otimes t\mathbb{Q}[t]) \oplus \left(V \otimes t^{-1}\mathbb{Q}[t^{-1}]\right)$ 上に歪対称双一次形式を

$$(v \otimes t^i, w \otimes t^j) = i\delta_{i+j,0}(v, w)$$

によって定義する. W のテンソル代数 $T(W)$ を $[v, w] - (v, w)1$ $(v, w \in W)$ で生成される両側イデアル I で割った商代数 $T(W)/I$ を考え, **(**V **に付随した)Heisenberg 代数**と呼ぶ. $V = \mathbb{Q}$ としたものが上で述べた Heisenberg 代数に他ならない. V の直交基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ を取れば, V に付随した Heisenberg 代数は上で述べた Heisenberg 代数の p 個のテンソル積に同型となる.

この構成を 'スーパー化' すれば, super-Heisenberg 代数とでも呼べる対象が次のように自然に定義される. 最初に与えられるデータは, 直和分解を持ったベクトル空間 $V = V_{\mathrm{even}} \oplus V_{\mathrm{odd}}$ であり, 非退化な双一次形式は $(v, w) = (-1)^{|v||w|}(w, v)$ を満たすものとする. ここで, v, w は, V_{even} か V_{odd} の元であり,

$$|v| = \begin{cases} 1 & \text{if } v \in V_{\mathrm{even}} \\ 0 & \text{if } v \in V_{\mathrm{odd}} \end{cases}$$

で定義される. この上で W とその上の内積, そして $T(W)/I$ は上と全く同様に定義すればよい. 但し, Lie 括弧 $[\ ,\ ]$ はスーパー Lie 括弧に置き換える. すなわち, $v, w \in V_{\mathrm{odd}}$のときには $[v \otimes t^i, w \otimes t^j] = (v \otimes t^i)(w \otimes t^j) + (w \otimes t^j)(v \otimes t^i)$ で定義する. また, 上の無限変数多項式の空間への表現の自然な拡張により, 正次数の部分 $V \otimes t\mathbb{Q}[t]$ のスーパーの意味の対称代数 $R = S^*(V \otimes t\mathbb{Q}[t])$ に super-Heisenberg 代数の表現が自然に定まる. 次数作用素 D も上と同様に定めると, 次の指標公式が導かれる:

$$\mathrm{tr}_R\, q^D = \prod_{d=1}^{\infty} \frac{(1 + q^d)^{\dim V_{\mathrm{odd}}}}{(1 - q^d)^{\dim V_{\mathrm{even}}}} \tag{1.2}$$

但し, ここで左辺は通常の意味の次元を考えたが, 奇数次の部分は$-$で勘定することにする (supertrace と呼ばれ, str で表わす) と,

$$\mathrm{str}_R\, q^D = \prod_{d=1}^{\infty} \left(\frac{1}{1 - q^d}\right)^{\dim V_{\mathrm{even}} - \dim V_{\mathrm{odd}}}$$

という形になる.

V として奇数次の部分が 1 次元で, 偶数次部分がないものを取ったときにできる super-Heisenberg 代数は, **(**無限次元の**)Clifford 代数**と呼ばれる. また物理では, そのときの上の表現空間はフェルミオンのフォック空間と呼ばれる.

偶数次の部分の表現は, 可算無限個の変数の多項式の全体であったが, 奇数次の部分は, 可算無限個の基底を持ったベクトル空間の外積代数 $R = \bigwedge^*(\mathbb{Q}dp_1 \oplus \mathbb{Q}dp_2 \oplus \cdots)$ の上に実現される. すなわち, 双一次形式に関する部分を無視して象徴的に言えば, $i > 0$ のとき, t^{-i} は dp_i を外積すること, t^i は $i\partial/\partial p_i$を内部積することと定義すればよいわけである. 上の指標公式で, odd な部分の寄与が

$1/(1-q^d) = 1 + q^d + q^{2d} + \cdots$ でなく $1+q^d$ となったのは, $dp_i \wedge dp_i = 0$ から来る帰結である. 物理では, ボソンは同じ場所にいくらでも入れるが, フェルミオンは二個以上は入れないと説明される.

Heisenberg 代数は, 量子力学において正準共役関係 (但し今の場合は, 無限個の成分 $(p_1, p_2, \ldots; q_1, q_2, \ldots)$ を持つ) を量子化して現れるが, 数学でもいろいろな局面において自然に現れる. あとで Hilbert 概型のホモロジー群に現れるのを見るが, その前に哲学的によく似た状況, 対称群の表現環に現れることを見よう. S_n を n 次対称群とし, $R(S_n)$ をその表現環とする. (以下, 表現環は, 有理数 $\mathbb{Q}$ をテンソルしたものを考える.) その直和 $\bigoplus_n R(S_n)$ に積を次により定義する.

$$\bullet\colon R(S_m) \otimes R(S_n) \to R(S_{m+n})$$

$$\rho \bullet \rho' \overset{\text{def.}}{=} \operatorname{Ind}_{S_m \times S_n}^{S_{m+n}} \rho \times \rho'$$

但し, Ind は $S_m \times S_n$ から S_{m+n} への誘導表現である. 同様に余積が

$$\Delta\colon R_p \to \bigoplus_{m+n=p} R(S_m) \otimes R_{(}S_n)$$

$$\Delta\rho \overset{\text{def.}}{=} \bigoplus \operatorname{Res}_{S_{m+n}}^{S_m \times S_n}(\rho)$$

で定義される. 但し, Res は制限表現である. また $R(S_n)$ 上に内積を

$$(\rho, \rho') = \dim \operatorname{Hom}_{S_n}(\rho, \rho')$$

で定め, $\bigoplus_n R(S_n)$ 上には, $R(S_n)$ 達が互いに直交するように定義する. $\bigoplus_n R(S_n) \otimes \bigoplus_n R(S_n)$ に自然に内積を入れておけば, Frobenius の相互律によって

$$(\rho \bullet \rho', \rho'') = (\rho \otimes \rho', \Delta\rho'')$$

が成り立つ. さらに, n の分割 $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \ldots)$ を S_n の共役類と同一視するとき, S_n の virtual な表現として, その指標がλ の上で $z_\lambda = \prod i^{m_i} m_i!$ であるものを取る. この z_λ は, λ に属する元の数が $n!/z_\lambda$ になるように定められている. 定義から $(p_\lambda, p_\mu) = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda$が成り立つ. 特に, $\lambda = (n)$ に対応する元を p_n で表わすことにすると, $\bigoplus_n R(S_n)$ は, $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ と同型となることが分かる. そこで, $i > 0$ に対して, p_i を掛ける作用素を $P[-i]$ と定義し, 上の内積に関する随伴作用素を, $P[i]$ と定義する. 上の内積の性質を用いて $P[i]p_\lambda$ を計算することによって, 同型$\bigoplus_n R(S_n) \cong \mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ を通じて, これらの作用が Heisenberg 代数の関係式を満たすことがチェックできる. まとめると, 次のように言える: $\bigoplus_n R(S_n)$ はボソンのフォック空間と同型である.

2　幾何からの準備: Hilbert 概型について知られていたこと

X を複素数体 $\mathbb{C}$ 上の準射影的な非特異代数曲面とし, $X^{[n]}$ をその上の長さが n の 0 次元部分概型の全体をパラメトライズする Hilbert 概型とする. Hilbert 概型という言葉を聞いたことがない読者も多いと思うので, 少し説明しよう. X の上の相異なる n 個の点 $x_1, \ldots, x_n$ (順番の違いは考えな

い) の全体のなす配意空間を考える. 点がぶつかるときまで含めて何らかの幾何学的対象を考えることによって, この配位空間を'完備化'することを考えよう. 一番安直な完備化は, 点がぶつかっても単に集合としての構造だけしか考えないことにしたもので, 結果は X の n 次の対称積 $S^nX = X^n/S_n$ となる. (S_n は, X^n に成分の入れ替えとして作用する.) 一方, Hilbert 概型は, 単に集合と考えるのでなくその上の関数の空間の構造まで考えて完備化したものである. 正確に言えば, 構造層 $\mathcal{O}_X$ のイデアル層 $\mathcal{J} \subset \mathcal{O}_X$ であって, その Hilbert 多項式が, 定数関数 n となるものの全体が $X^{[n]}$ である.

例えば, $n = 2$ のときを考えよう. x_1, x_2 が X 上の相異なる点であるとすると, $Z = \{x_1, x_2\}$ 上の正則関数のなす層は, X の構造層 $\mathcal{O}_X$ を, Z 上で消える正則関数, すなわち x_1 と x_2 で消える正則関数の層で割った層に他ならない. x_2 が x_1 に近づいていったとき, x_1 と x_2 で消える正則関数の全体は, どうなるだろうか ?容易に分かるように, 答えは, x_1 で消えて, さらに x_2 が x_1 に近づいた方向 $v \in T_xX$ で微分したものが消える正則関数の全体

$$\{f \in \mathcal{O}_X \mid f(x_1) = 0, df_{x_1}(v) = 0\} \tag{2.1}$$

になる. 従って, $X^{[2]}$ には, $\{x_1, x_2\}$ $(x_1 \neq x_2)$ という形のものと, $x \in X$ と接空間 T_xX の一次元部分空間 L の組みの二種類が現れてくる. 上の例では, v が張る部分空間が L である. この L まで考えたところが, 対称積と Hilbert 概型の違いである.

Hilbert 概型から対称積へ Hilbert-Chow 写像と呼ばれる正則写像 $\pi\colon X^{[n]} \to S^nX$ が次のようにして定義できる. $\mathcal{J} \in X^{[n]}$ のとき, 商層 $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ を考えると, これは高々有限個の点の上にのみ台を持つ層である. 台の点 x において $\mathcal{O}_X/\mathcal{J}$ の長さを $\mathrm{length}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x$ とおくと, Hilbert-Chow 写像は,

$$\pi(\mathcal{J}) = \sum_{x \in \mathrm{Supp}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})} \mathrm{length}(\mathcal{O}_X/\mathcal{J})_x[x]$$

で与えられる. 右辺では, 対称積の点を和の記号 $\sum m_i[x_i]$ で表わしている. この記法は今後も使われる.

例えば, 上で述べた $n = 2$ のときは, $Z = \{x_1, x_2\}$ のときは $\pi(Z) = [x_1] + [x_2]$ であり, Z が(2.1) のときには, $\pi(Z) = 2[x_1]$ である.

ちなみに, ここまでの構成は X の次元が何次元であっても関係なくできる. 特に, X が Riemann 面, すなわち $\dim X = 1$ のときには S^nX と $X^{[n]}$ は, Hilbert-Chow 写像によって同型であることが容易に分かる.

次元をもう一次元上げると次が成り立つことが知られている.

事実 2.2 (Fogarty [5]) X が準射影的な非特異代数曲面のとき, Hilbert-Chow 写像 $\pi\colon X^{[n]} \to S^nX$ は, 対称積 S^nX の特異点解消である. 特に, $X^{[n]}$ は, 次元が $2n$ の非特異な代数多様体である.

また, X の次元が 3 以上のときは一般には, Hilbert 概型は非特異とは限らず, 既約ですらない. この意味で, Hilbert 概型は次元が 2 のときが非常に特殊である.

対称積 S^nX は，点の重複度によって分割することが出来る．このとき n の分割$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ に対して，

$$S^n_\lambda X = \left\{ \sum_i \lambda_i [x_i] \,\middle|\, x_i \text{ 達は，互いに相異なる } X \text{ の点} \right\}$$

と定義すると，

$$S^nX = \bigcup_{\lambda \text{ は } n \text{ の分割}} S^n_\lambda X$$

となる．このとき，次の事実も知られている．

事実 2.3 (Briançon) (1) Hilbert-Chow 写像 $\pi \colon X^{[n]} \to S^nX$ は，上の stratification に関して，semi-small である．すなわち，各 stratum $S^n_\lambda X$ 上で π は，fiber bundle であり，$C \in S^n_\lambda X$ のとき

$$2 \dim \pi^{-1}(C) \le \operatorname{codim} S^n_\lambda X$$

が成り立つ．より強く，上の $\le$ は $=$ が成り立つ．
(2) 各 $C \in S^n_\lambda X$ に対して，$\pi^{-1}(C)$ は既約である．

特に，相異なる n 点達のなす stratum $S^n_{(1^n)}X$ は open stratum であり，その上では π は同型である．$S^n_{(1^n)}X$ は S^nX の非特異点の集合であるから，この主張は π が特異点解消であることに含まれている．逆に一番小さい stratum は，$n[x] \in S^n_{(n)}X$ と一点に集中しているものであり，それは X 自身に同型で複素 2 次元である．余次元は $2(n-1)$ であるから，上の主張により，その fiber $\pi^{-1}(C)$ は $n-1$ 次元ということになる．そして上の (2) より既約である．より一般の stratum の上の fiber は，この $S^n_{(n)}X$ の上の fiber の積 (但し，n は異なる) の形に書けるので，$S^n_{(n)}X$ の場合に証明しておけば一般の場合も上の事実が成り立つことが従う．

Weyl 群の Springer 表現に詳しい方は，Springer 特異点解消

$$P \colon \text{旗多様体の余接束} \to \text{巾零多様体}$$

が semi-small であり，その性質を用いて Borho-MacPherson[2] が P の fiber のホモロジー群と巾零軌道の交叉ホモロジー群の間の関係を書いたことはよくご存じのことだと思う．Borho-MacPherson の議論を用いることによって Göttsche-Soergel[8] は，Hilbert-Chow 写像が semi-small であることと，fiber が既約であること，そして $S^n_\lambda X$ の閉包の交叉ホモロジー群が通常のホモロジー群と同型であること，そして対称積のホモロジー群の Poincaré 多項式の Macdonald による公式を組み合わせることによって，次の Poincaré 多項式に関する公式を導いた．(最初に Göttsche[7] が Weil 予想を用いて証明した.)

事実 2.4 ([7, 8]) $X^{[n]}$ の Poincaré 多項式 $P_t(X^{[n]})$ の母関数は次の式で与えられる．

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n P_t(X^{[n]}) = \prod_{m=1}^{\infty} \frac{(1+t^{2m-1}q^m)^{b_1(X)}(1+t^{2m+1}q^m)^{b_3(X)}}{(1-t^{2m-2}q^m)^{b_0(X)}(1-t^{2m}q^m)^{b_2(X)}(1-t^{2m+2}q^m)^{b_4(X)}}.$$

但し，$b_i(X)$ は X の第 i 次 Betti 数である．

この定理の‘初等的’な証明は知られていない．‘初等的’という意味は，正標数の幾何や斎藤盛彦の Hodge 加群の理論を用いないという意味に考えてもいいが，ここでは，代数的とは限らない一般の複素曲面 X に対しても適用できる証明，と言ってもいいだろう．ちなみに，第 3 節の議論を用いれば，左辺が右辺よりも大きいか等しいことは後者の意味で‘初等的’に証明できる．

Springer 特異点解消と Hilbert-Chow 写像の類似について述べたが，旗多様体の余接束は，余接束としてシンプレクティック形式[2] を持つ．その類似として Hilbert 概型上にシンプレクティック形式が存在することが知られている．

事実 2.5 (Fujiki [6] ($n = 2$)**, Beauville [1]** (n 一般)**)** X がシンプレクティック形式を持つとき，$X^{[n]}$ もシンプレクティック形式を持つ．

証明は，次のようにすればよい：対称積 S^nX の非特異な部分 $S^n_{(1^n)}X$ は，X のシンプレクティック形式から誘導される自然なシンプレクティック形式を持つが，これを Hilbert-Chow 写像 π で引き戻したものを考える．もしも，これが$\pi^{-1}(S^n_{(1^{n-2}2)})$ を足した集合まで伸びることが証明できれば，その補集合の余次元が 2 以上なので，$X^{[n]}$ 全体に伸びることが分かる．さらに，$\pi^{-1}(S^n_{(1^{n-2}2)})$ の様子は，最初に $X^{[2]}$ を説明したことから想像がつくように，具体的に分かる．従って，ここまで伸びていることを具体的にチェックすればよい．

この事実はあとで必要になるというものではないのだが，$X^{[n]}$ は大切な空間であるという心の支えを与える．また，シンプレクティック多様体の中のラグランジアン部分多様体は大切であるが，第 4 節においてラグランジアン部分多様体の例が与えられる．また Riemann 幾何の観点からは，ホロノミー群の分類に現れる hyper-Kähler 多様体の例を次のように与えるという意味で大切である：X は射影的で（より一般にコンパクト Kähler で十分である）シンプレクティク形式を持つとすると（複素曲面の分類論により X は複素トーラスか $K3$ 曲面である），$X^{[n]}$ は hyper-Kähler 構造を持つ．ここで，多様体 M 上の **hyper-Kähler** 構造とは，Riemann 計量 g と三つの概複素構造 I, J, K の組みで次を満たすもののことである．

$$\begin{aligned} g(Iv, Iw) = g(Jv, Jw) = g(Kv, Kw) = g(v, w) \\ I^2 = J^2 = K^2 = IJK = -\mathrm{Id} \\ \nabla I = \nabla J = \nabla K = 0 \end{aligned}$$

但し，∇ は，g の Levi-Civita 接続である．真ん中の式は，M の接空間が四元数体上のベクトル空間の構造を持つことを主張していることに注意すると，M 上に hyper-Kähler 構造を与えることと，M の frame bundle と Levi-Civita 接続の組みを$\mathrm{Sp}(n/4)$-bundle とその上の接続への reduction を与えることは同値である．（ここで，n は M の次元である．）このように定義は容易であるが，非自明な例，特にコンパクトな例を作ることは長らく未解決であった．最初の例は K3 曲面の上の Ricci-flat Kähler 計量であり，Yau による Calabi 予想の解決 [21] により存在が保証された．Hilbert 概型上に

---

[2] ここで言うシンプレクティック形式は，実多様体上のそれではなく，複素多様体上のものである．すなわち，正則 2 形式で閉であり，非退化しているもののことである．区別するときには，正則シンプレクティック形式と呼ばれることもあるが，ここでは単にシンプレクティック形式と呼ぶことにする．

Calabi 予想の解決によって存在する Ricci-flat Kähler 計量を与えると，次のように高次元の非自明な hyper-Kähler 多様体の例を与える．

まず Bochoner-Weitzenböck 公式によりシンプレクティック形式 ω が Ricci-flat Kähler 計量 g の Levi-Civita 接続に関して平行であることを言う．そこでシンプレクティック形式を

$$\omega(v, w) = g(Jv, w) + ig(Kv, w)$$

と分解することによって，J, K を定めると，これが四元数の関係式を満たすことが容易にチェックできる．さらに，シンプレティック形式が平行であることから，J, K が平行であることが従う．先に述べたように，シンプレクティック形式は (少なくとも余次元 2 の部分多様体の外では) 具体的に構成されるのであるが，Yau の Ricci-flat Kähler 計量は，不動点定理で存在が保証されるもので，具体的に書き下されるものではない．特に，X の元々の Ricci-flat Kähler 計量を用いて書き表すようなことは未解決問題である．

この節の最後に，$X = \mathbb{C}^2$ 上の点の Hilbert 概型の行列による記述を説明しよう．上に述べた性質の多くは，$X = \mathbb{C}^2$ の場合は，この記述を用いることによって具体的にチェックできるので，興味ある読者への演習問題としておこう．また先を急ぐ読者は，ここを飛ばしても問題はない．

$\mathbb{C}^2$ は，アファイン多様体なので部分概型は，座標環すなわち二変数多項式環 $\mathbb{C}[z_1, z_2]$ のイデアルと同一視される．特に，$(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ の点は，イデアル $I \subset \mathbb{C}[z_1, z_2]$ で $\mathbb{C}[z_1, z_2]/I$ の $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間としての次元が n であるものの全体に一致する．そこで，n 次元ベクトル空間 $\mathbb{C}[z_1, z_2]/I$ を V と置き，z_1, z_2 を掛けることが V に誘導する線形写像を B_1, B_2 と定義する．さらに $i\colon \mathbb{C} \to V$ を $i(1) = 1 \bmod I$ によって定義する．このとき次が成り立つ．

命題 2.6 $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ と，次の性質を満たす (B_1, B_2, i) の三つ組みの全体を $\mathrm{GL}(V)$ の自然な作用で割った商空間は同型である．

1. $[B_1, B_2] = 0$
2. B_1, B_2 で不変な V の部分空間 S で $i(1)$ を含むようなものは，V 自身だけである．すなわち，$i(1)$ は cyclic vector である．

上のようにして定義された (B_1, B_2, i) が命題の性質を満たすことは，明らかである．逆に命題の性質を満たす (B_1, B_2, i) が与えられたとき，

$$I = \{f(z_1, z_2) \in \mathbb{C}[z_1, z_2] \mid f(B_1, B_2)i(1) = 0\}$$

によってイデアル I を定めれば，$(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ の点が定まり，これで一対一対応が定義される．さらに上の商空間が滑らかであることをチェックし，上の対応の微分を調べることによって，これが同型であることが分かる．

この記述を用いて Hilbert 概型の性質を少し調べて見よう．相異なる n 個の点

$$\{(z_1^1, z_2^1), \ldots, (z_1^n, z_2^n)\}$$

に対応するのは，B_1，B_2 が同時対角化可能なもので

$$B_1 = \begin{pmatrix} z_1^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z_1^n \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} z_2^1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & z_2^n \end{pmatrix}, \qquad i = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

である．一般に，B_1，B_2 が互いに交換可能であるとすると，もしそれらが対角化可能であれば，同時に対角化できる．これが，上の状況に対応している．一般には，同時に Jordan 標準型に直すことは出来ないが，$n = 2$ の場合にはどんなものが出てくるかは容易に分かって，上のタイプのもの以外は，

$$B_1 = \begin{pmatrix} z_1 & \alpha \\ 0 & z_1 \end{pmatrix}, \qquad B_2 = \begin{pmatrix} z_2 & \beta \\ 0 & z_2 \end{pmatrix}, \qquad i = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

と書ける．このとき，$[\alpha : \beta]$ が，(z_1, z_2) における接空間の一次元部分空間を定めているので，最初に説明した $(\mathbb{C}^2)^{[2]}$ の記述が再確認される．また，同時三角化は必ず出来て，そのときの固有値を並べることで，Hilbert-Chow 写像が与えられる．

このように Hilbert 概型の複雑さは，交換可能な行列の複雑さと同じもので，あまり恐がらなくても大丈夫だ，と言える．

また，上のような行列による表示は，箙多様体 [14] と非常に似ている．実際，上の記述は，一つの頂点と，頂点とそれ自身を結ぶ辺からなる図 1 に対応する箙多様体と言うことができる．もともとの箙多様体の定義では，Kac-Moody Lie 環に対応するものだけを考えるために，このような図式は除外されていたのだが，幾何学的な性質は，通常の箙多様体と同様に調べることができるのであり，筆者が Hilbert 概型に興味を持った理由の一つはここにあるのである．

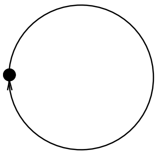

図 1: Hilbert 概型に対応する図式

具体的な記述が役立つことの例として，$(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ の Poincaré 多項式を計算してみよう．この場合は，Göttsche より以前に Ellingsrud-Strømme [3] が計算した．ポイントは，二次元トーラス T^2 の $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$への作用を考えることである．この作用は，T^2 の $\mathbb{C}^2$ への作用が誘導するものである．その固定点は，$\mathbb{C}[z_1, z_2]$ のイデアルとして単項式で生成されるものである．これを Young 図式を使って表わす．(図 2) よって固定点は n の分割でパラメトライズされる．さらに，Young 図式 D に対応する固定点における $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ の接空間のトーラス加群としての指標は

$$\sum_{s \in D} (T_1^{l(s)+1} T_2^{-a(s)} + T_1^{-l(s)} T_2^{a(s)+1})$$

で与えられる. ここで, T_i $(i=1,2)$ は, $(t_1,t_2)\mapsto t_i$ で与えられる指標であり, $l(s)$, $a(s)$ は leg-length, arm-length と呼ばれている Young 図式上の関数で, 箱 s に対して, 図の♠と♡の箱の個数である.

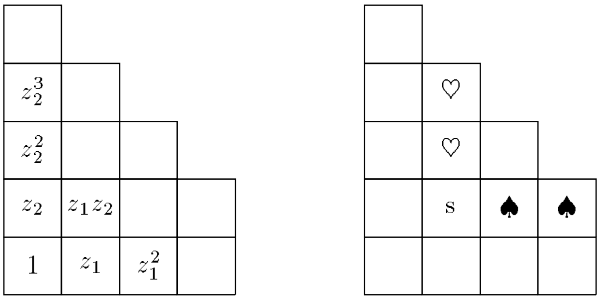

図 2: Young 図式

一般にコンパクトな Kähler 多様体 M にトーラス T が等長かつ正則的に作用しているとき, 対応する運動量写像 $\mu\colon M\to\mathrm{Lie}(T)^*$ を考え, generic な Lie 環の元$\zeta\in\mathrm{Lie}(T)$ と coupling して, $f=\langle\mu,\zeta\rangle$ は, Bott の意味での Morse 関数になり, 完全であることが知られている. そのとき Morse 指数は, 臨界点における接空間へのトーラスの作用の指標から決定される. (例えば, [11] を見よ.) 今の場合にこのアイデアを用いて Morse 関数を考えると, $(\mathbb{C}^2)^{[n]}$ はコンパクトではないのだが固有であることが分かるので, コンパクトのときと同じ議論を適用出来る. よりいいことに, この場合は臨界点は有限個の点であるから状況はより簡単になる. 結局, 公式 (2.4) の $X=\mathbb{C}^2$ の場合の証明が与えられる.

3 Hilbert 概型のホモロジー群と Heisenberg 代数

Göttsche の Poincaré 多項式の母関数の公式 (2.4) を見直して $t=1$ とおいてみると, 最初に述べた Heisenberg 代数の表現の指標公式(1.2) を $V=H_{\mathrm{even}}(X)\oplus H_{\mathrm{odd}}(X)$ に適用したものに一致していることに気付く. (以下では, (コ) ホモロジー群は, 有理数係数と約束する.) これは, アファイン・Lie 環の表現論を専門としている人ならばすぐに気付いたと思うのであるが, 私は物理学者 Vafa-Witten の論文 [20] で初めてこれを知った. どこで知るかはともかくこの事実に気付けば, 自然に「Heiseberg 代数を幾何学的に構成することができるか」という問題に行き着く. 私は, これを知る直前に箙多様体のホモロジー群に Kac-Moody Lie 環の表現を構成していたので, 同じことをやってみれば Hilbert 概型のホモロジー群に, Heisenberg 代数の表現が作れるはずだと, すぐに目星が立った. これを証明したのが [15] であるが, 以下では, 同時期に独立に同様の結果を得た Grojnowski [9] による定式化に従って説明する.

Göttsche の公式と対称群の表現環とボソンのフォック空間の対応, そして指標公式等を見比べて

みると, $H_*(X^{[n]})$ と $R(S_n)$ が対応していることが分かる.[3] 従って, $\bigoplus_n R(S_n)$ 定義した積の類似を Hilbert 概型に構成すれば言い訳である. これは, 次のようにすればよい. 以下, 簡単のため X はコンパクトとする. $X^{[m]} \times X^{[n]}$ の中の開部分集合

$$\left(X^{[m]} \times X^{[n]}\right)^{\circ} \overset{\text{def.}}{=} \{(Z_1, Z_2) \in X^{[m]} \times X^{[n]} \mid \operatorname{Supp}(Z_1) \cap \operatorname{Supp}(Z_2) = \emptyset\}$$

を考える. その中の点 (Z_1, Z_2) に対して $Z_1 \cup Z_2$ (対応するイデアルでは $\mathcal{J}_{Z_1} \cap \mathcal{J}_{Z_2}$) は, $X^{[m+n]}$ の点を定める. そこで,

$$\left\{(Z_1, Z_2, Z_1 \cup Z_2) \,\middle|\, (Z_1, Z_2) \in \left(X^{[m]} \times X^{[n]}\right)^{\circ}\right\}$$

の $X^{[m]} \times X^{[n]} \times X^{[m+n]}$ 内での閉包を考え, それを $\Lambda_{m,n}$ で表わそう. このとき, 表現環の積の類似として積を

$$\begin{aligned} \bullet \colon H_*(X^{[m]}) \otimes H_*(X^{[n]}) &\to H_*(X^{[m+n]}) \\ c \bullet c' &\overset{\text{def.}}{=} p_{3*}\left(p_1^* c \cup p_2^* c' \cap [\Lambda_{m,n}]\right) \end{aligned}$$

により定義する. 但し, p_i は, $X^{[m]} \times X^{[n]} \times X^{[m+n]}$ の第 i 成分への射影である. また余積 Δ の $X^{[m]} \times X^{[n]}$成分 $\Delta_{m,n}$ も

$$\begin{aligned} \Delta \colon H_*(X^{[m+n]}) &\to H_*(X^{[m]}) \otimes H_*(X^{[n]}) \\ \Delta c &\overset{\text{def.}}{=} (p_1 \times p_2)_*(p_3^* c \cap [\Lambda_{m,n}]) \end{aligned}$$

によって定義できる.

$R(S_i)$ における p_i の類似として次の $X^{[i]}$の部分多様体 (一般には特異点を持つ) を考える:

$$\mathfrak{P}_i = \bigcup_{x \in X} \pi^{-1}(i[x]) = \pi^{-1}(S^i_{(i)} X)$$

但し, π は, Hilbert-Chow 写像である. すなわち, 第 2 節で出てきた台が一点に集中したイデアルの全体のなす部分多様体である. 定義から, 射影 $\Pi \colon \mathfrak{P}_i \to X$ がある. X のホモロジー群を $H_*(X)$ とし,

$$\mathfrak{P}_i(\alpha) = \Pi^*(\operatorname{PD} \alpha) \cap [\mathfrak{P}_i]$$

とおく. ここでPD は Poincaré 双対写像 $H_*(X) \to H^{4-*}(X)$ である. α の偶奇に従って $\mathfrak{P}_i(\alpha)$ にも次数を導入しておく.

そこで, $i > 0$ のとき, $\mathfrak{P}_i(\alpha)$ を掛ける写像を $P_\alpha[-i]$ で表わし, 内積に関する (super の意味の) 随伴作用素を $P_\alpha[i]$ で表わすことにする. このとき, $\mathfrak{P}_i$ の次元の公式 (2.3) を使ってホモロジーの次数の差を調べてみると,

$$P_\alpha[i] \colon H_{2n+k}(X^{[n]}) \to H_{2(n-i)+k+\deg\alpha-2}(X^{[n+i]})$$

---

[3] Hilbert 概型でなく, 対称群の X^nへの作用に関する同変 K 群 $K_{S_n}(X^n)$ を使うと類似がよりはっきりする. ([9] の p.283 の脚注参照)

となることが分かる. つまり中間次元からのずれ k が $k+\deg\alpha-2$ と代わる. 特に $\deg\alpha=2$ ならば中間次元からのずれは保たれる. また, n に関して直和を取り,

$$\bigoplus_n H_*(X^{[n]})$$

の線形変換が定義されるが, これも記号 $P_\alpha[i]$ で表わしてしまうことにする. このとき, 我々の主結果は次の関係式が成り立つことである.

定理 3.1 (Nakajima [15], Grojnowski [9])

$$P_\alpha[i]P_\beta[j]-(-1)^{\deg\alpha\deg\beta}P_\beta[j]P_\alpha[i]=(-1)^{i-1}i\delta_{i+j,0}\langle\alpha,\beta\rangle\,\mathrm{id}$$

ここで, $\langle\alpha,\beta\rangle$ は α と β の交叉数である.

最初にこの定理の証明を与えたときには, $(-1)^{i-1}i$ の部分は, i だけ (特に X や α,β には無関係) で決まる定数であることだけしか分からなかったが, 後に Ellingsrud-Strømme [4] が求めた.

この定理の証明は, その部分を除けば初等的で単に交叉を計算すれば出る. $(-1)^{i-1}i$ を決めるところについては, 次の章で別証明を与える.

上の結果により, $(-1)^{i-1}$ を無視すれば, $\bigoplus_n H_*(X^{[n]})$ が $V=H_*(X)$ に Heisenberg 代数の表現空間であることが分かった. Göttsche の公式 (2.4) と合わせあれば, それがフォック空間であることも分かった.[4]

4 対称多項式と Hilbert 概型

この節では, 対称群の表現環 $R(S_n)$ と Hilbert 概型のホモロジー $H_*(X^{[n]})$ との類似をさらに進める.

まず, 対称式の理論を簡単に復習する. (もっと詳しいことが知りたい読者は, [13] を参照するとよい.) N 個の変数 $x_1,\ldots,x_N$ の有理係数対称多項式の全体を Λ_N とし, 次数によって $\Lambda_N=\bigoplus_n\Lambda_N^n$ と分解する. $M\le N$ のとき, 最後の $M-N$ 個の変数 $x_{M+1},\ldots,x_N$ を 0 とおくことによって, 射影 $\Lambda_N^n\to\Lambda_M^n$ が定義されるが, 逆極限 $\operatorname{proj\,lim}_{N\to\infty}\Lambda_N^n$ を Λ^n とおき, その直和 $\Lambda=\bigoplus_n\Lambda^n$ を考える. 以下では, Λ の元を単に対称多項式と呼ぶことにする.

$x_1^n+x_2^n+\cdots$ が定める Λ^n の元を p_n と書くことにする. よく知られているように, Λ は, p_n 達の多項式の環 $\mathbb{Q}[p_1,p_2,\ldots]$ と同型になる. 分割 $\lambda=(1^{m_1}2^{m_2}\cdots)$ に対して, $p_\lambda=p_1^{m_1}p_2^{m_2}\cdots$ とおくと, p_λ は Λ の基底となる. 一方で, n の分割 λ を単調非増加の自然数列 $(\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots)$ で表わし, 単項式 $x^{\alpha_1}x_2^{\alpha_2}\ldots$ でその係数 α_i を大きい順に並び変えたものが, λ_i であるようなものの和が定める Λ^n の元を m_λ で表わすことにする. (正確には, Λ_N^n の元を考え, それが Λ^n の元を定義していることをチェックする.) 分割を全て動かすと, m_λ もやはり Λ の基底となる.

---

[4] 今の所, Göttsche の公式を用いないで, 表現の既約性を証明できていない.

さて, 対応する Hilbert 概型の幾何を説明しよう. 曲面 X の中に曲線 C が入っているとし, C の定めるホモロジー類 $[C]$ に対応する作用素 $P_{[C]}[i]$ を考える. 前の節の結果より, $P_{[C]}[i]$ $(i < 0)$ 達を真空 $1 \in H_0(X^{[0]})$ に何回も作用させてできるベクトル達で張られる部分空間

$$\mathrm{Span}\{P_{[C]}[-j_1] \cdots P_{[C]}[-j_k]1 \mid k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, j_1, \ldots, j_k \in \mathbb{Z}_{>0}\}$$

は, 対応

$$P_{[C]}[-j_1] \cdots P_{[C]}[-j_k]1 \longleftrightarrow p_{j_1} \cdots p_{j_k}$$

によって, 可算無限個の変数の多項式環 $\mathbb{Q}[p_1, p_2, \ldots]$ 従って対称多項式の環 Λ と同型である. このとき, m_λ を表わすようなサイクルを以下のように定義することができる.

$$L^\lambda C \overset{\text{def.}}{=} \overline{\pi^{-1}(S^n_\lambda C)}$$

但し, $S^n_\lambda C$ は, $S^n C \subset S^n X$ を通じて, $S^n X$ の局所閉集合と考えており, π は Hilbert-Chow 写像である.

定理 4.1 (cf. Grojnowski [9]) (1) $L^\lambda C$ は, $X^{[n]}$ 内の n 次元の既約な部分多様体である. (一般には特異点を持つ.) その基本類 $[L^\lambda C] \in H_{2n}(X^{[n]})$ は, 上の対称多項式との同型を通じて, m_λ に対応する.

(2) X がシンプレクティック形式を持つとき, $L^\lambda C$ は, $X^{[n]}$ のラグランジアン部分多様体である.

例えば, 分割 λ が, (n) のとき, $L^{(n)}C$ は, 部分スキーム Z で, その台が C の一点であるものの全体である. また, λ が (1^n) のときは, C の対称積 $S^n C$ を C の Hilbert 概型 $C^{[n]}$ と思って $X^{[n]}$ の中に入れたものに他ならない.

m_λ は, p_i 達の多項式で書き表すことができるが, 特に, $m_{(1^n)}$ はきれいな表示式を持っている. これを, 上の定理を用いて, Hilbert 概型のサイクルの言葉に直すと, 次を得る.

系 4.2 C の対称積 $S^n C$ の表わすホモロジー類 $[S^n C]$ の母関数は, $P_{[C]}[i]$ を用いて次の式で与えられる.

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n [S^n C] = \exp\left(\sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^i P_{[C]}[-i]}{(-1)^{i-1} i}\right) \cdot 1$$

但し, 1 は真空ベクトルである.

この議論の応用として, 前の章で述べた $(-1)^{i-1}i$ が次のように決定される. $X = \mathbb{C}\mathrm{P}^2$ とし, $C = \mathrm{line}$ として, $P_{[C]}[i][S^n C]$ を考える. C を少し動かしてもう一つ別の line C' を取ってみるとすぐ分かるように, これは $[S^{n-i}C]$ で与えられる. この式と上の母関数を見比べて, 計算すれば定数が $(-1)^{i-1}i$ であることが容易に分かる.

さて, 上の式の右辺は弦理論/共形場理論で頂点作用素と呼ばれるものの一番原始的な形である. 頂点作用素は, これらの理論で重要な役割を果たすことが知られている. 例えば, Heisenberg 代数の

フォック空間からアファイン Lie 環の表現 (ベーシック表現と呼ばれる表現) を構成できるが (Frenkel-Kac 構成法), そのときアファイン Lie 環の生成元が頂点作用素で定義される. このような話題の発展として, 代数的な方面では頂点代数や, 一般化された Kac-Moody 代数など, 面白い話があるのだが, これらを Hilbert 概型の幾何として理解することは今後の課題と言えよう. 難しいところは, 上の右辺のような式に幾何学的な意味をつけることにある. 今のところ, 交叉を計算してみる以外に手だてがないのだが, 上の左辺のように意味があるものにどうしたらなるのかを判定するいい条件を見つけることができていない. 頂点代数や後で出てくる Virosoro 代数については, 最近出版された Kac の教科書 [10] にまとめられている. これらを横目で見ながら対応する幾何学的対象を探すことは重要な問題である.

また, 共形場理論では, 上で導入された変数 z は射影直線の点の座標と見なされる. しかし, Hilbert 概型の立場からは, 射影直線の役割は明らかでない. これも上と同様, 今後の課題である. このようなことを考えていると, 数列から母関数を作ったように, 空間の列を全部丸ごとうまく取り扱う技術を我々があまり持っていないことが困難の一番の原因であるように思えてくる. そこで, まず親しみを持とうと言うことで, このような考え方を母空間と名前を付けてみた. 今の状況だけでなく様々な場所で母空間の考え方の必要性が現れているような気がしてならない. (cf. [17])

また, アファイン Lie 環の表現論や共形場理論で重要な役割をするものとして, Virasoro 代数がある. これは, $L[i]$ $(i \in \mathbb{Z})$, K で生成され, 関係式

$$\big[L[i], L[j]\big] = (i-j)L[i+j] + \frac{i^3 - i}{12}\delta_{i+j,0}K$$

で定義される Lie 環である. S^1 上のベクトル場のなす Lie 環の複素化の中心拡大と捉えるのが通常である. ($L[i]$ は, ベクトル場 $z^{i+1}d/dz$ に対応する.) Heisenberg 代数から次のようにして Virasoro 代数が構成されることは, よく知られている:

$$L[i] = \frac{1}{2}\sum_{j\in\mathbb{Z}} {:}P[j]P[i-j]{:}$$

但し, ここで $:\ :$ は normal ordering で,

$${:}P[j]P[i]{:} = \begin{cases} P[i]P[j] & i \le j \text{ のとき} \\ P[j]P[i] & i > j \text{ のとき} \end{cases}$$

と定義される. 上の定義はみかけ上は無限和であるが, フォック空間の元に作用するときには, 有限個を除いて 0 になる.

Virasoro 代数の Hilbert 概型の幾何での実現は, Lehn[12] によって与えられた. 以下, これを説明する. まず上の構成は一個の Heisenberg 代数に対してであったが, Hilbert 概型の場合は各ホモロジー類 α に対して次のようにして $L_\alpha[i]$ を定義する. 対角線埋め込みによる push-forward $\delta\colon H_*(X) \to H_*(X\times X) \cong H_*(X)\otimes H_*(X)$ により $\delta\alpha = \sum_a \alpha'_a \otimes \alpha''_a$ となっているとし,

$$L_\alpha[i] = \frac{1}{2}\sum_a \sum_{j\in\mathbb{Z}} {:}P_{\alpha'_a}[j]P_{\alpha''_a}[i-j]{:}$$

とおく．これを幾何学的に実現することが目標となる．

$X^{[n]}$ の部分多様体

$$\partial X^{[n]} \overset{\text{def.}}{=} X^{[n]} \setminus \pi^{-1}(S^n_{(1^n)}X) = \overline{\pi^{-1}(S^n_{(1^{n-1}2)}X)}$$

を考える．容易にチェックできるように，これは $X^{[n]}$ の既約な因子である．そこで，その基本類の Poincaré 双対 $[\partial X^{[n]}] \in H^2(X^{[n]}, \mathbb{Q})$ を考え，$H_*(X^{[n]})$ 上の作用素

$$\mathfrak{d}\colon H_*(X^{[n]}) \to H_*(X^{[n]}); \qquad \mathfrak{d}(x) \overset{\text{def.}}{=} -\frac{1}{2}[\partial X^{[n]}] \cup x$$

を考える．このとき次が成立する．

定理 4.3 (Lehn [12])

$$\left[\,\mathfrak{d}, P_\alpha[i]\,\right] = iL_\alpha[i] + \frac{i(|i|-1)}{2} P_{K\alpha}[i]$$

ここで，K は X の標準束 $\in H^2(X, \mathbb{Q})$ である．

すなわち，Virasoro 代数の生成元は，標準束の情報を含むエラー項を除けば，$\mathfrak{d}$ と，Heisenberg 代数の生成元の交換子によって与えられる．

参考文献

[1] A. Beauville, Variété kählriennes dont la première classe de Chern est nulle, J. of Differential Geom. **18** (1983), 755–782.

[2] W. Borho and R. MacPherson, Partial resolutions of nilpotent varieties, Astérisque **101–102** (1983), 23–74.

[3] G. Ellingsrud and S.A. Strømme, On the homology of the Hilbert scheme of points in the plane, Invent. Math. **87** (1987), 343–352.

[4] ______, An intersection number for the punctual Hilbert scheme of a surface, preprint, alg-geom/9603015.

[5] J. Fogarty, Algebraic families on an algebraic surface, Amer. J. Math. **90** (1968), 511–521.

[6] A. Fujiki, On primitive symplectic compact Kähler V-manifolds of dimension four, in “Classification of Algebraic and Analytic Manifolds”, K.Ueno (ed.), Progress in Mathematics, Birkhäuser **39** (1983), 71–125.

[7] L. Göttsche, The Betti numbers of the Hilbert scheme of points on a smooth projective surface, Math. Ann. **286** (1990), 193–207.

[8] L. Göttsche and W. Soergel, Perverse sheaves and the cohomology of Hilbert schemes of smooth algebraic surfaces, Math. Ann. **296** (1993), 235–245.

[9] I. Grojnowski, Instantons and affine algebras I: the Hilbert scheme and vertex operators, Math. Res. Letters **3** (1996), 275–291.

[10] V. Kac, Vertex algebras for beginners, University Lecture Series **10**, AMS, 1997.

[11] F. Kirwan, Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry, Mathematical Notes, Princeton Univ. Press, 1985.

[12] M. Lehn, Chern classes of tautological sheaves on Hilbert schemes of points on surfaces, preprint, 1997.

[13] I.G. Macdonald, Symmetric functions and Hall polynomials, Second edition Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, 1995.

[14] H. Nakajima, Instantons on ALE spaces, quiver varieties, and Kac-Moody algebras, Duke Math. **76** (1994), 365–416.

[15] ______, Heisenberg algebra and Hilbert schemes of points on projective surfaces, Ann. of Math. **145** (1997), 379–388.

[16] ______, Lectures on Hilbert schemes of points on surfaces, (to appear).

[17] ______, 弦理論の示唆する 22 世紀の幾何学 母空間, 保型空間, 数学セミナー 1997 年 8 月号, 日本評論社.

[18] 土屋昭博, 共形場理論の構成, 数学 **44** (1992), 97–124.

[19] C. Vafa, Lectures on Strings and Dualities, preprint, hep-th/9702201.

[20] C. Vafa and E. Witten, A strong coupling test of S-duality, Nucl. Phys. **431** (1994), 3–77.

[21] S.T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Käher manifold and the complex Monge-Ampère equation. I, Comm. Pure Appl. Math. **31** (1978), 339–411.