

小 沢 登 高 (OZAWA Narutaka)

A. 研究概要

私は作用素環論における作用素空間の理論を研究した。特に作用素空間の局所理論と局所反射性の関わりについて多くの興味深い結果を得た。作用素空間とは Hilbert 空間上の有界線形写像のなす線形部分空間であり、抽象的には Banach 空間にある公理を満たす行列ノルムと呼ばれる構造が入った空間である。局所理論とは無限次元空間の構造をその有限次元部分空間全体の構造を通じて研究する方法で、Banach 空間において有効であった。一方、局所反射性は二重双対空間 X^{**} の任意の有限次元部分空間が適当な意味で X の有限部分空間で近似されるという性質である。Banach 空間はすべて (Banach 空間として) 局所反射的であるが、作用素空間では対応する命題は成り立たず、むしろ大抵の作用素空間は局所反射的でない。局所反射性は (その名前にもかかわらず) 作用素空間の大域的性質であり、局所理論とは直接関係あるようには見えない。しかし、Effros-Junge-Ruan, Kirchberg, Pisier らの結果によって意外な関係があることが最近わかってきた。私はこれらの研究を推し進め、さらに重要な関係を明らかにした。

Banach 空間 X は可換 C^* -環に埋め込むことによって作用素空間の構造を入れることができる。このような作用素空間を極小空間という。極小空間の局所反射性は Banach 空間のそれから従うが、極小空間の商空間、すなわち Q 空間の局所反射性が常に成り立つかは知られていなかった。私は反例を構成することによりこれを否定的に解決した。一方、Banach 空間 X に作用素空間の構造を入れる標準的方法はもう一つあり、そのようにして作られた作用素空間を極大空間という。極大空間が常に局所反射的であるかどうかは未解決であり、私はこの問題が他のいくつかの未解決問題と同値であることを発見した。そのうちの一つの条件は自然な形でより強い条件に置き換えたものを考えることができ、その強い条件が成り立つかが Pisier らによって問題とされてきたが、私はこの強い予想に対する反例を構成した。すなわち、余完全でない部分極大空間を構成したのである。また、私は非可換 L^1 空間の d 次元部分空間全体の集合が CB 距離についてコンパクトであることを示した。これは、Junge-Le Merdy の最近の深い結果を使用して得られたものであるが、この方面で最も強い結果であり、Effros-Junge-Ruan による基本定理である非可換 L^1 空間の局所反射性の、成立する「理由」を明らかにするものである。またこの結果は、Kirchberg による大予想である QWEP 予想にアタックする

新しい道を示していると考えられる.

また, Effros-Ruan との共著論文において 1-完全な作用素空間は局所反射的であることを示した. これは Kirchberg の C^* -環に関する結果を一般化した興味深い結果である. さらにこの論文中で, 局所反射性が「可分的」に決定できることも示した.

また, Ng との共著論文において非可換 L^1 空間の間の完全等距離的な埋め込みについて研究した. さらにその後, 単独でこの結果の誤差 ε を許したタイプの結果も得た. これは作用素空間における Dor の定理である. 証明はテクニカルだ.

During last two years, I have been working in Operator Space Theory. In particular, I investigated the relationship between local theory and local reflexivity and obtained several interesting results.

The notion of “operator space” is intermediate between “Banach space” and “ C^* -algebra”. An operator space (os in short) is a closed subspace of a C^* -algebra with the natural matrix normed structure. The “local theory” is to study an infinite dimensional os through the collection of its finite dimensional subspaces. On the other hand (contrary to its name), local reflexivity is a global structure of an os. Every Banach space is locally reflexive as a Banach space, but not every os is locally reflexive. Indeed, operator spaces are rarely locally reflexive. Although there is no apparent relationship between these ideas, there were two surprising discoveries. One thing is the local reflexivity of exact C^* -algebras due to Kirchberg and the other is the local reflexivity of noncommutative L^1 -spaces due to Effros, Junge and Ruan.

A Banach space X can be embedded into a commutative C^* -algebra and can be regarded as an os. We call this os a minimal os. The local reflexivity of minimal operator spaces follows from that of Banach spaces. A quotient os of a minimal os is called Q -space. I found that the existence of non locally reflexive Q -space is equivalent to the celebrated result of Szankowski that $B(H)$, the C^* -algebra of all bounded linear operators on the separable infinite dimensional Hilbert space H , fails the bounded approximation property.

On the other hand, there is another canonical way to equip a Banach space X with an os structure, called a maximal os. It is an open problem if every maximal os is locally reflexive. I found this problem is equivalent

to several other open problems. One of these can be naturally modified to a strong conjecture and whether this strong conjecture holds was asked by Pisier. I solved this strong conjecture negatively constructing a counterexample, i.e., a non coexact submaximal os.

Employing a deep theorem of Junge and Le Merdy, I proved that the set of all d -dimensional subspaces of noncommutative L^1 -spaces is compact in the cb-distance topology. This result is much stronger than the local reflexivity of noncommutative L^1 -spaces of Effros, Junge and Ruan and explains the “reason” of this phenomenon. Also, this compactness gives us a hint that the famous QWEP conjecture of Kirchberg might be true.

Collaborating with Effros and Ruan, I proved that every 1-exact os is locally reflexive. This generalizes the result of Kirchberg for C^* -algebras. I also proved that local reflexivity is determined separably.

Beside local reflexivity, collaborating with Ng, I obtained a structure theorem for completely isometric embeddings between noncommutative L^1 -spaces. Moreover, overcoming technical difficulties, I obtained an asymptotic version of this result which can be regarded as an os version of Dor’s theorem.

B. 発表論文

1. *On the lifting property for the universal C^* -algebras of operator spaces*, J. Op. Theory, to appear.
2. *A non-extendable bounded linear map between C^* -algebras*, Proc. Edinburgh Math. Soc., to appear.
3. *On injectivity and nuclearity for operator spaces*, (in collaboration with Effros and Ruan), Duke Math. J., to appear.

C. 口頭発表

1. On the lifting property for the universal C^* -algebras of operator spaces, Tokyo University, December 1998 and Operator Space Workshop at University of Illinois, Urbana-Champaign, March 1999
2. A non-extendable bounded linear map between C^* -algebras, Texas A&M University, April 1999, University of Houston, May 1999 and Tokyo University, June 1999
3. On injectivity and nuclearity for operator spaces (in collaboration

with Effros and Ruan), Workshop in Linear Analysis and Probability at Texas A&M University, August 1999

4. A short proof of the Oikhberg-Rosenthal theorem, SUMIRFAS at Texas A&M University, August 1999
5. On the set of finite dimensional subspaces of preduals of von Neumann algebras, SUR LES ESPACES L_p NON-COMMUTATIFS at Institut Henri Poincaré, novembre 1999
6. Local theory and local reflexivity, CONFERENCE ON OPERATOR SPACES at Institut Henri Poincaré, January 2000 and Tokyo University, January 2000