

Banach–Tarski のパラドックスと測度論的群論

小沢 登高

有名な Banach–Tarski のパラドックスによれば、球をいくつかのパーツに分割し、それらをうまく組み合わせることで、元の球と同じ大きさの球を 2 つ作ることができる。数学的にはパラドックスではなくれっきとした定理である。(もちろん選択公理が必要である。) 分解されたパーツは体積を測ることのできない集合なので、分割・再構成のプロセスにより体積が保たれなくても良いのである。Banach–Tarski の定理の証明の概略を見よう。 a と b で生成される階数 2 の自由群 $F_2 = \langle a, b \rangle$ に対して、文字 a で始まる既約語全体を $W(a)$ と書き、 $W(a^{-1})$, $W(b)$, $W(b^{-1})$ を同様に定める。このとき、

$$\begin{aligned} F_2 &= (W(a) \cup \{e, a^{-1}, a^{-2}, \dots\}) \sqcup (W(a^{-1}) \setminus \{a^{-1}, a^{-2}, \dots\}) \sqcup W(b) \sqcup W(b^{-1}) \\ &= (W(a) \cup \{e, a^{-1}, a^{-2}, \dots\}) \sqcup a(W(a^{-1}) \setminus \{a^{-1}, a^{-2}, \dots\}) \\ &= W(b) \sqcup bW(b^{-1}). \end{aligned}$$

上の等式は、 F_2 を 4 つのパーツに分解し、パーツのいくつかを a あるいは b により「左平行移動」したあとで組み合わせると F_2 が 2 つできることを意味している。このような分解は paradoxical 分解と呼ばれる。この分解から、 F_2 の上には全ての部分集合が可測であるような平行移動不変確率測度は存在しないことが分かる (F_2 は従順でないという)。 F_2 は球面 S^2 に忠実に作用するので、軌道分解により S^2 も paradoxical 分解を持つことが分かる。(実は各回転が固定点を持つので、 S^2 から可算個の点を除いた集合を考える必要がある。) つまり、 S^2 をいくつかのパーツに分解し、そのいくつかを回転すれば S^2 をちょうど 2 重に覆うことができるのである。結局、Banach–Tarski のパラドックスは球 (面) の分割というよりは、そこに作用する群の性質に関わりがあったわけである。実際、パーツの再構成に使われる群が従順のときは、パラドックスは起こらない。例えば、可換群は従順なので、円周 S^1 には回転に関する paradoxical 分解は存在しない。従順性の概念、及び F_2 を含む群が従順でないことは von Neumann による洞察であり、その逆「従順でない群は必ず F_2 を含むか？」を問うのが von Neumann の問題である。von Neumann の問題は 80 年代に否定的に解かれたが、最近になって、測度論的群論においては肯定的な解答を持つという驚くべき結果が示された。可算離散群 Λ と Γ に対し、単位元を単位元に送る写像全体の集合を $[\Lambda, \Gamma]$ と書き、 Λ の $[\Lambda, \Gamma]$ への作用を $(a \cdot f)(x) = f(xa)f(a)^{-1}$ で定める。このとき、 $f \in [\Lambda, \Gamma]$ が準同型であることは、 f が Λ -不変であることに同値である。この事実を念頭に、 $[\Lambda, \Gamma]$ 上の Λ -不変な Borel 確率測度のことを Λ から Γ へのランダム準同型と呼ぶ。ランダム準同型などを使って群の性質を研究するのが測度論的群論である。例えば次のような定理が知られている。以下において「virtual」は有限指数部分群や有限正規部分群による商群を区別しないという意味である。

Ornstein–Weiss 1980:	Γ 無限従順群	\iff	$\Gamma \cong_{\text{random}} \mathbb{Z}$.
Gaboriau–Lyons 2009:	Γ 非従順	\iff	$F_2 \hookrightarrow_{\text{random}} \Gamma$.
Jones–Schmidt 1987:	Γ Kazhdan の性質 (T)	\iff	$\neg (\Gamma \twoheadrightarrow_{\text{random}} \mathbb{Z})$.
Furman 1999:	$\Gamma \cong_{\text{random}} \text{SL}(3, \mathbb{Z})$	\iff	$\Gamma \leq_{\text{virtual lattice}} \text{SL}(3, \mathbb{R})$.
木田 2006:	$\Gamma \cong_{\text{random}} \text{MCG}(\Sigma)$	\iff	$\Gamma \cong_{\text{virtual}} \text{MCG}(\Sigma)$.