# 作用素の不等式と作用素ノルム不等式

渚　　勝　(千葉大学大学院理学研究院)

## 1. Introduction

実数の区間$I$に対して, 連続関数$f : I \to \mathbb{R}$が$I$上**作用素単調**であるとは, スペクトルが$I$に含まれる自己共役作用素$H(I) \ni A, B$に対して

$$A \le B \Longrightarrow f(A) \le f(B)$$

が成立することである. ここで, $f(A), f(B)$は$A, B$の連続関数カルキュラスを表し, 順序$A \le B$は

$$(Ax, x) \le (Bx, x) \qquad x \in \mathcal{H} \quad (\mathcal{H}\text{: Hilbert space})$$

によって定義する.

とくに $(0, \infty)$ 上の作用素単調関数として

$$f(t) = t^{\gamma} \prod_{i=1}^{n} \frac{(t^{\alpha_i} - 1)}{(t^{\beta_i} - 1)}$$

$|\gamma| \le 2$, $0 < \alpha_i, \beta_i \le 2$, $\alpha_i \ne \beta_j$ という形の関数の作用素 (行列) 単調性を調べてきた.

少し粗い評価ではあるが, $0 < a, b \le 2$ に対して

$$F(a,b) = \begin{cases} a - b & (a \ge b, 0 \le b \le 1) \\ a - 1 & (1 < a, b < 2) \\ 0 & (a < b, 0 \le a \le 1) \end{cases}.$$

と定義すると$n$次対称群$S_n$を用いて

$$0 \le \gamma - \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} F(\beta_{\sigma(i)}, \alpha_i) \text{ and } \gamma + \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}) \le 1,$$

であれば $f(t)$ は作用素単調関数であり, $\alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_n$, $\beta_1 \le \beta_2 \le \ldots \le \beta_n$ であれば

$$\sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_i) = \min_{\sigma \in S_n} \sum_{i=1}^{n} F(\alpha_i, \beta_{\sigma(i)}).$$

となることを得ている.

これによって Petz-Hasegawa の関数 (下の $f$ で $a + b = 1$のとき) の作用素単調性も保証されている.

扱っている関数の積の個数が少ない場合, つまり

$$h(t) = \frac{b}{a} t^a - 1 t^b - 1, \quad f(t) = ab \frac{(t-1)^2}{(t^a - 1)(t^b - 1)}$$

という関数については、より正確な判定も得ることができる.

この後者の形の関数については一般的な議論を行うことが可能で$n \in \mathbb{N}$とし$a, b, b_1, \ldots, b_n \ge 0$, 定数でない $[0, \infty)$ 上の作用素単調関数 $f, g, g_1, \ldots, g_n$ に対し

(1) $\dfrac{f(t)g(t)}{t}$ が $[0,\infty)$ 上作用素単調であれば,

$$h(t)=\frac{(t-a)(t-b)}{(f(t)-f(a))(g(t)-g(b))} \qquad (a,b\geq 0)$$

も $[0.\infty)$ 上作用素単調である.

(2) $\dfrac{f(t)}{\prod_{i=1}^{n} g_i(t)}$ が $[0,\infty)$ 上作用素単調であれば,

$$h(t)=\frac{(t-a)}{(f(t)-f(a))}\prod_{i=1}^{n}\frac{g_i(t)(t-b_i)}{tg_i(t)-b_ig_i(b_i)} \qquad (a,b\geq 0)$$

も $[0.\infty)$ 上作用素単調である.

## 2. 作用素ノルム不等式

上で扱った関数は作用素平均としてもよく扱われる関数であった.

$\alpha=(a_1,a_2,\ldots,a_n),\beta=(b_1,b_2,\ldots,b_n)\in\mathbb{R}^n$, $a>0$ に対して $(0,\infty)$ 上の関数を次のように定義する.

$$f_{\alpha,\beta,a}(t)=t^{\gamma(\alpha,\beta,a)}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i(t^{a_i}-1)}{a_i(t^{b_i}-1)}\right)^a,$$

ただし $\gamma(\alpha,\beta,a)=(1-a\sum_{i=1}^{n}(a_i-b_i))/2$ である. また, $s,t>0$ に対して

$$M_{\alpha,\beta,a}(s,t)=tf_{\alpha,\beta,a}(s/t)=(st)^{\gamma(\alpha,\beta,a)}\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{b_i(s^{a_i}-t^{a_i})}{a_i(s^{b_i}-t^{b_i})}\right)^a$$

と定義する. とくに $a=1$ のときは $f_{\alpha,\beta,a}=f_{\alpha,\beta}$, $M_{\alpha,\beta,a}=M_{\alpha,\beta}$ と書く.

$A\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ に対して, $(\mathbb{M}_n(\mathbb{C}),\mathrm{Tr})$ 上の作用素 $L_A(X)=AX$, $R_A(X)=XA$ $(X\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C}))$ を考えると $H,K\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ が可逆な正値行列であれば, $L_H,R_K$ は可換な正値作用素になるので $M_{\alpha,\beta,a}(L_H,R_K)(=M_{\alpha,\beta,a}(H,K)$ とかく$)$ が考えられる.

このとき以下の命題を示すことができる.

**定理 1.** $r>1$, $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0$ とし,

$$\alpha=(a_1,\cdots,a_k),\quad \beta=(a_{k+1},\cdots,a_n)$$

とおく. このとき $a_1+\cdots+a_k\geq a_{k+1}+\cdots+a_n$ であることと

$$|||M_{r\beta,\beta}(H,K)X|||\leq|||M_{r\alpha,\alpha}(H,K)X|||$$

が成立することは同値である.

ただし $|||\cdot|||$ は $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上の任意のユニタリ不変ノルムを表し, $H,K,X\in\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ であり $H,K$ は可逆な正値行列である. また, $r(a_1,\ldots,a_k)=(ra_1,\ldots,ra_k)$ である.

**定理 2.** $r\geq 1$, $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0$ とし,

$$\alpha=(a_1,\cdots,a_k),\quad \beta=(a_{k+1},\cdots,a_n)$$

とおく. このとき $a_1+\cdots+a_k \geq a_{k+1}+\cdots+a_n$ であれば, 任意の $0<b\leq a$ に対して

$$|||M_{r\beta,\beta,b}(H,K)X||| \leq |||M_{r\alpha,\alpha,a}(H,K)X|||$$

が成立する.

ただし $|||\cdot|||$ は $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上の任意のユニタリ不変ノルムを表し, $H,K,X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ であり $H,K$ は可逆な正値行列である.

この命題は日合-幸崎, 幸崎による関数の正定値性, 無限分解可能性の証明とその一般化によって得られる. 無限分解可能性の必要性は, 正の自然数 $n,m$ に対する binomial mean について, $n>m$ であれば

$$\frac{1}{2^n}|||\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}H^{i/n}XK^{(n-i)/n}||| \leq \frac{1}{2^m}|||\sum_{j=0}^{m}\binom{m}{j}H^{j/m}XK^{(m-j)/m}|||,$$

という関係を導くときに強く感じることができる.

ここで　$|||\cdot|||$ は $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ 上の任意のユニタリ不変ノルムを表し, $H,K,X \in \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$ であり $H,K$ は可逆な正値行列である.