

磁場中の確率調和振動子鎖モデルにおける熱の異常拡散について

須田 颯

2018年3月5日

本研究は佐々田 槇子氏 (東京大学大学院数理科学研究科), 齊藤 圭司氏 (慶應義塾大学理工学部物理学科) との共同研究である。

本公演では, 2次元中の1次元調和振動子鎖 $\{(v(x, t), q(x, t)) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2; x \in \mathbb{Z}, t \geq 0\}$ に磁場及び確率的摂動を加えたモデル

$$\begin{cases} dq_i(x, t) &= v_i(x, t)dt \\ dv_i(x, t) &= (\Delta q_i)(x, t) + \delta_{i,1} B v_2(x, t) - \delta_{i,2} B v_1(x, t) + \epsilon \gamma \Delta v_i(x, t) dt \\ &+ \sqrt{\epsilon \gamma} \sum_{z: |z-x|=1} (Y_{x,z} v_i(x, t)) dw_{x,z} \end{cases}$$

の巨視的な熱拡散現象について考察する。ここで, $B \in \mathbb{R}$ は磁場の強度, $\gamma > 0$ は確率的摂動の強度であり, $\{w_{x,z}(t) = w_{z,x}(t); x, z \in \mathbb{Z}, |x-z|=1, t \geq 0\}$ は独立なブラウン運動, また

$$Y_{x,z} = (v_2(z) - v_2(x))(\partial_{v_1(z)} - \partial_{v_1(x)}) - (v_1(z) - v_1(x))(\partial_{v_2(z)} - \partial_{v_2(x)})$$

である。このモデルは [3] により導入され, 巨視的な熱の異常拡散が生じていることが示されたが, 具体的にどのような方程式に従って拡散するのかは分かっていなかった。本研究では [1, 2] で用いられた手法を踏襲することにより, 巨視的な熱分布 $\{u(y, t) \in \mathbb{R}_{\geq 0}; y \in \mathbb{R}, t \geq 0\}$ は $\frac{5}{6}$ -分数階拡散方程式

$$\partial_t u(y, t) = -(-\Delta_y)^{\frac{5}{6}} u(y, t)$$

に従うことを示した。指数が $\frac{5}{6}$ となる分数階拡散方程式を振動子鎖モデルから数学的に導出したのは本研究が初めてである。

参考文献

- [1] G. BASILE, S. OLLA, H. SPOHN : *Energy transport in stochastically perturbed lattice dynamics*. Arch. Ration. Mech. **195**, 171–203 (2009)
- [2] M. JARA, T. KOMOROWSKI, S. OLLA : *A limit theorem for an additive functionals of Markov chains*. Ann. Appl. Probab. **19**, 2270–2230 (2009)
- [3] K. SAITO, M. SASADA : *Thermal conductivity for a stochastic dynamics in a magnetic field*. arXiv:1706.09668 [math.PR]