フラクタル上の解析学入門

梶野　直孝（神戸大学大学院理学研究科）

応用解析学特論 I
（京都大学大学院情報学研究科　2013 年度集中講義）
2014 年 2 月 23 日

序

本稿は京都大学大学院情報学研究科における 2013 年度集中講義「応用解析学特論 I」の講義内容をまとめたものである．

本講義では自己相似フラクタル上の自己相似 Dirichlet 形式（および対応する Laplacian）の構成を取り扱う．内容は主に木上淳氏による monograph [21, Chapters 1–3] の記述に従うが，必要に応じて同氏による最近の論文 [23, 24] の結果も取り入れて筆者なりに整理したつもりである．原則として証明を省略することはせず，数学的に完全に理解することを目標とする．ただし講義回数に限りがあるため，内容は Dirichlet 形式の構成を理解する為に最低限必要な範囲に留めており，触れることのできていない重要な事柄も多い（例えば Hausdorff 測度や Hausdorff 次元といったフラクタルの幾何学的性質など）．本稿で割愛した事項については [21, Chapters 1–3] および本文中で示した文献を参照されたい．

京都大学大学院情報学研究科の木上淳氏は筆者がまだ学部生の頃から現在に至るまで大変丁寧にご指導下さり，未熟な学生であった筆者をフラクタル上の解析学の豊かな世界に導いて下さった．またこの度は筆者の専門について既知の事実を整理し講義する貴重な機会をいただいた．数々の学恩に心より感謝申し上げる．

2014 年 2 月，神戸にて
梶野　直孝

目次

第0章

Introduction: フラクタルとは?

「フラクタル」という語は，その歴史は浅いものの自然科学においてはそれなりの市民権を得ており，聞いたことがあるという読者も多いことと思う．ではこの言葉を聞いて読者は何を思い浮かべるだろうか．フラクタルの実例は大抵の場合（ある意味）規則的で「奇麗な」絵や写真として紹介されるから，そのような絵や写真を通じてフラクタルに興味を持ったという読者もいるであろう．しかし「奇麗さ」だけでは芸術の対象にはなっても自然科学の研究対象にはなりにくいわけで，自然科学の文脈でフラクタルがそこそこの頻度で登場するのには別の理由がある．その「別の理由」を見出し広く世に知らしめたのが，フラクタル (fractal) という語の提唱者 Benoit B. Mandelbrot (1924–2010) である．

Mandelbrot による指摘「自然界はフラクタルに溢れている」

「長さが無限大の曲線」「面積が 0 の（平面）図形」等といった，通常の滑らかな曲線や曲面とは著しく異なる性質を有する図形が存在することは古くから知られていた．図 0.1 はそのような図形の代表例である．滑らかな図形を標準的とみなす古典的な価値観からこうした図形は長らく「病的な」例外としか考えられてこず，純粋に数学的な興味から考察の対象となることはあっても重要な研究対象となることはなかった．

状況が大きく変わったのは 1970 年代であった．Mandelbrot は [30, 31] において，自然界に存在する多くの物質・物体がむしろそうした「病的な」図形をこそ基本構造に持つことを指摘し，そうした図形一般を「フラクタル」(fractal) と呼んだ．現在ではフラクタルは物理，化学，生物，工学，医学といった理工系科学の諸分野で普遍的に見出され理論・応用両面から盛んに研究されている．コンピュータグラフィクス技術の進歩により複雑なフラクタルを高い精度で実際に「描いてみる」ことが可能になり，描いてみると非常に色鮮やかな絵が得られることも，フラクタルが高い関心を集めることになった一因と言えるだろう．

数学におけるフラクタル：フラクタル幾何学の進展

数学においてもフラクタルは様々な場面，特に力学系や確率論の文脈で自然に現れ重要な研究対象となってきた．例えば現代確率論において最も基本的な対象で

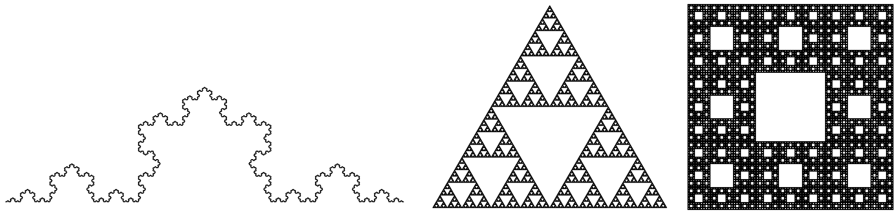


図 0.1: 代表的な自己相似フラクタル．左から Koch 曲線，Sierpiński gasket, Sierpiński carpet.

ある $\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動は，確率 1 で（random な $\mathbb{R}^d$-値連続曲線として）至る所微分不可能かつ任意の有界区間上で非有界変動であることが知られており（例えば [16, Sections 1.5 and 2.9] を参照），その意味で「フラクタル的」であると言える．また複素力学系で重要な **Mandelbrot 集合**

$$\left\{c \in \mathbb{C} \;\middle|\; \{z_n\}_{n=0}^{\infty} \subset \mathbb{C} \text{ を } z_0 := 0, z_{n+1} := z_n^2 + c \text{ で定めると } \sup_{n\geq 0} |z_n| < \infty\right\}$$

は複素平面 $\mathbb{C}$ の部分集合として連結であることが知られているが ([10])，Mandelbrot 集合のコンピュータ画像を見る限りではその境界は極めて複雑な形状をしており如何にもフラクタル「らしい」．

このような「極めて複雑な」図形を見て，まずその幾何学的性質について調べようと考えるのは自然であろう．実際 Mandelbrot によりフラクタルの重要性が指摘されて以来，当時既に基礎が確立していた幾何学的測度論，力学系，エルゴード理論や調和解析等を土台として，フラクタルの幾何学的性質の解明を目標とする「フラクタル幾何学」は急速な発展を見せた．

フラクタル幾何学において最も基本的な研究対象は個々のフラクタルの「(幾何学的な）次元」である．ここでいう「次元」とは $\mathbb{R}^d$ の部分集合（より一般には距離空間やその部分集合）に対して定義される非負の実数であり，その集合の「大きさ（複雑さ）」を表す指標である．ここまでに挙げた例では，図 0.1 の Koch 曲線，Sierpiński gasket, Sierpiński carpet の次元はそれぞれ $\log_3 4 = 1.261859\ldots$, $\log_2 3 = 1.584962\ldots$, $\log_3 8 = 1.892789\ldots$ である（Moran の定理 [32]; 証明は例えば [21, Section 1.5] に，必要な測度論からの準備とともに与えられている）．このように，いわゆる「フラクタル」は典型的には非整数の次元を持ち，そのことが fractal という語の由来にもなっていると思われる（「分数，小数，非整数」という意味の英単語 fraction からの造語と推測される）が,「フラクタル的な」集合が整数の次元をもつ場合もある．実際，$d \geq 2$ に対し $\mathbb{R}^d$ 上の Brown 運動の $\mathbb{R}^d$-値連続曲線としての像は確率 1 で 2 次元（「曲線」であるにも拘らず!）かつその面積（2 次元 Hausdorff 測度）は 0 であることが Taylor [35] の結果により知られている．また Mandelbrot 集合についてはその境界の次元は 2 であるという宍倉光広氏による非常に有名な結果 [33] があるが，境界の 2 次元 Lebesgue 測度が 0 であるかどうかは未だに分かっていないようである．

注意 0.1. 「次元」の概念にはよく使われるものだけでも Hausdorff 次元，box-counting 次元など複数の定義があり，上で紹介した例ではどの次元の定義でも同じ値になるが，フラクタルによっては定義の仕方によって異なる値になることもある．この意味でフラクタルには唯一絶対の「次元」が定まっているわけではな

く，実際の研究ではどの「次元」に注目するべきかは目的に応じて個別に判断する必要がある．また与えられたフラクタルに対して複数の次元の値が一致するかということ自体も研究の主題になり得る．

フラクタル上の解析学へ

フラクタル幾何学はいわばフラクタルの，ひいては自然界の物質の「静的」(static) な性質を主題としている．では「動的」(dynamic) な性質，すなわちフラクタルの物理学的な性質・フラクタル上の物理現象はどうなっているのだろうか[1]．この問いに数学的に厳密な解答を与えることを目標とするのが「フラクタル上の解析学」である．

代表的な物理現象としては熱や波動の伝播があり，それらは最も単純な形では Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ における熱方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u \tag{0.1}$$

及び波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \Delta u \tag{0.2}$$

の解としてそれぞれモデル化される．ここで Δ は $\mathbb{R}^d$ 上の通常の Laplacian

$$\Delta := \Delta_{\mathbb{R}^d} := \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \tag{0.3}$$

である．そこでフラクタル上の熱や波動の伝播に対し同様のモデル化を行う為には Laplacian の「フラクタル版」があればよいということになるが，フラクタルにおいては「素朴な」微分の概念は機能しないため，**「フラクタル上の Laplacian はどのようにして定義すればよいか」**がまず問題となる．

この問題に対する解答は主に確率論の立場から，random walk のスケール極限としてフラクタル上の確率過程を構成しその生成作用素として Laplacian を得る，という手法により与えられた．これは最初に Sierpiński gasket の場合に Goldstein [12], 楠岡 [26], Barlow and Perkins [6] らが行い，その後 nested fractals（図 0.2）という Sierpiński gasket を含むかなり広い範疇の自己相似フラクタルに対して Lindstrøm [28] が，また Sierpiński carpet の自然な一般化である generalized Sierpiński carpets（図 0.3）に対して Barlow and Bass [3, 4] がそれぞれ行った．

一方，木上淳氏は同一の Laplacian の解析的手法による構成をまず [17] で Sierpiński gasket に対して行い，さらに [18, 19, 20] 等を通じて同様の手法を後臨界有限 (post-critically finite, p.-c.f.) な自己相似集合という nested fractals を含む範疇の自己相似フラクタルに適用可能な一般論として整理した．これによって p.-c.f. 自己相似集合上の Laplacian は初歩的な関数解析の知識だけを用いて極めて初等的に構成できることが明らかになった上に，Laplacian の具体的な計算方法が与えられたことで更なる研究の進展も促された．Laplacian の解析的な構成の一般論は最終的に木上氏自身により monograph [21] にまとめられ，以来フラクタル上の解析学の最も基本的な文献の 1 つとなっている．

---
[1] static, dynamic という言い回しは [21, Introduction] から引用した．

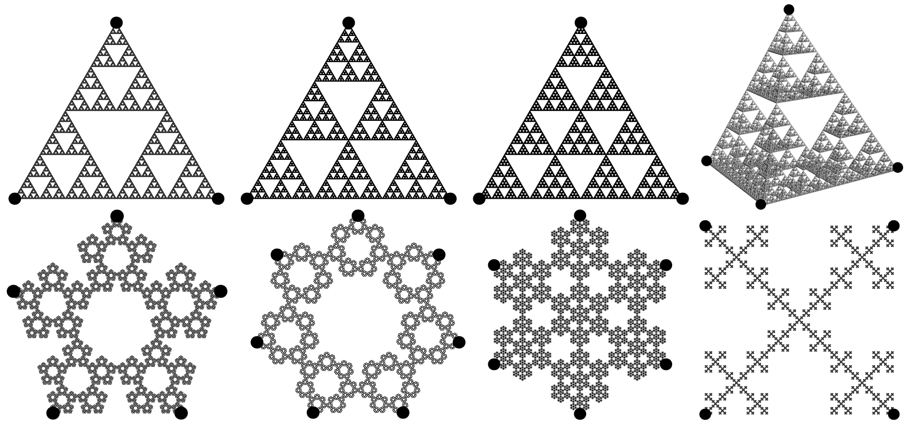


図 0.2: Nested fractals の例．左上方から順に 2 次元 l 段 Sierpiński gasket ($l = 2, 3, 4$), 3 次元標準（2 段）Sierpiński gasket, pentagasket (5-polygasket), heptagasket (7-polygasket), snowflake, Vicsek 集合．各フラクタルに対しその境界点全体の集合 V_0 を黒点で示してある．

ただし木上氏による解析的手法は扱えるフラクタルの範疇が p.-c.f. 自己相似集合に限定され，generalized Sierpiński carpets を取り扱うことはできない．これは p.-c.f. 自己相似集合が有限個の点を除くことで自身の縮小像同士が交わらないようにできる（**有限分岐的**；特に nested fractals（図 0.2）もこの性質を有する）のに対し，generalized Sierpiński carpets では縮小像同士が無限集合で交わる（**無限分岐的**；図 0.3 参照）という位相的性質の違いが原因である．P.-c.f. 自己相似集合では適切な有限部分集合の増大列による近似が Laplacian のよい離散近似を与え，これにより解析の大半を実質的に有限次元空間上の双線型形式の具体的な計算に帰着させることができる[2]．一方 generalized Sierpiński carpets では無限分岐性のためそのような「高精度の」離散近似は本質的に不可能であり，その上の Laplacian の構成や解析には p.-c.f. 自己相似集合の場合とは桁違いに大きな困難を伴う．

本稿は，[21, Chapters 1–3] で述べられている Laplacian の解析的構成の一般論の主要部分をなるべく簡潔に，かつ完全な証明付きで紹介することを目標としている．本集中講義の参加者・本稿の読者が p.-c.f. 自己相似フラクタル上の Laplacian について具体的な計算を行う為に必要な知識を身につけ，今後のさらなる勉学・研究の糧としていただけることを期待したい．Generalized Sierpiński carpets（をはじめとする無限分岐的フラクタル）上の Laplacian についてはあまり理解が進んでおらず，今後の研究の進展が大いに待たれるところではあるのだが，あまりにも難しすぎるため本稿では扱わない．最近の論文 [5, 14, 15], M. T. Barlow 氏による概説 [2] およびその参考文献を参照のこと．

注意 0.2. 本稿で取り扱うフラクタルの範疇について 1 つ注意をしておく．[21] に倣い，本稿では理想化された厳密な自己相似性を有する自己相似集合（正確な定義は第 1 章で与える）に限定して話を進める．これは数学的必要性からそうせざ

[2]実際にはむしろ，そのような近似が可能となるように p.-c.f. 自己相似集合というクラスが定義された，というのが正しい．P.-c.f. 自己相似集合の定義は木上 [18] による．

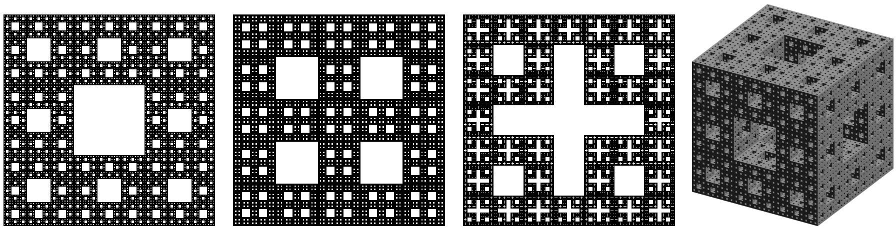


図 0.3: Sierpiński carpet, 他の 2 次元 generalized Sierpiński carpets と Menger sponge

るを得ないためにそうするのであって，**「フラクタル」とは「自己相似集合」のことであるなどといった誤解をしないようにしてほしい**．そもそも「フラクタル」という語には「通常の滑らかな曲線や曲面とは著しく異なる性質を有する図形」程度の曖昧な意味しかなく，**「フラクタル」なる概念は数学的に定義された概念ではない**．例えば Mandelbrot 集合の境界がそうであるように，一般にフラクタルと見なされている図形の大半はもっと弱い自己相似性しか有しておらず，本稿の定義の意味での自己相似集合とはならない．

自己相似集合よりも弱い自己相似性しか持たないフラクタルにおいても Laplacian の構成や解析は当然なされるべきであって，自己相似性の意味を確率論的な形に弱めた random フラクタルに対する研究をはじめとして現時点でも既に相当量の研究がある．そうした研究の枠組みは [21] の（従って本稿の）自己相似集合の枠組みからは外れてしまうが，それでも Laplacian の構成とその解析は大抵の場合 [21] の手法を適切に改変することで行われており，その意味で [21] の手法はより一般のフラクタル上の解析学の研究の基礎としても重要である．本稿はその「基礎」部分を速習してもらうことを目指すものである．

本稿各章の内容は以下の通りである．まず第 1 章では自己相似集合の位相的・幾何学的性質を取り扱い，特に基本的な枠組みとして後臨界有限 (post-critically finite, p.-c.f.) 自己相似構造の定義を与える．第 2 章では有限集合上の電気回路構造の極限として非負定値閉対称双線型形式（Dirichlet 形式）を構成する一般的な方法を与える．なお第 2 章の内容は第 1 章とは独立しているので，第 1 章を読まずに第 2 章を読むことも可能である．最後に第 3 章では前章の理論を応用して p.-c.f. 自己相似構造上に自己相似な双線型形式（Dirichlet 形式）及び対応する Laplacian を構成する．

なお，既に述べたように本稿の主要部分は [21, Chapters 1–3] の記述によっているが，出典についてのより詳しい情報は各章末に挙げた参考文献リストを参照のこと．

幾つかの記号

本論に入る前に，本稿を通して使われる幾つかの記号をここで導入しておく．
(1) 等式

$$A := B$$

は「A を B で定義する」の意味に用いる．

(2) $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ は通常通り自然数全体，整数全体，有理数全体，実数全体，複素数全体の集合をそれぞれ表す．本稿では $\mathbb{N}$ は 0 を含まないと約束する：

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}.$$

(3) 集合 A に属する元の総数を $\#A$ で表す．$\#A \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ である．
(4) 集合 X, Y，写像 $f : X \to Y$ と $A \subset X$ に対し，写像 $f|_A : A \to Y$ を $f|_A(x) := f(x), x \in A$ により定める．この $f|_A$ を f の A への制限という．
(5) 空集合 $\emptyset$ の上限，最大値，下限，最小値は $\sup \emptyset := \max \emptyset := 0, \inf \emptyset := \min \emptyset := \infty$ と約束する．$a, b \in [-\infty, \infty]$ に対し $a \vee b := \max\{a, b\}, a \wedge b := \min\{a, b\}$, $a^+ := a \vee 0, a^- := -(a \wedge 0)$ と定め，$[-\infty, \infty]$-値関数に対しても同様の記号を用いるものとする．本稿では関数と言えば $[-\infty, \infty]$-値関数のみを考えるものとする．
(6) $d \in \mathbb{N}$ とする．$\mathbb{R}^d$ には通常の Euclid ノルム $|\cdot|$ を入れる．また d 次実直交群を $O(d)$ で表す：$O(d) := \{U \mid U$ は $d \times d$ 実行列，$U^*U = I_d\}$. ただし I_d は $d \times d$ 単位行列を表し，実行列 M に対し M^* はその転置行列を表す．
(7) X を位相空間とする．$A \subset X$ に対しその X における内部，閉包，境界をそれぞれ $\mathrm{int}_X A, \overline{A}^X, \partial_X A$ で表す．X の Borel σ-加法族（X の開集合全体を含む X における σ-加法族のうちで最小のもの）を $\mathcal{B}(X)$ で表す．さらに $C(X) := \{f \mid f : X \to \mathbb{R}, f$ は連続$\}$, $f \in C(X)$ に対し $\mathrm{supp}_X[f] := \overline{f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})}^X$, $\|f\|_\infty := \sup_{x \in X} |f(x)|$ とおき，$C_c(X) := \{f \in C(X) \mid \mathrm{supp}_X[f]$ はコンパクト$\}$ とする．
(8) (X, ρ) を距離空間，$x \in X$ とする．$r \in (0, \infty)$ に対し $B_\rho(x, r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) < r\}$, $\overline{B}_\rho(x, r) := \{y \in X \mid \rho(x, y) \le r\}$ とおき，また $A \subset X$ に対し $\mathrm{dist}_\rho(x, A) := \inf_{y \in A} \rho(x, y)$, $\mathrm{diam}_\rho A := \sup_{y, z \in A} \rho(y, z)$ とおく．$A \subset X$ が $\mathrm{diam}_\rho A < \infty$ を満たすとき，A は ρ-有界であるという．

第1章

自己相似集合の幾何

本章では自己相似集合の定義とその基本的な幾何学的性質を取り扱う．具体的には，まず 1.1 節で完備距離空間上の縮小写像の族から自然に自己相似集合が定まることを示し，1.2 節で自己相似集合の位相構造が（片側）シフト空間の商空間として記述できることをみる．自己相似集合上に Laplacian を構成するという我々の目的のためには実はこのシフト空間の商空間としての位相構造だけが本質的であり，そこで 1.3 節で自己相似集合と同様の位相構造を持つ位相空間を「自己相似構造」として定式化しその基本性質を述べる．この自己相似構造という概念が自己相似フラクタル上の解析学の枠組みとして以降で中心的な役割を果たす．1.4 節で代表的な自己相似集合の例を紹介した後，1.5 節で自己相似構造上の測度の基本性質，特に自己相似構造上の自然な測度である自己相似測度について定義と基本的な事実に触れ，最後に 1.6 節で自己相似構造が（弧状）連結であるための簡明な必要十分条件を与える．

1.1　自己相似集合の構成

ここまでに既に何度も「自己相似」という語を使ってきたが，自己相似性とは数学的にはどのように定式化されるべきだろうか．自己相似性とは「部分と全体が相似」，もう少し狭義には「自身の相似縮小像によって全体が構成される」という性質のことであるから，その最も単純な定式化は「全空間」K と「相似縮小」$F_i : K \to K$ が等式

$$K = \bigcup_i F_i(K) \tag{1.1}$$

を満たす，というものであろう．

本節の目標は，縮小写像の族から (1.1) を満たす集合 K が自然に定まることの証明である．具体的には，完備距離空間 X 上の有限個の縮小写像の族 $\{F_i\}_{i\in S}$ に対し，X の空でないコンパクト集合 K で (1.1) を満たすものが唯 1 つ存在することを示す（定理 1.4）．その為に X の空でないコンパクト集合の全体に Hausdorff の距離と呼ばれる距離関数を導入するが，これ自身距離空間の幾何学において基本的な役割を果たす重要な概念である．

注意 1.1. (1.1) において縮小写像が無限個ある場合を考えることもできない訳ではないが，その場合空間の位相的性質の取り扱いが技術的に極めて難しくなる．そのような空間は解析の枠組みとしてあまりふさわしくないと思われるので本稿では扱わず，**有限個**の縮小写像により (1.1) が満たされる場合のみを取り扱う．

距離空間上の縮小写像（および相似変換）は次のように定義される．

定義 1.2 (縮小写像，相似変換)**.** (X,ρ) を距離空間とし，$f : X \to X$ とする．
(1) ある $\alpha \in (0,1)$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し $\rho(f(x), f(y)) \le \alpha\rho(x,y)$ となるとき，f は (X,ρ) 上の**縮小写像** (contraction) であるという．
(2) ある $\alpha \in (0,\infty)$ が存在して任意の $x, y \in X$ に対し $\rho(f(x), f(y)) = \alpha\rho(x,y)$ となるとき，f は (X,ρ) 上の**相似変換** (similitude) であるといい，α を f の相似率 (similarity ratio) という．さらに相似率 α が $\alpha < 1$ を満たすとき，f を (X,ρ) 上の**相似縮小** (contractive similitude), α を f の縮小率 (contraction ratio) という．

明らかに，縮小写像および相似変換は連続写像であり，また相似縮小は縮小写像である．よく知られていることであるが，Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の相似変換に対しては次が成り立つ．

演習 1.1. $d \in \mathbb{N}$ とし，f を相似率 α を持つ $\mathbb{R}^d$ 上の相似変換とする．このとき $U \in O(d)$ と $b \in \mathbb{R}^d$ が存在して任意の $x \in \mathbb{R}^d$ に対し $f(x) = \alpha Ux + b$ となることを示せ．

縮小写像に対し次の定理は基本的である．

定理 1.3 (縮小写像の原理)**.** (X,ρ) を完備距離空間とし，f を (X,ρ) 上の縮小写像とする．このとき $f(x_f) = x_f$ を満たす $x_f \in X$ が唯 1 つ存在する．さらに任意の $x \in X$ に対し，$\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ を帰納的に $f^1(x) := f(x), f^{n+1}(x) := f(f^n(x))$ で定めると (X,ρ) において $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f$.

証明. 定義 1.2-(1) のような $\alpha \in (0,1)$ を取る．$x \in X$ を任意に取って固定し，主張のように $\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ を定める．このとき $m < n$ なる $m, n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\rho(f^m(x), f^n(x)) &\le \sum_{k=m}^{n-1} \rho(f^k(x), f^{k+1}(x)) \\ &\le \sum_{k=m}^{n-1} \alpha^k \rho(x, f(x)) \le \frac{\alpha^m}{1-\alpha}\rho(x, f(x)) \xrightarrow{m\to\infty} 0\end{aligned}$$

となるので，$\{f^n(x)\}_{n\in\mathbb{N}}$ は (X,ρ) における Cauchy 列である．よって (X,ρ) の完備性の仮定から $x_f \in X$ が存在して (X,ρ) において $\lim_{n\to\infty} f^n(x) = x_f$. すると $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\rho(x_f, f(x_f)) &\le \rho(x_f, f^{n+1}(x)) + \rho(f^{n+1}(x), f(x_f)) \\ &\le \rho(x_f, f^{n+1}(x)) + \alpha\rho(f^n(x), x_f) \xrightarrow{n\to\infty} 0\end{aligned}$$

であるから $\rho(x_f, f(x_f)) = 0$ となり，従って $f(x_f) = x_f$ である．

次に $y \in X$ が $f(y) = y$ を満たすとすると，$\rho(y, x_f) = \rho(f(y), f(x_f)) \leq \alpha\rho(y, x_f)$ なので $(1-\alpha)\rho(y, x_f) \leq 0$，従って $\rho(y, x_f) = 0$ となり $y = x_f$ である．よって $f(y) = y$ を満たす $y \in X$ は x_f に限る．さらに前段落の $x \in X$ は任意に取って固定していたので，定理の後半の主張も従う． □

次が本節の主定理である．

定理 1.4. (X, ρ) を完備距離空間，S を空でない有限集合とし，$i \in S$ に対し $f_i : X \to X$ を (X, ρ) 上の縮小写像とする．このとき X の空でないコンパクト集合 K で

$$K = \bigcup_{i \in S} f_i(K) \tag{1.2}$$

を満たすものが唯 1 つ存在する．さらに X の空でないコンパクト集合 A に対し $\Phi(A) := \bigcup_{i \in S} f_i(A)$ とし，また帰納的に $\Phi^1(A) := \Phi(A), \Phi^{n+1}(A) := \Phi(\Phi^n(A))$ と定めるとき，任意の X の空でないコンパクト集合 A に対し

$$K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \Phi^k(A)}^{X}. \tag{1.3}$$

特に X の空でないコンパクト集合 A に対し，$A \subset \Phi(A)$ ならば $K = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} \Phi^n(A)}^X$ であり，また $\Phi(A) \subset A$ ならば $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \Phi^n(A)$ である．

定義 1.5 (自己相似集合)**.** (X, ρ) を完備距離空間，S を空でない有限集合とし，$i \in S$ に対し $f_i : X \to X$ を (X, ρ) 上の縮小写像とする．このとき（定理 1.4 により存在が保証された）(1.2) を満たす唯 1 つの X のコンパクト集合 K を $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる**自己相似集合** (self-similar set) という．

注意 1.6. 自己相似集合という語はもっと狭い意味で用いられる場合もあるので注意されたい．1 つのよくある流儀としては，各 f_i が相似縮小である場合の K を「自己相似集合」と呼び，各 f_i が $\mathbb{R}^d$ 上の縮小写像かつ affine 写像（ある $d \times d$ 実行列 A と $x \in \mathbb{R}^d$ により $x \mapsto Ax + b$ で与えられる写像）である場合の K を「自己 affine 集合」(“self-affine set”) と呼ぶというものである．本稿ではそのような言い回しはせず，自己相似集合という語は常に定義 1.5 の意味に用いる．

以下，本節の残りで定理 1.4 の証明を行う．主な方針は

> X の空でないコンパクト集合全体の上に完備な距離を導入し，定理 1.4 の Φ がその距離の下で縮小写像になっていることを示し定理 1.3 を適用する

というものである．ここでいう「完備な距離」は次の定理により与えられる．

定理 1.7 (Hausdorff の距離)**.** (X, ρ) を距離空間とする．$A \subset X, s \in (0, \infty)$ に対し $U_s(A) := \{x \in X \mid \text{ある } y \in A \text{ により } \rho(x, y) \leq s\} = \bigcup_{y \in A} \overline{B}_\rho(y, s)$ とおき，

$$\mathcal{K}(X) := \{A \mid A \text{ は } X \text{ の空でないコンパクト部分集合}\}, \tag{1.4}$$

$$\delta_\rho(A, B) := \inf\{s \in (0, \infty) \mid U_s(A) \supset B \text{ かつ } U_s(B) \supset A\}, \quad A, B \in \mathcal{K}(X) \tag{1.5}$$

と定義する．このとき δ_ρ は $\mathcal{K}(X)$ 上の距離関数であり，$A \in \mathcal{K}(X), \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X)$ に対し $\lim_{n\to\infty} \delta_\rho(A_n, A) = 0$ ならば $A = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}^X$ である．さらに (X, ρ) が可分なら $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ も可分であり，(X, ρ) が完備なら $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ も完備である．(δ_ρ を距離空間 (X, ρ) 上の **Hausdorff の距離** (Hausdorff metric) という．)

証明. まず X の空でない有限集合はコンパクトなので $\mathcal{K}(X)$ の元であり，従って $\mathcal{K}(X) \neq \emptyset$ であることを注意しておく．$A, B \in \mathcal{K}(X)$ とする．明らかに $\delta_\rho(A, A) = 0, \delta_\rho(A, B) = \delta_\rho(B, A) \in [0, \infty]$ である．また $a \in A, b \in B$ とすると A, B のコンパクト性より $\max_{x\in A} \rho(x, b), \max_{y\in B} \rho(a, y)$ が存在し，よって $s \geq \max_{x\in A} \rho(x, b) \vee \max_{y\in B} \rho(a, y)$ なる $s \in (0, \infty)$ に対し $U_s(A) \supset \overline{B}_\rho(a, s) \supset B$ かつ $U_s(B) \supset \overline{B}_\rho(b, s) \supset A$ となるので $\delta_\rho(A, B) < \infty$.

次に $\delta_\rho(A, B) = 0$ と仮定して $A = B$ を示す．$x \in A$ とする．$\delta_\rho(A, B) = 0$ より，任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し $s \in (0, \varepsilon)$ が存在して $A \subset U_s(B)$ であるから，$y \in B$ が存在して $\rho(x, y) \leq s < \varepsilon$ となる．従って $x \in \overline{B}^X$，ゆえに $A \subset \overline{B}^X$ であるが，B はコンパクトなので特に X の閉部分集合であり，よって $A \subset \overline{B}^X = B$ となる．$B \subset A$ も同様にして示され，これより $\delta_\rho(A, B) = 0$ ならば $A = B$ である．

3 角不等式を示すために，$C \in \mathcal{K}(X)$ とし $s \in (\delta_\rho(A, C), \infty), t \in (\delta_\rho(C, B), \infty)$ とする．このとき $s' \in (0, s), t' \in (0, t)$ が存在して $A \subset U_{s'}(C) \subset U_s(C), C \subset U_{t'}(B) \subset U_t(B)$ である．従って $x \in A$ とするとある $z \in C$ により $\rho(x, z) \leq s$，さらにある $y \in B$ により $\rho(z, y) \leq t$ となるので $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y) \leq s + t$，よって $x \in U_{s+t}(B)$ となり $A \subset U_{s+t}(B)$ が分かる．同様に $B \subset U_{s+t}(A)$ も分かるので，$\delta_\rho(A, B) \leq s + t$ であり，$s \downarrow \delta_\rho(A, C), t \downarrow \delta_\rho(C, B)$ として $\delta_\rho(A, B) \leq \delta_\rho(A, C) + \delta_\rho(C, B)$ を得る．以上より δ_ρ は $\mathcal{K}(X)$ 上の距離関数である．

$A \in \mathcal{K}(X), \{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X)$ は $\lim_{n\to\infty} \delta_\rho(A_n, A) = 0$ を満たすとする．$\varepsilon \in (0, \infty)$ とする．このとき $N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $k \geq N$ に対し $\delta_\rho(A_k, A) < \varepsilon$，従って $A \subset U_\varepsilon(A_k)$ かつ $A_k \subset U_\varepsilon(A)$ となる．さて $n \in \mathbb{N}, x \in A$ とすると，$A \subset U_\varepsilon(A_{n\vee N})$ であるから $y \in A_{n\vee N} \subset \bigcup_{k=n} A_k$ が存在して $\rho(x, y) \leq \varepsilon$ となり，よって $x \in \overline{\bigcup_{k=n} A_k}^X$. 従って $A \subset \overline{\bigcup_{k=n} A_k}^X$ であり，$n \in \mathbb{N}$ は任意だったので $A \subset \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n} A_k}^X$ となる．他方，上記の $\varepsilon \in (0, \infty)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対し $\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k \subset U_\varepsilon(A)$ なので $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}^X \subset \overline{\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k}^X \subset \overline{U_\varepsilon(A)}^X$ となり，ここで $\varepsilon \in (0, \infty)$ は任意なので $\bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}^X \subset \bigcap_{\varepsilon\in(0,\infty)} \overline{U_\varepsilon(A)}^X = \overline{A}^X = A$.

次に (X, ρ) は可分であると仮定し，$\overline{Y}^X = X$ であるような可算部分集合 $Y \subset X$ を取る．$A \in \mathcal{K}(X), \varepsilon \in (0, \infty)$ とする．このとき $A \subset \bigcup_{x\in A} B_\rho(x, \varepsilon/2)$ であるが，A はコンパクトなので A の有限部分集合 B が存在して $A \subset \bigcup_{x\in B} B_\rho(x, \varepsilon/2)$ となる．すると $B \in \mathcal{K}(X)$ であり，$B \subset A \subset U_{\varepsilon/2}(A), A \subset U_{\varepsilon/2}(B)$ となるので $\delta_\rho(A, B) \leq \varepsilon/2$. 一方，$\overline{Y}^X = X$ であることから各 $x \in B$ に対し $y_x \in Y$ が存在して $\rho(x, y_x) < \varepsilon$ となり，そこで $Z := \{y_x \mid x \in B\}$ とすると Z は Y の有限部分集合であり $B \subset U_{\varepsilon/2}(Z), Z \subset U_{\varepsilon/2}(B)$ を満たす．よって $\delta_\rho(B, Z) \leq \varepsilon/2$, 従って $\delta_\rho(A, Z) \leq \delta_\rho(A, B) + \delta_\rho(B, Z) \leq \varepsilon$. これは $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}(Y) := \{Z \mid Z$ は Y の空でない有限部分集合$\}$ が $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ において稠密であることを意味し，かつ Y が可算集合なので $\mathcal{K}_{\mathrm{fin}}(Y)$ も可算集合である．よって (X, ρ) が可分のとき $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ も可分である．

最後に (X, ρ) は完備と仮定し $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ の完備性を示す．$\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{K}(X)$ を $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ における Cauchy 列とし，$n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n := \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k}^X$ とおく．こ

のとき B_n は X のコンパクト集合であることを示そう．$\varepsilon \in (0,\infty)$ とする．$N \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $m,k \geq N$ に対し $\delta_\rho(A_m, A_k) < \varepsilon/2$, よって $A_k \subset U_{\varepsilon/2}(A_m)$ となる．A_N はコンパクトで $A_N \subset \bigcup_{x\in A_N} B_\rho(x,\varepsilon/2)$ なので，A_N の有限部分集合 P が存在して $A_N \subset \bigcup_{x\in P} B_\rho(x,\varepsilon/2)$ となり，これにより任意の $k \geq N$ に対し $A_k \subset U_{\varepsilon/2}(A_N) \subset \bigcup_{x\in P} B_\rho(x,\varepsilon)$. $1 \leq k < N$ に対しては A_k のコンパクト性より A_k の有限部分集合 P_k を $A_k \subset \bigcup_{x\in P_k} B_\rho(x,\varepsilon)$ となるように選べるので，$P_0 := P \cup \bigcup_{1\leq k<N} P_k$ とおけば P_0 は $\bigcup_{k=1}^N A_k$ の有限部分集合で $\bigcup_{n=1}^\infty A_n \subset \bigcup_{x\in P_0} B_\rho(x,\varepsilon)$, 従って $B_n \subset B_1 \subset U_\varepsilon(P_0)$ となる．これは B_n が距離 ρ について全有界であることを意味し，また B_n は完備距離空間 (X,ρ) の閉集合であるからそれ自身距離 ρ について完備である．よって B_n は ρ について全有界かつ完備，従ってコンパクトである．

今，任意の $n \in \mathbb{N}$ について $B_n \in \mathcal{K}(X)$, かつ明らかに $B_{n+1} \subset B_n$ であるから，$A := \bigcap_{n=1}^\infty B_n$ とすると $A \in \mathcal{K}(X)$ である．前段落の $\varepsilon \in (0,\infty)$ と $N \in \mathbb{N}$ に対し，$k \geq m \geq N$ ならば $A_k \subset U_{\varepsilon/2}(A_m)$ であるので $A \subset B_m \subset \overline{U_{\varepsilon/2}(A_m)}^X \subset U_\varepsilon(A_m)$. 他方 $B_1 \subset (X \setminus A) \cup \bigcup_{x\in A} B_\rho(x,\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^\infty (X \setminus B_n) \cup \bigcup_{x\in A} B_\rho(x,\varepsilon)$ と B_1 のコンパクト性から有限集合 $I \subset \mathbb{N}$ と $P \subset A$ が存在して $B_1 \subset \bigcup_{n\in I}(X \setminus B_n) \cup \bigcup_{x\in P} B_\rho(x,\varepsilon) \subset U_\varepsilon(A) \cup \bigcup_{n\in I}(X\setminus B_n)$ となり，$I = \emptyset$ のときは $B_1 \subset U_\varepsilon(A)$, $I \neq \emptyset$ のときは $B_{\max I} \subset B_1 \subset (X \setminus B_{\max I}) \cup U_\varepsilon(A)$ より $B_{\max I} \subset U_\varepsilon(A)$ となる．よっていずれにしても $N_0 \in \mathbb{N}$ が存在して $B_{N_0} \subset U_\varepsilon(A)$ となり，従って任意の $m \geq N_0$ に対し $A_m \subset B_m \subset B_{N_0} \subset U_\varepsilon(A)$. ゆえに任意の $n \geq N \vee N_0$ に対し $\delta_\rho(A_m, A) \leq \varepsilon$ であるので，$\lim_{n\to\infty} \delta_\rho(A_n, A) = 0$ が得られ，よって $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ は完備である．□

後は $\mathcal{K}(X) \ni A \mapsto \bigcup_{i\in S} f_i(A) =: \Phi(A)$ が $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ 上の縮小写像を定めることを示せばよい．まず次の 2 つの補題を示そう．

補題 1.8. (X,ρ) を距離空間とするとき，$A_1, A_2, B_1, B_2 \in \mathcal{K}(X)$ に対し

$$\delta_\rho(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq \delta_\rho(A_1, B_1) \vee \delta_\rho(A_2, B_2). \tag{1.6}$$

証明. $s \in (\delta_\rho(A_1,B_1) \vee \delta_\rho(A_2,B_2), \infty)$ とすると $i \in \{1,2\}$ に対し $A_i \subset U_s(B_i)$ かつ $B_i \subset U_s(A_i)$. すると容易に $A_1 \cup A_2 \subset U_s(B_1 \cup B_2)$ および $B_1 \cup B_2 \subset U_s(A_1 \cup A_2)$ が分かり，よって $\delta_\rho(A_1 \cup A_2, B_1 \cup B_2) \leq s$ となる．これより (1.6) が従う．□

補題 1.9. (X,ρ) を距離空間，$f : X \to X$ を (X,ρ) 上の縮小写像とし，定義 1.2-(1) のように $\alpha \in (0,1)$ を取るとき，$A, B \in \mathcal{K}(X)$ に対し $\delta_\rho(f(A), f(B)) \leq \alpha\delta_\rho(A,B)$.

証明. まず f は連続なので $f(A), f(B) \in \mathcal{K}(X)$ であることを注意しておく．$s \in (\delta_\rho(A,B), \infty)$ とすると，$A \subset U_s(B)$ かつ $B \subset U_s(A)$ であり，これと f に対する仮定から容易に $f(A) \subset U_{\alpha s}(f(B))$ かつ $f(B) \subset U_{\alpha s}(f(A))$ であることが分かる．よって $\delta_\rho(f(A), f(B)) \leq \alpha s$, ゆえに $\delta_\rho(f(A), f(B)) \leq \alpha\delta_\rho(A,B)$ となる．□

命題 1.10. (X,ρ) を距離空間，S を空でない有限集合とし，$i \in S$ に対し $f_i : X \to X$ を (X,ρ) 上の縮小写像とする．$A \in \mathcal{K}(X)$ に対し $\Phi(A) := \bigcup_{i\in S} f_i(A)$ とおくと $\Phi(A) \in \mathcal{K}(X)$ であり，$\Phi : \mathcal{K}(X) \to \mathcal{K}(X)$ は $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ 上の縮小写像である．

証明. まず，$A \in \mathcal{K}(X)$ に対し $\Phi(A) = \bigcup_{i \in S} f_i(A)$ は X のコンパクト集合の有限個の和集合なのでコンパクトであり，よって $\Phi(A) \in \mathcal{K}(X)$ である．各 $i \in S$ に対し，f_i が定義 1.2-(1) の条件を満たすように $\alpha_i \in (0,1)$ を取る．このとき $A, B \in \mathcal{K}(X)$ に対し補題 1.8 と補題 1.9 を順に用いると

$$\begin{aligned} \delta_\rho(\Phi(A), \Phi(B)) &= \delta_\rho\big(\textstyle\bigcup_{i \in S} f_i(A), \bigcup_{i \in S} f_i(B)\big) \\ &\leq \max_{i \in S} \delta_\rho(f_i(A), f_i(B)) \leq \big(\max_{i \in S} \alpha_i\big)\delta_\rho(A, B). \end{aligned} \tag{1.7}$$

$\max_{i \in S} \alpha_i \in (0,1)$ なので，(1.7) より Φ は $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ 上の縮小写像である． □

定理 1.4 の証明. 定理 1.7 より $(\mathcal{K}(X), \delta_\rho)$ は完備距離空間であり，命題 1.10 より Φ はその上の縮小写像である．よって定理 1.3 により，$\Phi(K) = K$ すなわち (1.2) を満たす $K \in \mathcal{K}(X)$ が唯 1 つ存在する．さらに任意の $A \in \mathcal{K}(X)$ に対し，定理 1.3 の後半の主張から $\lim_{n\to\infty} \delta_\rho(\Phi^n(A), K) = 0$ となり，よって定理 1.7 より $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} \overline{\bigcup_{k=n}^{\infty} \Phi^k(A)}^X$．最後の主張は $A \subset \Phi(A)$ ならば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\Phi^n(A) \subset \Phi^{n+1}(A)$ であり，また $\Phi(A) \subset A$ ならば任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\Phi^{n+1}(A) \subset \Phi^n(A)$ となることと (1.3) から従う． □

1.2　シフト空間と自己相似集合

本節では，自己相似集合の位相構造を記述するための基本的な道具として（片側）シフト空間を導入する．本節の定理 1.14 から分かるように，自己相似集合は実は位相空間としてはシフト空間の商空間として実現される．

まず，本稿を通して使われる基本的な記号を準備する，

定義 1.11. S を空でない有限集合とする．
(1) $m \in \mathbb{N}$ に対し $W_m(S) := S^m = \{w_1 \dots w_m \mid$ 各 $i \in \{1, \dots, m\}$ に対し $w_i \in S\}$ とし，$W_0(S) := \{\emptyset\}$ とする．ここで $\emptyset$ は**空語** (empty word) と呼ばれる特別な元である．さらに $W_*(S) := \bigcup_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}} W_m(S)$ とおく．各 $w \in W_*(S)$ は**語** (word) と呼ばれる．語 $w \in W_*(S)$ に対し，$w \in W_m(S)$ となる唯 1 つの $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $|w|$ で表し w の長さという．$w, v \in W_*(S), w = w_1 \dots w_m, v = v_1 \dots v_n$ に対し $wv \in W_*(S)$ を $wv := w_1 \dots w_m v_1 \dots v_n$ ($w\emptyset := w, \emptyset v := v$) で定め，さらに容易に分かるように $w, v, u \in W_*(S)$ に対し $(wv)u = w(vu)$ であることに注意して，$k \geq 3$ と $\{w^{(j)}\}_{j=1}^k \subset W_*(S)$ に対し帰納的に $w^{(1)} \dots w^{(k)} := (w^{(1)} \dots w^{(k-1)})w^{(k)}$ と定める．$w \in W_*(S), n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $w^n := w \dots w$（n 個の w の積）とおく．
(2) $\Sigma(S) := S^{\mathbb{N}} = \{\omega_1\omega_2\omega_3 \dots \mid$ 各 $i \in \mathbb{N}$ に対し $\omega_i \in S\}$ と定める．S を離散位相により位相空間とし，$\Sigma(S) = S^{\mathbb{N}}$ は常に S の直積空間としての積位相により位相空間と見なすものとする．$\Sigma(S)$ を**（片側）シフト空間** ((one-sided) shift space) という．シフト写像 $\sigma : \Sigma(S) \to \Sigma(S)$ を $\sigma(\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) := \omega_2\omega_3\omega_4 \dots$ で定義し，また $i \in S$ に対し $\sigma_i : \Sigma(S) \to \Sigma(S)$ を $\sigma_i(\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) := i\omega_1\omega_2\omega_3 \dots$ で定める．$\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \dots \in \Sigma(S)$ と $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $[\omega]_m := \omega_1 \dots \omega_m \in W_m(S)$ とおく．
(3) $w = w_1 \dots w_m \in W_*(S)$ に対し $\sigma_w := \sigma_{w_1} \circ \dots \circ \sigma_{w_m}$ ($\sigma_\emptyset := \mathrm{id}_{\Sigma(S)}$), $\Sigma_w(S) := \sigma_w(\Sigma(S))$ とおき，また $w \neq \emptyset$ のとき語 w の並び $www\dots$ を自然な方法で $\Sigma(S)$ の元と見なし w^∞ とおく：$w^\infty := www \dots \in \Sigma(S)$.

注意 1.12. 単にシフト空間という場合，**両側シフト空間** (two-sided shift space) $S^{\mathbb{Z}} = \{\ldots\omega_{-2}\omega_{-1}\omega_0\omega_1\omega_2\ldots \mid$ 各 $i \in \mathbb{Z}$ に対し $\omega_i \in S\}$ を指すこともあるので注意されたい．$\Sigma(S) = S^{\mathbb{N}}$ と $S^{\mathbb{Z}}$ の区別を明示する必要がある場合に，前者を片側シフト空間，後者を両側シフト空間と呼ぶのである．本稿では片側シフト空間しか用いないので，以下単にこれをシフト空間と呼ぶ．

実は $\Sigma(S)$ を適当な距離で距離付けることにより，各 $i \in S$ に対し σ_i が $\Sigma(S)$ 上の相似縮小であり，$\Sigma(S)$ が $\{\sigma_i\}_{i\in S}$ から決まる自己相似集合であるようにすることができる．すなわち次の定理が成り立つ．

定理 1.13. S を空でない有限集合とし，$\alpha \in (0,1)$ とする．$\omega,\tau \in \Sigma(S)$ に対し，$\omega = \tau$ のとき $\delta_\alpha(\omega,\tau) := 0$, $\omega \neq \tau$ のとき $\delta_\alpha(\omega,\tau) := \alpha^{\min\{m\in\mathbb{N}\mid[\omega]_m\neq[\tau]_m\}-1}$ とおく．このとき δ_α は $\Sigma(S)$ 上の距離関数であり，任意の $\omega,\tau,\kappa \in \Sigma(S)$ に対し $\delta_\alpha(\omega,\tau) \leq \delta_\alpha(\omega,\kappa)\vee\delta_\alpha(\kappa,\tau)$ を満たす．さらに $(\Sigma(S),\delta_\alpha)$ はコンパクト，各 $i \in S$ に対し σ_i は相似率 α の $(\Sigma(S),\delta_\alpha)$ 上の相似縮小であり，$\Sigma(S)$ は $\{\sigma_i\}_{i\in S}$ から決まる自己相似集合である．

証明. $\omega,\tau,\kappa \in \Sigma(S)$ とする．明らかに $\delta_\alpha(\omega,\tau) = \delta_\alpha(\tau,\omega) \in [0,1]$ であり，また $\omega = \tau$ と $\delta_\alpha(\omega,\tau) = 0$ とは同値である．さらに $\min\{m \in \mathbb{N} \mid [\omega]_m \neq [\tau]_m\} \geq \min\{m \in \mathbb{N} \mid [\omega]_m \neq [\kappa]_m\} \wedge \min\{m \in \mathbb{N} \mid [\kappa]_m \neq [\tau]_m\}$（ただし $\min\emptyset := \infty$）であることから $\delta_\alpha(\omega,\tau) \leq \delta_\alpha(\omega,\kappa) \vee \delta_\alpha(\kappa,\tau) \leq \delta_\alpha(\omega,\kappa) + \delta_\alpha(\kappa,\tau)$ が得られる．よって δ_α は $\Sigma(S)$ 上の距離関数である．

次に $(\Sigma(S),\delta_\alpha)$ がコンパクトであることを示す．その為には任意の $\{\omega^n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \Sigma(S)$ が $(\Sigma(S),\delta_\alpha)$ において収束する部分列を持つことを示せばよい．$m \in \mathbb{N}$ とし，狭義単調増加列 $\{n(m-1,k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ が与えられたとする．このとき $w^{(m)} \in W_m(S)$ と狭義単調増加列 $\{n(m,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を次のように選ぶ．まず $W_m(S)$ は有限集合なので，$\{k \in \mathbb{N} \mid [\omega^{n(m-1,k)}]_m = w^{(m)}\}$ が無限集合であるように $w^{(m)} \in W_m(S)$ を選ぶことができ，そこで $\{n(m,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ を，無限集合 $\{n(m-1,k) \mid k \in \mathbb{N}, [\omega^{n(m-1,k)}]_m = w^{(m)}\}$ の元を小さいものから順に並べたものとして定める．$w^{(0)} := \emptyset \in W_0(S)$, また $\{n(0,k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ を $n(0,k) := k$ で定めて上記の選出を帰納的に行うことにより，各 $m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $w^{(m)} \in W_m$ と狭義単調増加列 $\{n(m,k)\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ が得られ，これらは任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $[\omega^{n(m,k)}]_m = w^{(m)}$ を満たし，かつ $\{n(m,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ は $\{n(m-1,k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ の部分列である．すると特に各 $m \in \mathbb{N}$ に対し，$[\omega^{n(m,1)}]_m = w^{(m)}, [\omega^{n(m,1)}]_{m-1} = w^{(m-1)}$ なので，$w^{(m)} = w^{(m-1)}\omega_m$ となる $\omega_m \in S$ が存在する．$\omega \in \Sigma(S)$ を $\omega := \omega_1\omega_2\omega_3\ldots$ で定め，$k \in \mathbb{N}$ に対し $n_k := n(k,k)$ とおけば $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$ は狭義単調増加列であって，$k \in \mathbb{N}$ とすると $[\omega^{n_k}]_k = [\omega^{n(k,k)}]_k = w^{(k)} = \omega_1\ldots\omega_k = [\omega]_k$, 従って $\delta_\alpha(\omega^{n_k},\omega) \leq \alpha^k$ となるので $\lim_{k\to\infty}\delta_\alpha(\omega^{n_k},\omega) = 0$. よって $(\Sigma(S),\delta_\alpha)$ はコンパクトである．

各 $i \in S$ に対し σ_i が相似率 α の $(\Sigma(S),\delta_\alpha)$ 上の相似縮小であることは δ_α の定義から明らかであり，また $\Sigma(S) = \bigcup_{i\in S}\{\omega_1\omega_2\omega_3\ldots \in \Sigma(S) \mid \omega_1 = i\} = \bigcup_{i\in S}\sigma_i(\Sigma(S))$ であるので，$\Sigma(S)$ は $\{\sigma_i\}_{i\in S}$ から決まる自己相似集合である． □

演習 1.2. S を空でない有限集合とし，$\alpha \in (0,1)$ とする．このとき定理 1.13 の距離関数 δ_α が $\Sigma(S) = S^{\mathbb{N}}$ の積位相を距離付けていること，すなわち $\Sigma(S) = S^{\mathbb{N}}$ の積位相が距離関数 δ_α から定まる $\Sigma(S)$ の位相と一致することを示せ．

一般の自己相似集合とシフト空間は次の定理により関係付けられる．

定理 1.14. (X, ρ) を完備距離空間，S を空でない有限集合とし，$i \in S$ に対し $f_i : X \to X$ を (X, ρ) 上の縮小写像とする．K を $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる自己相似集合とし，$i \in S$ に対し $F_i := f_i|_K : K \to K$, さらに $w = w_1 \ldots w_m \in W_*(S)$ に対し $F_w := F_{w_1} \circ \cdots \circ F_{w_m}$ $(F_\emptyset := \mathrm{id}_K)$, $K_w := F_w(K)$ とおく．このとき，任意の $\omega \in \Sigma(S)$ に対して $\#\bigl(\bigcap_{m=1}^\infty K_{[\omega]_m}\bigr) = 1$ であり，$\pi(\omega) \in K$ を $\bigcap_{m=1}^\infty K_{[\omega]_m}$ の唯 1 つの元として定めると $\pi : \Sigma(S) \to K$ は連続な全射である．さらに任意の $i \in S$ に対し $F_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$.

証明. $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \in \Sigma(S), n \in \mathbb{N}$ とする．このとき K が X の空でないコンパクト集合なので $K_{[\omega]_n} = F_{[\omega]_n}(K)$ も X の空でないコンパクト集合であり，また $K_{[\omega]_{n+1}} = F_{[\omega]_n}(K_{\omega_{n+1}}) \subset F_{[\omega]_n}(K) = K_{[\omega]_n}$, よって $\{K_{[\omega]_m}\}_{m \in \mathbb{N}}$ は X の空でないコンパクト集合の非増加列となるので $\bigcap_{m=1}^\infty K_{[\omega]_m} \neq \emptyset$. また各 $i \in S$ に対し f_i が定義 1.2-(1) の条件を満たすように $\alpha_i \in (0, 1)$ を取ると，$x, y \in K$ に対し容易に $\rho(F_{[\omega]_n}(x), F_{[\omega]_n}(y)) \leq \alpha_{\omega_1} \cdots \alpha_{\omega_n} \rho(x, y)$ がわかるので $\mathrm{diam}_\rho\bigl(\bigcap_{m=1}^\infty K_{[\omega]_m}\bigr) \leq \mathrm{diam}_\rho K_{[\omega]_n} \leq \alpha_{\omega_1} \ldots \alpha_{\omega_n} \mathrm{diam}_\rho K$ となり，$n \to \infty$ として $\mathrm{diam}_\rho\bigl(\bigcap_{m=1}^\infty K_{[\omega]_m}\bigr) = 0$ を得る．よって $\#\bigl(\bigcap_{m=1}^\infty K_{[\omega]_m}\bigr) = 1$ である．

$\varepsilon \in (0, \infty)$ とし，$m \in \mathbb{N}$ を $\alpha_{\omega_1} \cdots \alpha_{\omega_m} \mathrm{diam}_\rho K \leq \varepsilon$ となるように取る．$\tau \in \Sigma_{[\omega]_m}(S)$ とすると，$[\omega]_m = [\tau]_m$ なので $\pi(\omega), \pi(\tau) \in K_{[\omega]_m}$ であり，従って $\rho(\pi(\omega), \pi(\tau)) \leq \alpha_{\omega_1} \cdots \alpha_{\omega_m} \mathrm{diam}_\rho K \leq \varepsilon$. $\Sigma_{[\omega]_m}(S)$ は $\Sigma(S)$ における ω の開近傍なので，これは $\pi : \Sigma(S) \to K$ が ω において連続であることを示している．よって π は連続である．

$i \in S$ とすると，$F_i(\pi(\omega)) \in K_i = K_{[\sigma_i(\omega)]_1}$, また任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し $F_i(\pi(\omega)) \in F_i(K_{[\omega]_m}) = K_{[\sigma_i(\omega)]_{m+1}}$ であるので $F_i(\pi(\omega)) \in \bigcap_{m=1}^\infty K_{[\sigma_i(\omega)]_m}$, よって $F_i(\pi(\omega)) = \pi(\sigma_i(\omega))$ となり，従って $F_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$.

定理 1.13（と演習 1.2）より $\Sigma(S)$ はコンパクトであるので，π の連続性より $\pi(\Sigma(S))$ は X の空でないコンパクト集合であり，また $\bigcup_{i \in S} f_i(\pi(\Sigma(S))) = \bigcup_{i \in S} F_i(\pi(\Sigma(S))) = \bigcup_{i \in S} \pi(\sigma_i(\Sigma(S))) = \pi\bigl(\bigcup_{i \in S} \Sigma_i(S)\bigr) = \pi(\Sigma(S))$ となる．すなわち $\pi(\Sigma(S))$ は $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる自己相似集合であり，その一意性（定理 1.4）から $K = \pi(\Sigma(S))$. つまり $\pi : \Sigma(S) \to K$ は全射である． □

演習 1.3. X をコンパクト位相空間，Y を Hausdorff 位相空間，$f : X \to Y$ を連続な全射とするとき，f は商写像であること，すなわち Y の開集合系は $\{A \subset Y \mid f^{-1}(A)$ は X の開集合$\}$ に等しいことを示せ．（これより特に定理 1.14 の $\pi : \Sigma(S) \to K$ が商写像であることがわかる．）

1.3　自己相似構造

フラクタル自身を状態空間としてその上で解析学を展開するという立場からは，フラクタルの位相構造だけが本質的である．例えば Koch 曲線上の現象を考える場合，Koch 曲線と単位区間 $[0, 1]$ の間には（後に例 1.32 でも見るように）自然な同相写像が存在し，それを通して Koch 曲線上の現象は対応する $[0, 1]$ 上の現象に容易に翻訳できるので，Koch 曲線の代わりに $[0, 1]$ を考えておけば事足りる．

自己相似集合の幾何学的構造を純粋にその位相構造だけに着目して記述するために木上 [18] により導入されたのが，次に定義する自己相似構造の概念である．

定義 1.15 (自己相似構造)**.** K を距離化可能なコンパクト位相空間，S を空でない有限集合とし，各 $i \in S$ に対し $F_i : K \to K$ を連続な単射とする．$w = w_1 \dots w_m \in W_*(S)$ に対し $F_w := F_{w_1} \circ \dots \circ F_{w_m}$ ($F_\emptyset := \mathrm{id}_K$), $K_w := F_w(K)$ と定める．

連続な全射 $\pi : \Sigma(S) \to K$ が存在して任意の $i \in S$ に対して $F_i \circ \pi = \pi \circ \sigma_i$ となるとき，$\mathcal{L} := (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ は**自己相似構造** (self-similar structure) であるといい，$\pi : \Sigma(S) \to K$ を $\mathcal{L}$ に対応する**自然な射影** (canonical projection) という．

命題 1.16. $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ を自己相似構造とする．このとき任意の $\omega \in \Sigma(S)$ に対し $\{\pi(\omega)\} = \bigcap_{m=1}^{\infty} K_{[\omega]_m}$ であり，特に $\mathcal{L}$ に対応する自然な射影 $\pi : \Sigma(S) \to K$ は一意的に定まる．

証明. $\omega \in \Sigma(S)$ とする．$w = w_1 \dots w_m \in W_*(S)$ に対し自己相似構造の定義から容易に $F_w \circ \pi = \pi \circ \sigma_w$ が従うので，$m \in \mathbb{N}$ に対し $\pi(\omega) = \pi(\sigma_{[\omega]_m}(\sigma^m(\omega))) = F_{[\omega]_m}(\pi(\sigma^m(\omega))) \in K_{[\omega]_m}$ となり，よって $\pi(\omega) \in \bigcap_{m=1}^{\infty} K_{[\omega]_m}$.

一方 $x \in K \setminus \{\pi(\omega)\}$ とすると，$K \setminus \{x\}$ は K における $\pi(\omega)$ の開近傍なので，π の連続性から $n \in \mathbb{N}$ が存在して $\Sigma_{[\omega]_n}(S) \subset \pi^{-1}(K \setminus \{x\})$ となり，よって π の全射性により $K_{[\omega]_n} = F_{[\omega]_n}(\pi(\Sigma(S))) = \pi(\sigma_{[\omega]_n}(\Sigma(S)) = \pi(\Sigma_{[\omega]_n}(S)) \subset K \setminus \{x\}$ となるので $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_{[\omega]_m} \subset K_{[\omega]_n} \subset K \setminus \{x\}$. すなわち任意の $x \in K \setminus \{\pi(\omega)\}$ に対し $x \notin \bigcap_{m=1}^{\infty} K_{[\omega]_m}$ となり，よって $\bigcap_{m=1}^{\infty} K_{[\omega]_m} \subset \{\pi(\omega)\}$. □

注意 1.17. 実は定義 1.15 において,「K は距離化可能なコンパクト位相空間」の仮定を「K は Hausdorff 位相空間」に弱めても同値な定義が得られる．実際，距離化可能なコンパクト位相空間 X から Hausdorff 位相空間 Y への連続な全射 $f : X \to Y$ があるとき Y はコンパクトかつ距離化可能であることが証明できる．この事実の証明は例えば Bourbaki [8, Chapter IX, §2, no. 10, Proposition 17] を参照のこと．

定義 1.18. (X, ρ) を完備距離空間，S を空でない有限集合とし，$i \in S$ に対し $f_i : X \to X$ は単射でありかつ (X, ρ) 上の縮小写像であるとする．K を $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる自己相似集合とし，$i \in S$ に対し $F_i := f_i|_K : K \to K$ とおく．このとき定理 1.14 によって $\mathcal{L} := (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ は自己相似構造である．この $\mathcal{L}$ を $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる自己相似構造という．

定義 1.19. $j = 1, 2$ に対し $\mathcal{L}_j = \bigl(K^{(j)}, S^{(j)}, \{F_i^{(j)}\}_{i \in S^{(j)}}\bigr)$ を自己相似構造とし，π_j を $\mathcal{L}_j$ に対応する自然な射影とする．$\varphi : S^{(1)} \to S^{(2)}$ に対し，$\iota_\varphi : \Sigma(S^{(1)}) \to \Sigma(S^{(2)})$ を $\iota_\varphi(\omega_1\omega_2\omega_3 \dots) := \varphi(\omega_1)\varphi(\omega_2)\varphi(\omega_3) \dots$ で定める．全単射 $\varphi : S^{(1)} \to S^{(2)}$ が存在して，$\omega, \tau \in \Sigma(S^{(1)})$ に対し $\pi_1(\omega) = \pi_1(\tau)$ と $\pi_2(\iota_\varphi(\omega)) = \pi_2(\iota_\varphi(\tau))$ が同値になるとき，$\mathcal{L}_2$ は $\mathcal{L}_1$ に**同型** (isomorphic) であるという．

明らかに「$\mathcal{L}_2$ が $\mathcal{L}_1$ に同型」という関係は自己相似構造の間の同値関係である．同型な 2 つの自己相似構造は位相空間として実質的に同一であると見なすことができる．実際，次が成り立つ．

命題 1.20. $j = 1, 2$ に対し $\mathcal{L}_j = \bigl(K^{(j)}, S^{(j)}, \{F_i^{(j)}\}_{i \in S^{(j)}}\bigr)$ を自己相似構造とし，π_j を $\mathcal{L}_j$ に対応する自然な射影とする．このとき $\mathcal{L}_2$ が $\mathcal{L}_1$ に同型であるためには，全単射 $\varphi : S^{(1)} \to S^{(2)}$ と同相写像 $f : K^{(1)} \to K^{(2)}$ が存在して $\pi_2 \circ \iota_\varphi = f \circ \pi_1$ となることが必要十分である．

証明. 十分性は明らかであるから，必要性を示そう．定義 1.19 の性質を満たす全単射 $\varphi : S^{(1)} \to S^{(2)}$ が与えられたとする．$f : K^{(1)} \to K^{(2)}$ を，$x \in K^{(1)}$ に対し，

$\omega \in \pi_1^{-1}(x)$ を任意に取って $f(x) := \pi_2(\iota_\varphi(\omega))$ とおくことで定める．ここで右辺の $\pi_2(\iota_\varphi(\omega))$ が $\omega \in \pi_1^{-1}(x)$ に依存しないことは φ に対する仮定から明らかであり，また定義より明らかに f は $\pi_2 \circ \iota_\varphi = f \circ \pi_1$ を満たす．さらに f は閉写像，すなわち $K^{(1)}$ の閉集合 F に対し $f(F)$ は $K^{(2)}$ の閉集合である．実際，f の定義より $f(F) = \pi_2 \circ \iota_\varphi(\pi_1^{-1}(F))$ であり，$\pi_1^{-1}(F)$ は $\Sigma(S^{(1)})$ の閉集合であるからコンパクト，$\pi_2 \circ \iota_\varphi : \Sigma(S^{(1)}) \to K^{(2)}$ は連続だから $f(F) = \pi_2 \circ \iota_\varphi(\pi_1^{-1}(F))$ もコンパクト集合の連続像として $K^{(2)}$ のコンパクト集合，特に $K^{(2)}$ の閉集合となる．

$\varphi^{-1} : S^{(2)} \to S^{(1)}$ を用いて同様に閉写像 $g : K^{(2)} \to K^{(1)}$ を定義することができ，すると定義より明らかに $g \circ f = \mathrm{id}_{K^{(1)}}$, $f \circ g = \mathrm{id}_{K^{(2)}}$ が成り立つ．よって f, g は互いに逆の全単射であり，$g = f^{-1}$ が閉写像だから f は連続，f が閉写像だから $g = f^{-1}$ も連続，よって f は同相写像である． □

以下混同の恐れがない限り，与えられた自己相似構造 $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i\in S})$ に対し π は $\mathcal{L}$ に対応する自然な射影 $\pi : \Sigma(S) \to K$ を表すものとし，一々断らない．

次の定義は自己相似構造の位相構造を記述する際に本質的な役割を果たす．

定義 1.21 (臨界集合，後臨界集合)**.** $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i\in S})$ を自己相似構造とする．$C_{\mathcal{L},K} \subset K$ と $\mathcal{C}_\mathcal{L}, \mathcal{P}_\mathcal{L} \subset \Sigma(S)$ を

$$C_{\mathcal{L},K} := \bigcup_{i,j\in S, i\neq j} (K_i \cap K_j), \quad \mathcal{C}_\mathcal{L} := \pi^{-1}(C_{\mathcal{L},K}), \quad \mathcal{P}_\mathcal{L} := \bigcup_{n=1}^{\infty} \sigma^n(\mathcal{C}_\mathcal{L}) \tag{1.8}$$

で定義する．$\mathcal{C}_\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ の**臨界集合 (critical set)**, $\mathcal{P}_\mathcal{L}$ を $\mathcal{L}$ の**後臨界集合 (post-critical set)** と呼ぶ．さらに $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $V_m(\mathcal{L}) \subset K$ を帰納的に

$$V_0(\mathcal{L}) := \pi(\mathcal{P}_\mathcal{L}), \quad V_{m+1}(\mathcal{L}) := \bigcup_{i\in S} F_i(V_m(\mathcal{L})) \tag{1.9}$$

で定義し，$V_*(\mathcal{L}) := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m(\mathcal{L})$ とおく．

注意 1.22. 上の「臨界集合」「後臨界集合」および後の定義 1.28-(1) の「後臨界有限」は筆者が便宜上付した和訳であり，標準的な訳語として定着したものではないし，このような訳語が使われているのを見たこともない．本講義中でも口頭では専ら英語の “critical set”, “post-critical set”, “post-critically finite (p.-c.f.)”を用いる．

以下混同の恐れがない限り，与えられた空でない有限集合 S に対し $W_m(S)$, $W_*(S)$, $\Sigma(S)$, $\Sigma_w(S)$ をそれぞれ単に $W_m, W_*, \Sigma, \Sigma_w$ と記し，また与えられた自己相似構造 $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i\in S})$ に対し $C_{\mathcal{L},K}, \mathcal{C}_\mathcal{L}, \mathcal{P}_\mathcal{L}, V_m(\mathcal{L}), V_*(\mathcal{L})$ をそれぞれ単に $C_K, \mathcal{C}, \mathcal{P}, V_m, V_*$ と記す．

例 1.23. $\mathbb{R}$ 上の相似縮小 $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_1(x) := x/2$, $f_2(x) := (x+1)/2$ で定めるとき，明らかに $[0,1] = f_1([0,1]) \cup f_2([0,1])$ であるので $K := [0,1]$ は $\{f_i\}_{i\in\{1,2\}}$ から決まる自己相似集合であり，$i \in \{1,2\}$ に対し $F_i := f_i|_K$ とおくと定理 1.14 により $\mathcal{L} := (K, \{1,2\}, \{F_i\}_{i\in\{1,2\}})$ は自己相似構造である．$i \in \{1,2\}$ に対し $F_i(\pi(i^\infty)) = \pi(i^\infty)$ なので定理 1.3 の一意性の主張から $\pi(1^\infty) = 0, \pi(2^\infty) = 1$ であり，さらに $1 \notin K_1$, $0 \notin K_2$ から容易に $\pi^{-1}(0) = \{1^\infty\}, \pi^{-1}(1) = \{2^\infty\}$ が分かる．また明らかに $1/2 = F_1(\pi(2^\infty)) = F_2(\pi(1^\infty)), C_K = K_1 \cap K_2 = \{1/2\}$. そこで $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \in \pi^{-1}(1/2)$ とするとき，$\omega_1 = 1$ ならば $F_1(1) = 1/2 =$

$F_1(\pi(\sigma(\omega)))$ なので $\pi(\sigma(\omega)) = 1$, よって $\sigma(\omega) = 2^\infty$, $\omega = 12^\infty$ となり，また $\omega_1 = 2$ ならば $F_2(0) = 1/2 = F_2(\pi(\sigma(\omega)))$ なので $\pi(\sigma(\omega)) = 0$, よって $\sigma(\omega) = 1^\infty, \omega = 21^\infty$ となる．ゆえに $\mathcal{C} = \pi^{-1}(C_K) = \pi^{-1}(1/2) = \{12^\infty, 21^\infty\}$ であり，従って $\mathcal{P} = \{1^\infty, 2^\infty\}, V_0 = \{0,1\}, V_1 = \{0, 1/2, 1\}$.

より一般に $x \in K$ が $\#\pi^{-1}(x) \geq 2$ を満たすとき，ある $w \in W_*$ が存在して $\pi^{-1}(x) = \{w12^\infty, w21^\infty\}$ となる．実際，$\omega, \tau \in \pi^{-1}(x), \omega \neq \tau$ とすると，$n := \min\{m \in \mathbb{N} \mid [\omega]_m \neq [\tau]_m\} - 1$, $w := [\omega]_n$ とおけば $x = F_w(\pi(\sigma^n(\omega))) = F_w(\pi(\sigma^n(\tau)))$, F_w の単射性より $\pi(\sigma^n(\omega)) = \pi(\sigma^n(\tau)) \in C_K$ となり，よって $\{\sigma^n(\omega), \sigma^n(\tau)\} = \{12^\infty, 21^\infty\}$, $\{\omega, \tau\} = \sigma_w(\{12^\infty, 21^\infty\}) = \{w12^\infty, w21^\infty\}$. そこでさらに $u \in \pi^{-1}(x)$ とすれば同様にしてある $v \in W_*$ により $\{u, w12^\infty\} = \{v12^\infty, v21^\infty\}$ もしくは $\{u, w21^\infty\} = \{v12^\infty, v21^\infty\}$ となるが，このとき $v = w$ でなければならず，従って $u \in \{w12^\infty, w21^\infty\}$, よって $\pi^{-1}(x) = \{w12^\infty, w21^\infty\}$.

なお，このとき $\mathcal{L}$ に対応する自然な射影 π は「2 進小数展開」$\widetilde{\pi}(\omega_1\omega_2\omega_3\ldots) := \sum_{m=1}^\infty (\omega_m - 1)2^{-m}$ で与えられる．実際容易に分かるように，$\widetilde{\pi} : \Sigma \to K$ は連続な全射で $i \in \{1,2\}$ に対し $F_i \circ \widetilde{\pi} = \widetilde{\pi} \circ \sigma_i$ を満たすので，命題 1.16 により $\widetilde{\pi} = \pi$.

本節においては以後，$\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i\in S})$ を与えられた自己相似構造とする．定義 1.21 の集合のうち $\mathcal{P}$ と V_0 が自己相似構造の位相的性質を取り扱う上で特に重要である．次の命題 1.24-(2) の意味で，V_0 は K の**「境界」**と見なされる．$|w| \leq |v|$ を満たす $w, v \in W_*$ に対し，$\Sigma_w \cap \Sigma_v \neq \emptyset$ となる為には $\tau \in W_*$ が存在して $v = w\tau$ となることが必要十分であることを注意しておく．

命題 1.24. (1) $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\sigma^m(\pi^{-1}(V_m)) = \mathcal{P}$ であり，特に $\pi^{-1}(V_0) = \mathcal{P}$.
(2) $w, v \in W_*, \Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset$ ならば $K_w \cap K_v = F_w(V_0) \cap F_v(V_0)$. また，$B \subset K$ が $\Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset$ であるような任意の $w, v \in W_*$ に対し $K_w \cap K_v = F_w(B) \cap F_v(B)$ を満たす為には，$V_0 \subset B$ であることが必要十分である．
(3) $V_0 = \emptyset$ であることは自然な射影 $\pi : \Sigma \to K$ が単射であることと同値である．
(4) 任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $V_m \subset V_{m+1}$. また $V_0 \neq \emptyset$ ならば $\overline{V_*}^K = K$.

証明. (2) $w, v \in W_*$, $\Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset$ とする．$F_w(V_0) \subset K_w$, $F_v(V_0) \subset K_v$ なので $F_w(V_0) \cap F_v(V_0) \subset K_w \cap K_v$. 逆に $x \in K_w \cap K_v$ とすると，ある $\omega, \tau \in \Sigma$ により $x = F_w(\pi(\omega)) = F_v(\pi(\tau))$ となり，$w = w_1 \ldots w_m \in W_m, v = v_1 \ldots v_n \in W_n$ とすると $\Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset$ により，$m \wedge n \geq 1$ かつある $j \in \{1, \ldots, m \wedge n\}$ に対し $w_j \neq v_j$. そこで $k := \min\{j \in \{1, \ldots, m \wedge n\} \mid w_j \neq v_j\}$ とおくと，$F_{w_1\ldots w_{k-1}} = F_{v_1\ldots v_{k-1}}$ の単射性から $\pi(\sigma_{w_k\ldots w_m}(\omega)) = F_{w_k\ldots w_m}(\pi(\omega)) = F_{v_k\ldots v_n}(\pi(\tau)) = \pi(\sigma_{v_k\ldots v_n}(\tau)) \in K_{w_k} \cap K_{v_k}$ となり，よって $\sigma_{w_k\ldots w_m}(\omega), \sigma_{v_k\ldots v_n}(\tau) \in \mathcal{C}$. 従って $\omega, \tau \in \mathcal{P}$ であり，これより $x = F_w(\pi(\omega)) = F_v(\pi(\tau)) \in F_w(V_0) \cap F_v(V_0)$ となる．

$B \subset K$ とする．$V_0 \subset B$ ならば前半の主張から $\Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset$ であるような任意の $w, v \in W_*$ に対し $K_w \cap K_v = F_w(B) \cap F_v(B)$. 次に B はこの性質を満たすと仮定し，$\omega \in \mathcal{P}$ とする．$\mathcal{P}$ の定義より $m \in \mathbb{N}, w = w_1 \ldots w_m \in W_m$ が存在して $\sigma_w(\omega) \in \mathcal{C}$ となり，よって $i \in S \setminus \{w_1\}, \tau \in \Sigma$ が存在して $\pi(\sigma_w(\omega)) = \pi(\sigma_i(\tau))$, すなわち $F_w(\pi(\omega)) = F_i(\pi(\tau)) \in K_w \cap K_i = F_w(B) \cap F_i(B)$ となるので F_w の単射性から $\pi(\omega) \in B$. 従って $V_0 = \pi(\mathcal{P}) \subset B$.
(1) $\omega \in \mathcal{P}$ とすると $w \in W_m$ に対し $\pi(\sigma_w(\omega)) = F_w(\pi(\omega)) \in V_m$ なので，$\sigma_w(\omega) \in \pi^{-1}(V_m)$, よって $\omega = \sigma^m(\sigma_w(\omega)) \in \sigma^m(\pi^{-1}(V_m))$.

逆に $\omega \in \sigma^m(\pi^{-1}(V_m))$ とすると，ある $w \in W_m$ により $\sigma_w(\omega) \in \pi^{-1}(V_m)$, つまり $F_w(\pi(\omega)) = \pi(\sigma_w(\omega)) \in V_m$ となるので，$v \in W_m$ と $\tau \in \mathcal{P}$ が存在して

$F_w(\pi(\omega)) = F_v(\pi(\tau))$. $w = v$ のとき，$F_w = F_v$ の単射性から $\pi(\omega) = \pi(\tau)$. $\tau \in \mathcal{P}$ なので $n \in \mathbb{N}$ と $u \in W_n$ が存在して $\sigma_u(\tau) \in \mathcal{C}$, すると $\pi(\sigma_u(\omega)) = F_u(\pi(\omega)) = F_u(\pi(\tau)) = \pi(\sigma_u(\tau)) \in C_K$ となり，よって $\sigma_u(\omega) \in \mathcal{C}$, $\omega = \sigma^n(\sigma_u(\omega) \in \mathcal{P}$. 特に $m = 0$ のときは $w = v = \emptyset$ なので以上から $\pi^{-1}(V_0) = \mathcal{P}$ が従う．$w \neq v$ のときは (2) より $F_w(\pi(\omega)) = F_v(\pi(\tau)) \in K_w \cap K_v \subset F_w(V_0)$ なので，F_w の単射性より $\pi(\omega) \in V_0$ となり $\omega \in \pi^{-1}(V_0) = \mathcal{P}$.

(3) π が単射であるとき，$i, j \in S$, $i \neq j$ に対し $K_i \cap K_j = \pi(\Sigma_i) \cap \pi(\Sigma_j) = \pi(\Sigma_i \cap \Sigma_j) = \emptyset$ となり $C_K = \emptyset$, よって $\mathcal{C} = \mathcal{P} = \emptyset$, $V_0 = \emptyset$ となる．逆に $V_0 = \emptyset$ のとき，$\omega, \tau \in \Sigma$, $\pi(\omega) = \pi(\tau)$ とすると各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $F_{[\omega]_m}(\sigma^m(\omega)) = F_{[\tau]_m}(\sigma^m(\tau)) \in K_{[\omega]_m} \cap K_{[\tau]_m} \neq \emptyset$ であるので (2) と $V_0 = \emptyset$ により $[\omega]_m = [\tau]_m$ でなければならず，よって $\omega = \tau$, すなわち π は単射である．

(4) $x \in V_m$ とすると $w \in W_m$ と $\omega = \omega_1\omega_2\omega_3 \ldots \in \mathcal{P}$ が存在して $x = F_w(\pi(\omega))$ となり，$\mathcal{P}$ の定義より $\sigma(\omega) \in \mathcal{P}$, 従って $\pi(\sigma(\omega)) \in V_0$ なので $x = F_{w\omega_1}(\pi(\sigma(\omega))) \in V_{m+1}$. $V_0 \neq \emptyset$ のとき，$\mathcal{P} \neq \emptyset$ となるので $\tau \in \mathcal{P}$ を取ることができて，このとき $x \in K$, $\omega \in \pi^{-1}(x)$ とすると各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $\pi(\sigma_{[\omega]_m}(\tau)) = F_{[\omega]_m}(\pi(\tau)) \in V_m$ であり，また Σ において $\lim_{m\to\infty} \sigma_{[\omega]_m}(\tau) = \omega$ であるから π の連続性より K において $x = \pi(\omega) = \lim_{m\to\infty} \pi(\sigma_{[\omega]_m}(\tau))$. よって $V_0 \neq \emptyset$ ならば $\overline{V_*}^K = K$. □

演習 1.4. 任意の $w \in W_*$ に対し $K_w \cap V_{|w|} = F_w(V_0)$ と $K_w \cap V_* = F_w(V_*)$ が成り立つことを示せ．

命題 1.25. ρ を K の位相に適合した K 上の距離関数とするとき

$$\lim_{m\to\infty} \max_{w\in W_m} \operatorname{diam}_\rho K_w = 0. \tag{1.10}$$

証明. $\alpha \in (0,1)$ とし，δ_α を定理 1.13 で定義した Σ 上の距離関数とする．$\pi : \Sigma \to K$ はコンパクト距離空間 (Σ, δ_α) から距離空間 (K, ρ) への連続写像であるから一様連続であり，従って $\varepsilon \in (0,\infty)$ とすると $\delta \in (0,1)$ が存在して $\delta_\alpha(\omega,\tau) \le \delta$ となる任意の $\omega, \tau \in \Sigma$ に対し $\rho(\pi(\omega), \pi(\tau)) \le \varepsilon$. そこで $\alpha^m \le \delta$ となる $m \in \mathbb{N}$ に対し，$w \in W_m$ とすると任意の $\omega, \tau \in \Sigma_w$ に対し $\delta_\alpha(\omega,\tau) \le \alpha^m \le \delta$ より $\rho(\pi(\omega), \pi(\tau)) \le \varepsilon$. $\pi(\Sigma_w) = K_w$ であるのでこれは $\operatorname{diam}_\rho K_w \le \varepsilon$ を意味し，よって $\alpha^m \le \delta$ となる $m \in \mathbb{N}$ に対し $\max_{w\in W_m} \operatorname{diam}_\rho K_w \le \varepsilon$ となり，主張が従う．□

命題 1.26. $x \in K$ とし，$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し

$$K_{m,x} := \bigcup_{w\in W_m,\, x\in K_w} K_w \tag{1.11}$$

とおく．このとき $\{K_{m,x}\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は K における x の基本近傍系をなす．

証明. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とすると，$x \in K \setminus \bigcup_{w\in W_m,\, x\notin K_w} K_w \subset K_{m,x}$ であって，$\bigcup_{w\in W_m,\, x\notin K_w} K_w$ は K のコンパクト部分集合の有限和だから K の閉集合である．よって $K_{m,x}$ は K における x の開近傍 $K \setminus \bigcup_{w\in W_m,\, x\notin K_w} K_w$ を含み，従って K における x の近傍である．ρ を K の位相に適合した K 上の距離関数とするとき，命題 1.25 より $\operatorname{diam}_\rho K_{m,x} \le 2\max_{w\in W_m} \operatorname{diam}_\rho K_w \xrightarrow{m\to\infty} 0$ であるので，K における x の任意の近傍 U に対し，$r \in (0,\infty)$ が存在して $B_\rho(x,r) \subset U$, するとさらに $m \in \mathbb{N}$ が存在して $\operatorname{diam}_\rho K_{m,x} < r$, 従って $K_{m,x} \subset B_\rho(x,r) \subset U$ となる．□

自己相似構造の実際の解析においては，各縮小像 K_i が「十分小さい」と仮定する必要性から「縮小写像」の族として $\{F_i\}_{i\in S}$ の代わりに $\{F_w\}_{w\in W_m}$ を用いることがしばしばある．次の命題はこの操作で自己相似構造の「境界構造」が保存されることを主張している．

命題 1.27. $m \in \mathbb{N}$ とする．$w \in W_m = S^m$ と $k \in \{1,\dots,m\}$ に対し w の第 k 成分を $(w)_k$ とおき $\iota_m : \Sigma(W_m) \to \Sigma = \Sigma(S)$ を

$$\iota_m(w^{(1)}w^{(2)}w^{(3)}\dots) := (w^{(1)})_1 \dots (w^{(1)})_m (w^{(2)})_1 \dots (w^{(2)})_m (w^{(3)})_1 \dots \quad (1.12)$$

で定める．このとき ι_m は同相写像，$\mathcal{L}_m := (K, W_m, \{F_w\}_{w\in W_m})$ は $\pi_m := \pi \circ \iota_m$ を対応する自然な射影とする自己相似構造であり，$\iota_m(\mathcal{P}_{\mathcal{L}_m}) = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}, V_0(\mathcal{L}_m) = V_0(\mathcal{L})$, $V_*(\mathcal{L}_m) = V_*(\mathcal{L})$.

証明. $\iota_m : \Sigma(W_m) \to \Sigma$ が同相写像であることは容易に確認でき，従って $\pi_m = \pi \circ \iota_m : \Sigma(W_m) \to K$ は連続な全射である．これと $w \in W_*$ に対し $F_w \circ \pi = \pi \circ \sigma_w$ であることから容易に，$\mathcal{L}_m = (K, W_m, \{F_w\}_{w\in W_m})$ が π_m を対応する自然な射影とする自己相似構造であることが分かる．

$w^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_m}$ とすると，$n \in \mathbb{N}, \{v^{(j)}\}_{j=1}^n \subset W_m$ と $\tau^* = \tau^{(1)}\tau^{(2)}\tau^{(3)}\dots \in \Sigma(W_m)$ が存在して $v^{(1)} \neq \tau^{(1)}$ かつ $\pi(\sigma_{v^{(1)}\dots v^{(n)}}(\iota_m(w^*))) = \pi(\iota_m(\tau^*))$ となり，$k := \min\{j \in \{1,\dots,m\} \mid (v^{(1)})_j \neq (\tau^{(1)})_j\}$ とおくと $\pi(\sigma^{k-1}(\sigma_{v^{(1)}\dots v^{(n)}}(\iota_m(w^*)))) \in K_{(v^{(1)})_k} \cap K_{(\tau^{(1)})_k}$ となるので $\sigma^{k-1}(\sigma_{v^{(1)}\dots v^{(n)}}(\iota_m(w^*))) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}}$, よって $\iota_m(w^*) \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$.

逆に $w^* \in \iota_m^{-1}(\mathcal{P}_{\mathcal{L}})$ とすると，$n \in \mathbb{N}, v = v_1 \dots v_n \in W_n$ と $\tau = \tau_1\tau_2\tau_3\dots \in \Sigma$ が存在して $v_1 \neq \tau_1$ かつ $\pi(\sigma_v(\iota_m(w^*))) = \pi(\tau)$ となり，$n = m(l-1)+k$, $l \in \mathbb{N}, k \in \{1,\dots,m\}$ と表し $u \in W_{m-k}$ を取ると $uv \in W_{ml}, \pi(\sigma_{uv}(\iota_m(w^*))) = \pi(\sigma_u(\tau)) \in K_{uv_1\dots v_k} \cap K_{u\tau_1\dots\tau_k}$ となる．すると $uv_1\dots v_k, u\tau_1\dots\tau_k$ は相異なる W_m の元であるので $\iota_m^{-1}(\sigma_{uv}(\iota_m(w^*))) \in \mathcal{C}_{\mathcal{L}_m}$ が得られ，$uv \in W_{ml}$ より uv は $W_l(W_m)$ の元と見なすことができ，かつ $l \geq 1$ であるので $w^* \in \mathcal{P}_{\mathcal{L}_m}$ が従う．

よって $\iota_m(\mathcal{P}_{\mathcal{L}_m}) = \mathcal{P}_{\mathcal{L}}$, さらに $V_0(\mathcal{L}_m) = \pi_m(\mathcal{P}_{\mathcal{L}_m}) = \pi(\iota_m(\mathcal{P}_{\mathcal{L}_m})) = \pi(\mathcal{P}_{\mathcal{L}}) = V_0(\mathcal{L})$ となり，また命題 1.24-(4) より $\{V_n(\mathcal{L})\}_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は非減少列なので $V_*(\mathcal{L}_m) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n(\mathcal{L}_m) = \bigcup_{n=0}^{\infty}\bigcup_{w\in W_{mn}} F_w(V_0(\mathcal{L})) = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_{mn}(\mathcal{L}) = V_*(\mathcal{L})$. □

命題 1.24 からも分かるように，$\mathcal{P}$ は自己相似構造の「境界構造」と密接に関係しており，$\mathcal{P}$ の構造の複雑さは自己相似構造の扱いの難しさに直結する．最も単純なのは $\mathcal{P}$ が有限となる場合であり，そのような自己相似構造を特に p.-c.f. 自己相似構造と呼ぶ．本稿で主に取り扱うのはこの範疇の自己相似構造である．

定義 1.28 (後臨界有限 (post-critically finite, p.-c.f.), 強有限，弱有限)**.**
(1) $\#\mathcal{P} < \infty$ のとき，$\mathcal{L}$ は**後臨界有限 (post-critically finite, p.-c.f.)** であるという．
(2) $\sup_{x\in K} \#\pi^{-1}(x) < \infty$ であるとき，$\mathcal{L}$ は**強有限** (strongly finite) であるという．
(3) 任意の $x \in K$ に対し $\#\pi^{-1}(x) < \infty$ であるとき，$\mathcal{L}$ は**弱有限** (weakly finite) であるという．

演習 1.5. $C_K \subset V_1$ かつ $\#\mathcal{C} \leq (\#S)(\#\mathcal{P})$ であることを示せ．(よって特に $\mathcal{L}$ が p.-c.f. ならば $\#\mathcal{C} < \infty$ である．)

命題 1.29. $V_0 \neq \emptyset$ ならば $\sup_{x\in K} \#\pi^{-1}(x) = \sup_{x\in C_K} \#\pi^{-1}(x) \leq \#\mathcal{C}$. 特に，$\mathcal{L}$ が p.-c.f. ならば $\mathcal{L}$ は強有限である．

証明. $V_0 \neq \emptyset$ と仮定する．このとき $C_K \neq \emptyset, \mathcal{C} \neq \emptyset$ であることを注意しておく．$x \in K$ とする．$\#\pi^{-1}(x) = 1$ なら明らかに $\#\pi^{-1}(x) \leq (\#\mathcal{C}) \wedge \sup_{z \in C_K} \pi^{-1}(z)$. そこで $\#\pi^{-1}(x) \geq 2$ と仮定し $k := \min\{m \in \mathbb{N} \mid \#\{[\omega]_m \mid \omega \in \pi^{-1}(x)\} \geq 2\}$ とおくと，$w \in W_{k-1}$ が存在して $\pi^{-1}(x) \subset \Sigma_w$, 従って $x \in K_w$ となり，$y := F_w^{-1}(x)$ とおくと容易に $\pi^{-1}(x) = \sigma_w(\pi^{-1}(y))$ が分かる．ところが k の定義から $[\omega]_1 \neq [\tau]_1$ を満たす $\omega, \tau \in \Sigma$ を $\sigma_w(\omega), \sigma_w(\tau) \in \pi^{-1}(x)$ となるように取れるので，$\omega, \tau \in \pi^{-1}(y)$, $y = \pi(\omega) = \pi(\tau) \in K_{[\omega]_1} \cap K_{[\tau]_1} \subset C_K$ となり，よって $\pi^{-1}(y) \subset \mathcal{C}, \#\pi^{-1}(x) = \#\sigma_w(\pi^{-1}(y)) = \#\pi^{-1}(y) \leq (\#\mathcal{C}) \wedge \sup_{z \in C_K} \#\pi^{-1}(z)$. 以上より $\sup_{x \in K} \#\pi^{-1}(x) \leq (\#\mathcal{C}) \wedge \sup_{x \in C_K} \#\pi^{-1}(x)$, これと $(\#\mathcal{C}) \wedge \sup_{x \in C_K} \#\pi^{-1}(x) \leq \sup_{x \in C_K} \#\pi^{-1}(x) \leq \sup_{x \in K} \#\pi^{-1}(x)$ より前半の主張を得る．

$\mathcal{L}$ が p.-c.f. で $V_0 \neq \emptyset$ なら前半の主張と演習 1.5 から $\mathcal{L}$ は強有限である．$V_0 = \emptyset$ のときは命題 1.24-(3) より $\sup_{x \in K} \pi^{-1}(x) = 1$ なので $\mathcal{L}$ は強有限である．　□

命題 1.30. $w \in W_* \setminus \{\emptyset\}$ とする．このとき $q_w := \pi(w^\infty)$ は $F_w(q_w) = q_w$ を満たす唯 1 つの K の元である．さらに $\mathcal{L}$ が弱有限ならば $\pi^{-1}(q_w) = \{w^\infty\}$.

証明. $q_w = \pi(w^\infty)$ は明らかに $F_w(q_w) = q_w$ を満たす．$x \in K$ が $F_w(x) = x$ を満たすと仮定すると，$\omega \in \pi^{-1}(x)$ を取れば $n \in \mathbb{N}$ に対し $x = F_{w^n}(x) = \pi(\sigma_{w^n}(\omega)) \xrightarrow{n\to\infty} \pi(w^\infty) = q_w$ となり，よって $x = q_w$.

明らかに $\{w^\infty\} \subset \pi^{-1}(q_w)$ である．$\omega \in \pi^{-1}(q_w) \setminus \{w^\infty\}$ が存在すると仮定する．このとき $k := \min\{n \in \mathbb{N} \mid [\omega]_{|w|n} \neq w^n\}$, $\tau := \sigma^{|w|(k-1)}(\omega)$ とおけば，$[\tau]_{|w|} \neq w$, また $F_{w^{k-1}}(\pi(\tau)) = \pi(\omega) = q_w = F_{w^{k-1}}(q_w)$ より $\pi(\tau) = q_w$ であり，すると $\{\sigma_{w^n}(\tau)\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \pi^{-1}(q_w)$, かつ $[\tau]_{|w|} \neq w$ より $\mathbb{N} \ni n \mapsto \sigma_{w^n}(\tau)$ は単射であるので $\#\pi^{-1}(q_w) = \infty$ となる．よって $\mathcal{L}$ が弱有限であれば $\#\pi^{-1}(q_w) < \infty$ なので $\pi^{-1}(q_w) \setminus \{w^\infty\} = \emptyset$ でなければならず，従って $\pi^{-1}(q_w) = \{w^\infty\}$.　□

1.4　自己相似集合の例

本節では基本的な自己相似集合の例を幾つか紹介し，対応する自己相似構造の基本的性質を調べる．以下で最初の 4 例では p.-c.f. 自己相似構造が得られ，後の 2 例では強有限だが p.-c.f. ではない自己相似構造が得られる．

例 1.31 (Cantor 集合)**.** $a, b \in (0, \infty)$ を $a + b < 1$ を満たすように取り，$\mathbb{R}$ 上の相似縮小 $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を $f_1(x) := ax$, $f_2(x) := b(x-1) + 1$ で定める．$\mathcal{L} := (K, \{1, 2\}, \{F_i\}_{i \in \{1,2\}})$ を $\{f_i\}_{i \in \{1,2\}}$ から決まる自己相似構造とする．(すなわち K は $\{f_i\}_{i \in \{1,2\}}$ から決まる自己相似集合であり，$i \in \{1, 2\}$ に対し $F_i := f_i|_K$ である．定義 1.18 を思い出そう．) このとき $f_1([0, 1]) \cup f_2([0, 1]) \subset [0, 1]$ であるから定理 1.4 の最後の主張から $K \subset [0, 1]$ であり，従って $K_1 \subset f_1([0, 1]) = [0, a]$, $K_2 \subset f_2([0, 1]) = [1 - b, 1]$. よって $C_K = K_1 \cap K_2 = \emptyset$ となり，これより $\mathcal{C} = \pi^{-1}(C_K) = \emptyset, \mathcal{P} = \emptyset, V_0 = \emptyset$ となるので，命題 1.24-(3) より $\pi : \Sigma \to K$ は単射，従って同相写像である．

$a = b = 1/3$ の場合の K は Cantor の 3 進集合と呼ばれる．

例 1.32 (Koch 曲線)**.** $\alpha \in \mathbb{C}$ を $|\alpha|^2 + |1 - \alpha|^2 < 1$ を満たすように取り，$\mathbb{C}$ 上の相似縮小 $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f_1(z) := \alpha\overline{z}$, $f_2(z) := (1 - \alpha)(\overline{z} - 1) + 1$ で定める．$f_1(0) = 0$, $f_2(1) = 1$, $f_1(1) = f_2(0) = \alpha$ であることを注意してお

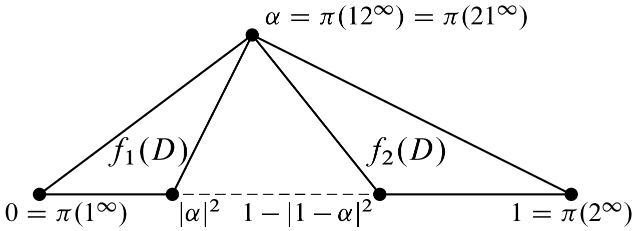


図 1.1: Koch 曲線に対する自己相似構造 $\mathcal{L}_\alpha$ の様子 ($\alpha = 0.4 + 0.3\sqrt{-1}$)

く．$\mathcal{L}_\alpha := (K, \{1,2\}, \{F_i\}_{i\in\{1,2\}})$ を $\{f_i\}_{i\in\{1,2\}}$ から決まる自己相似構造とする．$i \in \{1,2\}$ に対し $F_i(\pi(i^\infty)) = \pi(i^\infty)$ なので定理 1.3 の一意性の主張から $\pi(1^\infty) = 0$, $\pi(2^\infty) = 1$, よって $\alpha = F_1(\pi(2^\infty)) = F_2(\pi(1^\infty)) \in K_1 \cap K_2$. 一方 $D := \{s + t\alpha \mid s,t \in [0,\infty), s+t \leq 1\}$, すなわち D を $0, \alpha, 1$ を頂点とする 3 角形の内部と周の和集合（$\alpha \in \mathbb{R}$ のときは $D = [0,1]$）とすると，図 1.1 からも分かるように $f_1(D) \cup f_2(D) \subset D$ なので定理 1.4 の最後の主張から $K \subset D$ であり，さらに $C_K = K_1 \cap K_2 \subset f_1(D) \cap f_2(D) = \{\alpha\}$, よって $C_K = \{\alpha\}$ となる．また $K_1 \subset f_1(D)$, $K_2 \subset f_2(D)$ より $1 \notin K_1$, $0 \notin K_2$ であり，これより容易に $\pi^{-1}(0) = \{1^\infty\}, \pi^{-1}(1) = \{2^\infty\}$ が分かり，さらに $\mathcal{C} = \pi^{-1}(\alpha) = \{12^\infty, 21^\infty\}$ も従うので $\mathcal{P} = \{1^\infty, 2^\infty\}, V_0 = \{0,1\}, V_1 = \{0,\alpha,1\}$ が分かる．

より一般に $x \in K$ が $\#\pi^{-1}(x) \geq 2$ を満たすとき，ある $w \in W_*$ が存在して $\pi^{-1}(x) = \{w12^\infty, w21^\infty\}$ となることが例 1.23 と全く同様にして分かる．

$\mathcal{L}_{1/2}$ は例 1.23 で取り扱った自己相似構造に他ならず，$\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6}\sqrt{-1}$ のときの K が図 0.1 左の Koch 曲線である．前段落の結果から，$|\alpha|^2 + |1-\alpha|^2 < 1$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ に対し $\mathcal{L}_\alpha$ は常に $\mathcal{L}_{1/2}$ に同型（定義 1.19）であることがわかる．

例 1.33 (Sierpiński gasket)**.** $\{q_1, q_2, q_3\} \subset \mathbb{R}^2$ を $\mathbb{R}^2$ 内のある正 3 角形の 3 頂点，$S := \{1,2,3\}$ とし，$i \in S$ に対し相似縮小 $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f_i(x) := (x + q_i)/2$ で定める．$\mathcal{L} := (K, S, \{F_i\}_{i\in S})$ を $\{f_i\}_{i\in S}$ から決まる自己相似構造とする．この K が図 0.1 中央の **Sierpiński gasket** である．$i \in S$ に対し $q_i = \pi(i^\infty) \in K$ であり，よって $q_{23} := F_2(q_3) = F_3(q_2) \in K_2 \cap K_3$, $q_{31} := F_3(q_1) = F_1(q_3) \in K_3 \cap K_1$, $q_{12} := F_1(q_2) = F_2(q_1) \in K_1 \cap K_2$ である．一方，T を q_1, q_2, q_3 を頂点とする正 3 角形の内部と周の和集合とすると明らかに $f_1(T) \cup f_2(T) \cup f_3(T) \subset T$, 従って定理 1.4 の最後の主張から $K \subset T$ であり，よって $K_2 \cap K_3 \subset f_2(T) \cap f_3(T) = \{q_{23}\}$, $K_3 \cap K_1 \subset f_3(T) \cap f_1(T) = \{q_{31}\}$, $K_1 \cap K_2 \subset f_1(T) \cap f_2(T) = \{q_{12}\}$, ゆえに $K_2 \cap K_3 = \{q_{23}\}$, $K_3 \cap K_1 = \{q_{31}\}$, $K_1 \cap K_2 = \{q_{12}\}$ である．さらに $K_1 \subset f_1(T)$, $K_2 \subset f_2(T)$, $K_3 \subset f_3(T)$ であることから $q_1 \notin K_2 \cup K_3$, $q_2 \notin K_3 \cup K_1$, $q_3 \notin K_1 \cup K_2$, $q_{23} \notin K_1$, $q_{31} \notin K_2$, $q_{12} \notin K_3$ となり，よって $\pi^{-1}(q_1) = \{1^\infty\}, \pi^{-1}(q_2) = \{2^\infty\}, \pi^{-1}(q_3) = \{3^\infty\}$, 従ってまた $\pi^{-1}(q_{23}) = \{23^\infty, 32^\infty\}, \pi^{-1}(q_{31}) = \{31^\infty, 13^\infty\}, \pi^{-1}(q_{12}) = \{12^\infty, 21^\infty\}$ となる．特に $C_K = \{q_{23}, q_{31}, q_{12}\}$, $\mathcal{C} = \{23^\infty, 32^\infty, 31^\infty, 13^\infty, 12^\infty, 21^\infty\}$, $\mathcal{P} = \{1^\infty, 2^\infty, 3^\infty\}$, $V_0 = \{q_1, q_2, q_3\}$, $V_1 = V_0 \cup \{q_{23}, q_{31}, q_{12}\}$ であり，$\mathcal{L}$ は p.-c.f. 自己相似構造である．

$x \in K$ が $\#\pi^{-1}(x) \geq 2$ を満たすとき，$i \neq j$ であるような $i, j \in S$ と $w \in W_*$ が存在して $\pi^{-1}(x) = \{wij^\infty, wji^\infty\}$ となる．実際，$\omega, \tau \in \pi^{-1}(x), \omega \neq \tau$ とすると，$n := \min\{m \in \mathbb{N} \mid [\omega]_m \neq [\tau]_m\} - 1$, $w := [\omega]_n$ とおけば $x = F_w(\pi(\sigma^n(\omega))) =$

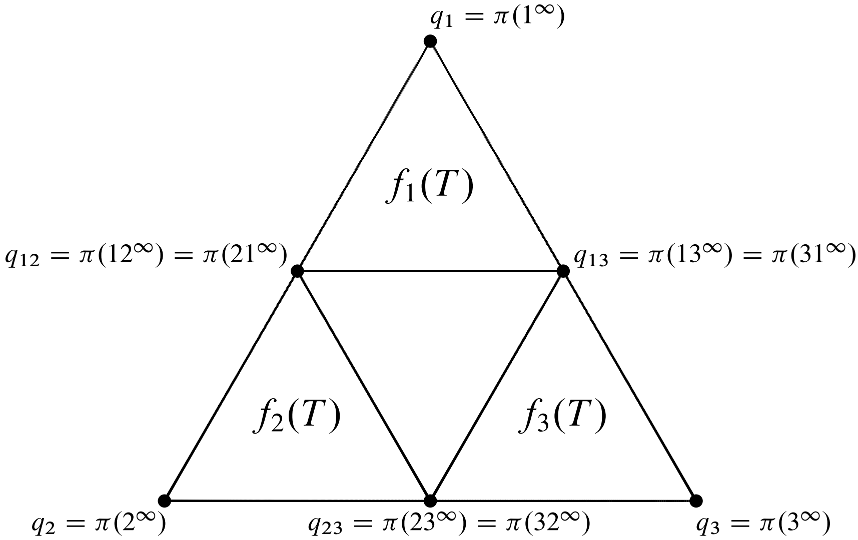


図 1.2: Sierpiński gasket に対する自己相似構造の様子

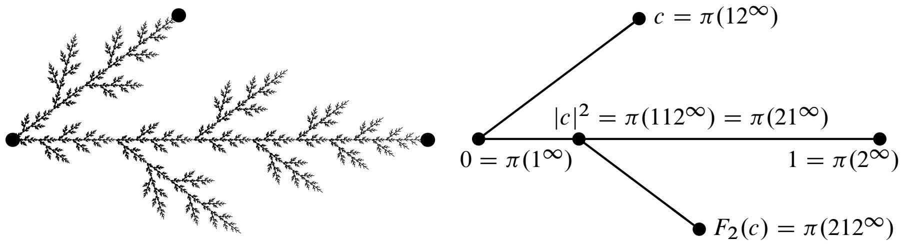


図 1.3: 畑の樹状集合 ($c = 0.4 + 0.3\sqrt{-1}$) と集合 $f_1(A) \cup f_2(A)$ 及び V_1

$F_w(\pi(\sigma^n(\tau)))$, F_w の単射性より $\pi(\sigma^n(\omega)) = \pi(\sigma^n(\tau)) \in C_K = \{q_{23}, q_{31}, q_{12}\}$ となり，よって $i \neq j$ であるような $i, j \in S$ が存在して $\{\sigma^n(\omega), \sigma^n(\tau)\} = \{ij^\infty, ji^\infty\}$, $\{\omega, \tau\} = \sigma_w(\{ij^\infty, ji^\infty\}) = \{wij^\infty, wji^\infty\}$. そこでさらに $u \in \pi^{-1}(x)$ とすれば同様にしてある $k, l \in S$, $k \neq l$ と $v \in W_*$ により $\{u, wij^\infty\} = \{vkl^\infty, vlk^\infty\}$ もしくは $\{u, wji^\infty\} = \{vkl^\infty, vlk^\infty\}$ となるが，このとき $\{k, l\} = \{i, j\}$, $v = w$ でなければならず，従って $u \in \{wij^\infty, wji^\infty\}$, よって $\pi^{-1}(x) = \{wij^\infty, wji^\infty\}$.

例 1.34 (畑の樹状集合). $c \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ を $|c|, |1-c| \in (0,1)$ を満たすように取り，$\mathbb{C}$ 上の相似縮小 $f_1, f_2 : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ を $f_1(z) := c\overline{z}$, $f_2(z) := (1-|c|^2)\overline{z} + |c|^2$ で定める．$f_1(0) = 0$, $f_2(1) = 1$, $f_1(1) = c$, $f_1(c) = f_2(0) = |c|^2$ であることを注意しておく．$\mathcal{L}_c := (K, \{1,2\}, \{F_i\}_{i \in \{1,2\}})$ を $\{f_i\}_{i \in \{1,2\}}$ から決まる自己相似構造とする．この K を**畑の樹状集合** (Hata's tree-like set) という．$A := [0,1] \cup \{ct \mid t \in [0,1]\} \subset \mathbb{C}$ とすると $A \subset f_1(A) \cup f_2(A)$ であり，従って定理 1.4 の最後の主張から $A \subset K$ かつ $K = \overline{\bigcup_{m=0}^{\infty} \bigcup_{w \in W_m} F_w(A)}^{\mathbb{C}}$．また $0 = \pi(1^\infty)$, $1 = \pi(2^\infty)$, $c = \pi(12^\infty)$, $|c|^2 = F_1(\pi(12^\infty)) = F_2(\pi(1^\infty)) \in K_1 \cap K_2$. 一方，$D$ を 3 つの 3

角形 $01c, 01\overline{c}, 0cc^2$ の内部と周全部の和集合とすると，3 角形 $01c$ の内角のうち頂点 c における内角が最大であることに注意すると容易に $f_1(D) \cup f_2(D) \subset D$, $f_1(D) \cap f_2(D) = \{|c|^2\}$ であることが確認できる．従って定理 1.4 の最後の主張から $K \subset D, K_1 \cap K_2 \subset f_1(D) \cap f_2(D) = \{|c|^2\}$, ゆえに $C_K = K_1 \cap K_2 = \{|c|^2\}$ となる．さらに $K_1 \subset f_1(D), K_2 \subset f_2(D)$ から $0, c \notin K_2, 1 \notin K_1$ となり，よって $\pi^{-1}(0) = \{1^\infty\}, \pi^{-1}(1) = \{2^\infty\}, \pi^{-1}(c) = \{12^\infty\}, \mathcal{C} = \pi^{-1}(|c|^2) = \{112^\infty, 21^\infty\}$ となるので $\mathcal{P} = \{1^\infty, 2^\infty, 12^\infty\}, V_0 = \{0, 1, c\}, V_1 = \{0, 1, c, |c|^2, F_2(c)\}$.

$x \in K$ で $\#\pi^{-1}(x) \geq 2$ ならば $w \in W_*$ が存在して $\pi^{-1}(x) = \{w112^\infty, w21^\infty\}$ となる．実際，$\omega, \tau \in \pi^{-1}(x)$, $\omega \neq \tau$ とすると，$n := \min\{m \in \mathbb{N} \mid [\omega]_m \neq [\tau]_m\} - 1$, $w := [\omega]_n$ とおけば $x = F_w(\pi(\sigma^n(\omega))) = F_w(\pi(\sigma^n(\tau)))$, F_w の単射性より $\pi(\sigma^n(\omega)) = \pi(\sigma^n(\tau)) \in C_K = \{|c|^2\}$ となり，よって $\{\sigma^n(\omega), \sigma^n(\tau)\} = \{112^\infty, 21^\infty\}$, $\{\omega, \tau\} = \sigma_w(\{112^\infty, 21^\infty\}) = \{w112^\infty, w21^\infty\}$. そこでさらに $u \in \pi^{-1}(x)$ とすれば同様にしてある $v \in W_*$ により $\{u, w112^\infty\} = \{v112^\infty, v21^\infty\}$ もしくは $\{u, w21^\infty\} = \{v112^\infty, v21^\infty\}$ となるが，このとき $v = w$ でなければならず，従って $u \in \{w112^\infty, w21^\infty\}$, よって $\pi^{-1}(x) = \{w112^\infty, w21^\infty\}$.

前段落の結果から特に，$|c_k|, |1 - c_k| \in (0, 1)$ を満たす任意の $c_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, $k = 1, 2$ に対し $\mathcal{L}_{c_2}$ は $\mathcal{L}_{c_1}$ に同型であることが分かる．

例 1.35. $\{q_1, q_2, q_3, q_4\} \subset \mathbb{R}^2$ を $q_1 := (0, 0), q_2 := (1, 0), q_3 := (1, 1), q_4 := (0, 1)$ で定める．$S := \{1, 2, 3, 4\}$ とし，各 $i \in S$ に対し $\mathbb{R}^2$ 上の相似縮小 $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f_i(x) := (x + q_i)/2$ で定める．$\mathcal{L} := (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ を $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる自己相似構造とすると，$[0, 1]^2 = \bigcup_{i \in S} f_i([0, 1]^2)$ なので $K = [0, 1]^2$ であり，$C_K = ([0, 1] \times \{1/2\}) \cup (\{1/2\} \times [0, 1])$ である．また $\pi(\{1, 2\}^{\mathbb{N}})$ が $\{f_1, f_2\}$ から決まる自己相似集合であることから $\pi(\{1, 2\}^{\mathbb{N}}) = [0, 1] \times \{0\}$ が分かり，これと $([0, 1] \times \{0\}) \cap (K_3 \cup K_4) = \emptyset$ から容易に $\pi^{-1}([0, 1] \times \{0\}) = \{1, 2\}^{\mathbb{N}}$ が従う．同様に $\pi^{-1}(\{1\} \times [0, 1]) = \{2, 3\}^{\mathbb{N}}, \pi^{-1}([0, 1] \times \{1\}) = \{3, 4\}^{\mathbb{N}}, \pi^{-1}(\{0\} \times [0, 1]) = \{4, 1\}^{\mathbb{N}}$. そこで $\omega \in \Sigma, 1\omega \in \mathcal{C}$ とすると $F_1(\pi(\omega)) \in K_1 \cap C_K = F_1\big((\{1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\})\big)$ なので $\pi(\omega) \in (\{1\} \times [0, 1]) \cup ([0, 1] \times \{1\})$, よって $\omega \in \{2, 3\}^{\mathbb{N}} \cup \{3, 4\}^{\mathbb{N}}$ となり，これより $\mathcal{C} \cap \Sigma_1 = \sigma_1(\{2, 3\}^{\mathbb{N}} \cup \{3, 4\}^{\mathbb{N}})$ が従う．同様に $\mathcal{C} \cap \Sigma_i, i \in S$ を求めると

$$\begin{aligned}\mathcal{C} = \sigma_1(\{2, 3\}^{\mathbb{N}} \cup \{3, 4\}^{\mathbb{N}}) \cup \sigma_2(\{3, 4\}^{\mathbb{N}} \cup \{4, 1\}^{\mathbb{N}}) \\ \cup \sigma_3(\{4, 1\}^{\mathbb{N}} \cup \{1, 2\}^{\mathbb{N}}) \cup \sigma_4(\{1, 2\}^{\mathbb{N}} \cup \{2, 3\}^{\mathbb{N}})\end{aligned}$$

が得られ，よって $\mathcal{P} = \{1, 2\}^{\mathbb{N}} \cup \{2, 3\}^{\mathbb{N}} \cup \{3, 4\}^{\mathbb{N}} \cup \{4, 1\}^{\mathbb{N}}, V_0 = [0, 1]^2 \setminus (0, 1)^2$.

さらに $\sup_{x \in K} \#\pi^{-1}(x) = 4$ であり，よって $\mathcal{L}$ は強有限である．実際，命題 1.29 より $x \in C_K$ に対し $\pi^{-1}(x)$ を見ればよいが，$x = (1/2, 1/2)$ のときは $x \in \bigcap_{i \in S} K_i$, $F_1^{-1}(x) = q_3$, $F_2^{-1}(x) = q_4$, $F_3^{-1}(x) = q_1$, $F_4^{-1}(x) = q_2$ であり，各 $i \in S$ に対し $\pi^{-1}(q_i) = \{i^\infty\}$ であるので $\pi^{-1}(x) = \{13^\infty, 24^\infty, 31^\infty, 42^\infty\}$ が分かる．$x \in C_K \setminus \{(1/2, 1/2)\}$ のときは，ある $\{i, j\} \in \{\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 1\}\}$ により $\{k \in S \mid x \in K_k\} = \{i, j\}$ となり，さらに $\omega \in \Sigma, i\omega \in \pi^{-1}(x)$ とすると $F_i^{-1}(x) = \pi(\omega)$ より $\omega \in \pi^{-1}(F_i^{-1}(x)), i\omega \in \sigma_i\big(\pi^{-1}(F_i^{-1}(x))\big)$ となるので，$\pi^{-1}(x) \subset \sigma_i\big(\pi^{-1}(F_i^{-1}(x))\big) \cup \sigma_j\big(\pi^{-1}(F_j^{-1}(x))\big)$ となる．ところが $F_i^{-1}(x), F_j^{-1}(x) \in V_0$ であり，V_0 は例 1.23 と同様にして構成される自己相似集合 4 つの和集合であるので例 1.23 の結果から容易に $\#\pi^{-1}(F_i^{-1}(x)) \leq 2, \#\pi^{-1}(F_j^{-1}(x)) \leq 2$ が得られ，よって $\#\pi^{-1}(x) = \#\sigma_i\big(\pi^{-1}(F_i^{-1}(x))\big) + \#\sigma_j\big(\pi^{-1}(F_j^{-1}(x))\big) \leq 4$ となる．

例 1.36 (Sierpiński carpet)**.** $S := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq 8\}$ とし，$\{q_i \mid i \in S\} \subset \mathbb{R}^2$ を $q_1 := (0,0)$, $q_2 := (1/2, 0)$, $q_3 := (1,0)$, $q_4 := (1, 1/2)$, $q_5 := (1,1)$, $q_6 := (1/2, 1)$, $q_7 := (0,1)$ $q_8 := (0, 1/2)$ で定める．各 $i \in S$ に対し $\mathbb{R}^2$ 上の相似縮小 $f_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を $f_i(x) := (x - q_i)/3 + q_i$ で定め，$\mathcal{L} := (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ を $\{f_i\}_{i \in S}$ から決まる自己相似構造とする．この K が図 0.1 右の **Sierpiński carpet** である．このとき $[0,1]^2 \setminus (0,1)^2 \subset \bigcup_{i \in S} f_i([0,1]^2 \setminus (0,1)^2)$, $\bigcup_{i \in S} f_i([0,1]^2) \subset [0,1]^2$ であるので定理 1.4 の最後の主張から $[0,1]^2 \setminus (0,1)^2 \subset K \subset [0,1]^2$ であり，これより

$$\begin{aligned} C_K = ([0,1/3] \times \{1/3, 2/3\}) \cup ([2/3, 1] \times \{1/3, 2/3\}) \\ \cup (\{1/3, 2/3\} \times [0, 1/3]) \cup (\{1/3, 2/3\} \times [2/3, 1]) \end{aligned} \tag{1.13}$$

が容易に得られる．特に $\mathcal{C} = \pi^{-1}(C_K)$ は無限集合であり，また命題 1.24-(2) より $C_K = \bigcup_{i,j \in S, i \neq j} (F_i(V_0) \cup F_j(V_0))$ であって，(1.13) より C_K は無限集合であるので V_0 も無限集合，よって $V_0 = \pi(\mathcal{P})$ より $\mathcal{P}$ も無限集合である．

演習 1.6. 例 1.36 の自己相似構造 $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ に対して $\mathcal{C}, \mathcal{P}, V_0$ を求めよ．

演習 1.7. 例 1.36 の自己相似構造 $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ は強有限であることを示せ．

1.5　自己相似構造上の測度

本節では自己相似構造上の測度の基本性質を扱った後，重要な測度のクラスである自己相似測度についてその定義と基本的な事実を述べる．本節を通して $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ は与えられた自己相似構造とする．

本節においては $K \neq \overline{V_0}^K$ という K の位相に対する条件が基本的な役割を果たす．そこでまずこの条件の同値な言い換えを与えておく．

定理 1.37. $K \neq \overline{V_0}^K$ となる為には $\mathrm{int}_K \overline{V_0}^K = \emptyset$ となることが必要十分である．

証明. $K = \overline{V_0}^K$ ならば $\mathrm{int}_K \overline{V_0}^K = K \neq \emptyset$ である．逆に $\mathrm{int}_K \overline{V_0}^K \neq \emptyset$ ならば $K = \overline{V_0}^K$ であることを示そう．π の連続性より $w \in W_*$ が存在して $K_w \subset \overline{V_0}^K$. $m := |w|$ とおき，$x \in K_w$ とする．$x \in K_v$ となる $v \in W_m \setminus \{w\}$ が存在する場合は命題 1.24-(2) より $x \in K_w \cap K_v = F_w(V_0) \cap F_v(V_0)$, よって $F_w^{-1}(x) \in V_0$. そこで以下 $\{v \in W_m \mid x \in K_v\} = \{w\}$ と仮定する．このとき $U_w := K \setminus \bigcup_{v \in W_m \setminus \{w\}} K_v$ とおくと U_w は K の開集合で $x \in U_w \subset K_w \subset \overline{V_0}^K$ である．$F_w^{-1}(x)$ の K における開近傍 U を任意に取る．$F_w^{-1} : K_w \to K$ が連続であることに注意すると，K の開集合 V で $x \in V \subset U_w$ かつ $F_w^{-1}(V) \subset U$ となるものが存在するが，$x \in \overline{V_0}^K$ なので $V \cap V_0 \neq \emptyset$, よって $\omega \in \mathcal{P}$ を $\pi(\omega) \in V$ となるように取れる．ところが $V \subset U_w$ なので $v \in W_m \setminus \{w\}$ に対し $\pi(\omega) \notin K_v$, 従って $[\omega]_m = w$ となり，$\pi(\omega) \in V, \sigma^m(\omega) \in \mathcal{P}$ なので $F_w^{-1}(\pi(\omega)) = F_w^{-1} \circ F_{[\omega]_m}(\pi(\sigma^m(\omega))) = \pi(\sigma^m(\omega)) \in U \cap V_0$. ゆえに $F_w^{-1}(x)$ の K における任意の開近傍に対し $U \cap V_0 \neq \emptyset$, すなわち $F_w^{-1}(x) \in \overline{V_0}^K$. 以上より $K = F_w^{-1}(K_w) \subset \overline{V_0}^K$ となり，$K = \overline{V_0}^K$ を得る．□

補題 1.38. $K \neq \overline{V_0}^K$ と仮定し，$K^{\mathrm{I}} := K \setminus \overline{V_0}^K$, また $w \in W_*$ に対し $K_w^{\mathrm{I}} := F_w(K^{\mathrm{I}})$ とおく．このとき任意の $w \in W_*$ に対し K_w^{I} は K の開集合で $K_w^{\mathrm{I}} \subset K^{\mathrm{I}}$ を満たす．

証明. $w \in W_*$ とし $m := |w|$ とおく．命題 1.24-(2) より $v \in W_m \setminus \{w\}$ に対し $K_v \cap K^{\mathrm{I}}_w = \emptyset$ なので

$$K \setminus K^{\mathrm{I}}_w = \bigcup_{v \in W_m} (K_v \setminus K^{\mathrm{I}}_w) = F_w(\overline{V_0}^K) \cup \bigcup_{v \in W_m \setminus \{w\}} K_v \supset \bigcup_{v \in W_m} F_v(V_0) \supset V_0.$$

従って $K \setminus K^{\mathrm{I}}_w$ は K の閉集合で $\overline{V_0}^K \subset K \setminus K^{\mathrm{I}}_w$ を満たし，よって K^{I}_w は K の開集合で $K^{\mathrm{I}}_w \subset K \setminus \overline{V_0}^K = K^{\mathrm{I}}$ を満たす． □

以後，本節では K 上の測度の性質を取り扱う．次の基本的な定義を思い出そう．

定義 1.39. X を位相空間とする．
(1) X の開集合全体を含む X における σ-加法族のうちで最小のものを $\mathcal{B}(X)$ で表し，X の Borel σ-加法族と呼ぶ．また各 $A \in \mathcal{B}(X)$ を X の Borel 集合という．
(2) σ-加法族 $\mathcal{B}(X)$ を定義域とする測度のことを X 上の Borel 測度という．X 上の Borel 測度 μ が $\mu(X) < \infty$ を満たすとき μ は X 上の有限 Borel 測度であるといい，μ が $\mu(X) = 1$ を満たすとき μ は X 上の Borel 確率測度であるという．

（以下の議論には必要ないが）次の演習 1.8 で見るように $F_w(V_0)$ は K の Borel 集合であり，よって K 上の Borel 測度 μ に対し $\mu(F_w(V_0))$ が定義される．

演習 1.8. $w \in W_*$ に対し $\sigma_w(\mathcal{P}) \in \mathcal{B}(\Sigma)$, $F_w(V_0) \in \mathcal{B}(K)$ であることを示せ．

一定の条件の下，K 上の有限 Borel 測度 μ は $\{\mu(K_w) \mid w \in W_*\}$ によって一意的に決まる．実際，次の定理が成り立つ．

定理 1.40. $(\lambda_w)_{w \in W_*} \in [0,\infty)^{W_*}$ とし，任意の $w \in W_*$ に対し $\lambda_w = \sum_{i \in S} \lambda_{wi}$ と仮定する．このとき，K 上の Borel 測度 μ, ν が任意の $w \in W_*$ に対し $\mu(K_w) = \nu(K_w) = \lambda_w$ を満たすならば $\mu = \nu$ である．

証明. まず $\mu(K) = \nu(K) = \lambda_\emptyset < \infty$ であることに注意する．$m \in \mathbb{N}$ とし，$w, v \in W_m, w \neq v$ とする．このとき

$$\lambda_\emptyset = \mu(K) \leq \mu(K_w \cup K_v) + \sum_{\tau \in W_m \setminus \{w,v\}} \mu(K_\tau) \leq \sum_{\tau \in W_m} \mu(K_\tau) = \sum_{\tau \in W_m} \lambda_\tau = \lambda_\emptyset \tag{1.14}$$

であるので，(1.14) 中の不等号では全て等号が成立し，従って $\mu(K_w \cup K_v) = \mu(K_w) + \mu(K_v)$ であるが，$\mu(K_w \cup K_v) = \mu(K_w) + \mu(K_v \setminus (K_w \cap K_v)) = \mu(K_w) + \mu(K_v) - \mu(K_w \cap K_v)$ であるので $\mu(K_w \cap K_v) = 0$ となる．そこで $F_* := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcup_{w,v \in W_m, w \neq v} (K_w \cap K_v)$ とおくと $\mu(F_*) = 0$, 従って任意の $w \in W_*$ に対し $\lambda_w = \mu(K_w) = \mu(K_w \setminus F_*)$. ν に対しても同様に $\nu(F_*) = 0$, かつ任意の $w \in W_*$ に対し $\lambda_w = \nu(K_w \setminus F_*)$. また各 $A \in \mathcal{B}(K)$ に対し $\mu(A \cap F_*) = \nu(A \cap F_*) = 0$.

$\mathcal{A} := \{K_w \setminus F_* \mid w \in W_*\} \cup \{A \cap F_* \mid A \in \mathcal{B}(K)\}$ とおく．$w, v \in W_*$ に対し，$\Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset$ なら $k \in \mathbb{N}$ と $w', v' \in W_k$ が存在して $w' \neq v'$, $\Sigma_w \subset \Sigma_{w'}$, $\Sigma_v \subset \Sigma_{v'}$ であるので命題 1.24-(2) より $(K_w \setminus F_*) \cap (K_v \setminus F_*) \subset K_{w'} \cap K_{v'} \setminus F_* = \emptyset$ となり，他方 $\Sigma_w \cap \Sigma_v \neq \emptyset$ ならば $K_w \subset K_v$ または $K_v \subset K_w$, 従って $(K_w \setminus F_*) \cap (K_v \setminus F_*) = K_w \setminus F_*$ または $(K_w \setminus F_*) \cap (K_v \setminus F_*) = K_v \setminus F_*$ となる．ゆえに $\mathcal{A}$ は任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し $A \cap B \in \mathcal{A}$ を満たす．また K の任意の開集合 U に対し π の連続

性から $U=\bigcup_{w\in W_*,\,K_w\subset U}K_w=\bigcup_{w\in W_*,\,K_w\subset U}\bigl((K_w\setminus F_*)\cup(K_w\cap F_*)\bigr)$ なので，$\mathcal{A}$ を含む最小の K における σ-加法族は，K の開集合全体を含み，従って $\mathcal{B}(K)$ に一致する．そこで $\mathcal{D}:=\{A\in\mathcal{B}(K)\mid\mu(A)=\nu(A)\}$ とおくと，$\mathcal{D}$ は K におけるDynkin 族であり，また前段落の議論から $\mathcal{A}\subset\mathcal{D}$ であるので，$\mathcal{A}$ を含む最小の K における σ-加法族を $\mathcal{D}$ が含むこと，すなわち $\mathcal{B}(K)\subset\mathcal{D}$ が Dynkin 族定理（本節末の定理 1.46）より従う．これは $\mu=\nu$ を意味する． □

K が 1 点からなる集合という自明な場合を排除するため，これ以降本節の終わりまで $\#K\geq 2$ を仮定する．このとき $\mathcal{L}$ に対応する自然な射影 $\pi:\Sigma=\Sigma(S)\to K$ の全射性から $\#S\geq 2$ である．

定義 1.41 (自己相似測度)**.** $(\mu_i)_{i\in S}\in(0,1)^S$ は $\sum_{i\in S}\mu_i=1$ を満たすとする．K 上の Borel 確率測度 μ が $\mu=\sum_{i\in S}\mu_i\mu\circ F_i^{-1}$, すなわち任意の $A\in\mathcal{B}(K)$ に対し

$$\mu(A)=\sum_{i\in S}\mu_i\mu(F_i^{-1}(A)) \tag{1.15}$$

を満たすとき，μ は $\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の**自己相似測度** (self-similar measure) であるという．

$\mathcal{L}$ 上の自己相似測度は K 上の有限 Borel 測度としては（幾何学的には）最も標準的なものであり，自己相似集合の研究において非常に頻繁に用いられる．次の定理が示す通り，与えられた重み $(\mu_i)_{i\in S}\in(0,1)^S$ に対し $\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度は常に（少なくとも 1 つは）存在する．

定理 1.42. $(\mu_i)_{i\in S}\in(0,1)^S$ は $\sum_{i\in S}\mu_i=1$ を満たすとし，μ_Σ を Σ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の Bernoulli 測度，すなわち任意の $w=w_1\ldots w_m\in W_*$ に対し $\mu_\Sigma(\Sigma_w)=\mu_w:=\mu_{w_1}\cdots\mu_{w_m}$ $(\mu_\emptyset:=1)$ を満たす唯 1 つの Σ 上の Borel 測度とする．このとき $A\in\mathcal{B}(K)$ に対し $\mu(A):=(\mu_\Sigma\circ\pi^{-1})(A):=\mu_\Sigma(\pi^{-1}(A))$ で定義される K 上の Borel 測度 $\mu:=\mu_\Sigma\circ\pi^{-1}$ は $\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度である．

証明. Σ 上の Borel 測度 ν を $\nu:=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma\circ\sigma_i^{-1}$ すなわち各 $A\in\mathcal{B}(\Sigma)$ に対し $\nu(A):=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma(\sigma_i^{-1}(A))$ で定めると，$\nu(\Sigma)=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma(\Sigma)=1$ であり，また $j\in S$, $w\in W_*$ に対し $\nu(\Sigma_{jw})=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma(\sigma_i^{-1}(\Sigma_{jw}))=\mu_j\mu_\Sigma(\Sigma_w)=\mu_j\mu_w=\mu_{jw}$ であるので，重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の Bernoulli 測度 μ_Σ の一意性から $\nu=\mu_\Sigma$. そこで $\mu=\mu_\Sigma\circ\pi^{-1}$ について，$A\in\mathcal{B}(K)$ とすると

$$\begin{aligned}\mu(A)=\mu_\Sigma(\pi^{-1}(A))=\nu(\pi^{-1}(A))&=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma\bigl(\sigma_i^{-1}(\pi^{-1}(A))\bigr)\\&=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma((\pi\circ\sigma_i)^{-1}(A))=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma((F_i\circ\pi)^{-1}(A))\\&=\sum_{i\in S}\mu_i\mu_\Sigma\bigl(\pi^{-1}(F_i^{-1}(A))\bigr)=\sum_{i\in S}\mu_i\mu(F_i^{-1}(A))\end{aligned}$$

となるので，$\mu=\mu_\Sigma\circ\pi^{-1}$ は $\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度である． □

注意 1.43. 上記の定理 1.42 とその証明は Σ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の Bernoulli 測度 μ_Σ の存在と一意性を前提としている．μ_Σ の一意性は $(\Sigma,S,\{\sigma_i\}_{i\in S})$ が自己相似構造

であることと定理 1.40 から従う．μ_Σ の存在証明は，測度の構成に関する一般論に倣い，$\nu(\emptyset) := 0, \nu(\Sigma_w) := \mu_w$ で定義される $\nu : \{\Sigma_w \mid w \in W_*\} \cup \{\emptyset\} \to [0,1]$ が適切な σ-加法性（可算加法性）を有し，従って Σ 上の Borel 測度に拡張されることを示すことによりなされる．詳細は例えば [25] とその参考文献を参照のこと．

Σ 上の Bernoulli 測度とは異なり，$\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度 μ に対しては一般に $\mu(K_w) = \mu_w$ が成り立つとは限らない．$\mu(K_w) = \mu_w$ が任意の $w \in W_*$ に対し成り立つ為の必要十分条件が [21, Theorem 1.4.5] に与えられているが，重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の Bernoulli 測度 μ_Σ と自然な射影 π を用いて記述されておりあまり見やすい条件にはなっていない．これに関しては幸い次の定理が成り立つ．

定理 1.44 ([23, Theorem 1.2.7])**.** $K \neq \overline{V_0}^K$ と仮定する．このとき $\sum_{i\in S} \mu_i = 1$ を満たす $(\mu_i)_{i\in S} \in (0,1)^S$ に対し，$\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度 μ は唯 1 つ存在し，任意の $w \in W_*$ に対し $\mu(K_w) = \mu_w$ かつ $\mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) = 0$ を満たす．

証明. μ を $\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度とする．$K^{\mathrm{I}} := K \setminus \overline{V_0}^K$, また $w \in W_*$ に対し $K^{\mathrm{I}}_w := F_w(K^{\mathrm{I}})$ とし，$m \in \mathbb{N}$ に対し $K^{\mathrm{I}}_m := \bigcup_{w\in W_m} K^{\mathrm{I}}_w$ とおく．補題 1.38 より $K^{\mathrm{I}}_m \subset K^{\mathrm{I}}$ である．$m \in \mathbb{N}$ とする．$w \in W_m$ とすると，$v \in W_m \setminus \{w\}$ に対し命題 1.24-(2) より $K_v \cap K^{\mathrm{I}}_w = \emptyset$ なので $F_v^{-1}(K^{\mathrm{I}}_w) = \emptyset$ であり，従って (1.15) より $\mu(K^{\mathrm{I}}_w) = \sum_{v\in W_m} \mu_v \mu(F_v^{-1}(K^{\mathrm{I}}_w)) = \mu_w \mu(K^{\mathrm{I}})$. よって $\mu(K^{\mathrm{I}}_m) = \sum_{w\in W_m} \mu(K^{\mathrm{I}}_w) = \mu(K^{\mathrm{I}})$ であり，これと $K^{\mathrm{I}}_m \subset K^{\mathrm{I}}$ より $\mu(K^{\mathrm{I}} \setminus K^{\mathrm{I}}_m) = 0$.

さて，K^{I} は K の空でない開集合なので π の連続性から $n \in \mathbb{N}$ と $v \in W_n$ が存在して $K_v \subset K^{\mathrm{I}}$ となる．すると $F_v(\overline{V_0}^K) \cap K^{\mathrm{I}}_n = \bigcup_{w\in W_n} \bigl(F_v(\overline{V_0}^K) \cap K^{\mathrm{I}}_w\bigr) = \emptyset$ なので $F_v(\overline{V_0}^K) \subset K^{\mathrm{I}} \setminus K^{\mathrm{I}}_n$, 従って $\mu\bigl(F_v(\overline{V_0}^K)\bigr) = 0$ となり，そこで (1.15) より $\mu_v \mu(\overline{V_0}^K) = \mu_v \mu\bigl(F_v^{-1}\bigl(F_v(\overline{V_0}^K)\bigr)\bigr) \leq \mu\bigl(F_v(\overline{V_0}^K)\bigr) = 0$. よって $\mu(\overline{V_0}^K) = 0$, 従って前段落の結果から $m \in \mathbb{N}$ に対し $\mu(K^{\mathrm{I}}_m) = \mu(K^{\mathrm{I}}) = \mu(K) = 1, \mu(K \setminus K^{\mathrm{I}}_m) = 0$ であり，すると任意の $w \in W_m$ に対し先程と同様に $F_w(\overline{V_0}^K) \cap K^{\mathrm{I}}_m = \emptyset$, つまり $F_w(\overline{V_0}^K) \subset K \setminus K^{\mathrm{I}}_m$ なので $\mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) = 0, \mu(K_w) = \mu(K^{\mathrm{I}}_w) = \mu_w \mu(K^{\mathrm{I}}) = \mu_w$.

以上から $\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の任意の自己相似測度 μ について各 $w \in W_*$ で $\mu(K_w) = \mu_w, \mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) = 0$ が成り立つことになるが，定理 1.40 よりそのような K 上の Borel 測度は一意的であるので $\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度 μ も一意的である．$\mathcal{L}$ 上の重み $(\mu_i)_{i\in S}$ の自己相似測度の存在は定理 1.42 による． □

本節の最後に，自己相似測度とは限らない一般の K 上の有限 Borel 測度 μ について，任意の $x \in K$ に対し $\mu(\{x\}) = 0$ かつ任意の $w \in W_*$ に対し $\mu(K_w) > 0 = \mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr)$ となるための十分条件を与える．

定理 1.45 ([21, Lemma 3.4.1], [23, Theorem 1.2.4])**.** μ を $\mu(K) > 0$ を満たす K 上の有限 Borel 測度とし，$\gamma \in (0,\infty)$ が存在して任意の $(w,i) \in W_* \times S$ に対し $\mu(K_{wi}) \geq \gamma\mu(K_w)$ と仮定する．

(1) 任意の $w \in W_*$ に対し $\mu(K_w) \in (0,\infty)$.

(2) $k \in \mathbb{N}$ が存在して任意の $(w,v) \in W_* \times W_k$ に対し $\mu(K_{wv}) \leq (1-\gamma^k)\mu(K_w)$.

(3) $\gamma \in (0,1)$ であり，また任意の $x \in K$ に対し $\mu(\{x\}) = 0$.

(4) $K \neq \overline{V_0}^K$ と仮定する．このとき任意の $w \in W_*$ に対し $\mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) = 0$.

証明. (1) 仮定より，$w \in W_*$ に対し $\infty > \mu(K) \geq \mu(K_w) \geq \gamma^{|w|}\mu(K) > 0$.
(2) K の位相に適合した K 上の距離関数 ρ を取り，$D := \mathrm{diam}_\rho K$ とおく．$\#K \geq 2$ と K のコンパクト性より $D \in (0,\infty)$ であり，命題 1.25 より $k \in \mathbb{N}$ が存在して $D_k := \max_{w \in W_k} \mathrm{diam}_\rho K_w < D/4$. $v \in W_k$ とする．$x \in K_v$ とすると，$K_v \cap K_\tau \neq \emptyset$ を満たす $\tau \in W_k$ に対しては $z \in K_v \cap K_\tau$ を取ることにより任意の $y \in K_\tau$ に対し $\rho(x,y) \leq \rho(x,z) + \rho(z,y) \leq \mathrm{diam}_\rho K_v + \mathrm{diam}_\rho K_\tau \leq 2D_k$ となる．一方 $4D_k < D$ より $4D_k < \rho(y,z)$ となる $y, z \in K$ が存在し，必要があれば y と z を入れ替えて $\rho(x,z) \leq \rho(x,y)$ と仮定することで $4D_k < \rho(y,z) \leq \rho(y,x) + \rho(x,z) \leq 2\rho(x,y)$, よって $\rho(x,y) > 2D_k$ となるので，$y \in K_\tau$ を満たすように $\tau \in W_k$ を取れば先の議論から $K_v \cap K_\tau = \emptyset$ でなくてはならない．そこで $w \in W_*$ とすると，$K_{wv} \cap K_{w\tau} = F_w(K_v \cap K_\tau) = \emptyset$ なので $\mu(K_w) \geq \mu(K_{wv} \cup K_{w\tau}) = \mu(K_{wv}) + \mu(K_{w\tau}) \geq \mu(K_{wv}) + \gamma^k \mu(K_w)$ となり，よって $\mu(K_{wv}) \leq (1-\gamma^k)\mu(K_w)$.
(3) $k \in \mathbb{N}$ を (2) のように取り $v \in W_k$ とすると (2), (1) より $1-\gamma^k \geq \mu(K_v)/\mu(K) > 0$, 従って $\gamma^k < 1$ なので $\gamma < 1$. また $x \in K$ とし $\omega \in \pi^{-1}(x)$ を取ると，$m \in \mathbb{N}$ に対し (2), (3) より $\mu(\{x\}) \leq \mu(K_{[\omega]_{km}}) \leq (1-\gamma^k)^m \mu(K) \xrightarrow{m\to\infty} 0$, よって $\mu(\{x\}) = 0$.
(4) $K \neq \overline{V_0}^K$ なので，π の連続性より $\tau \in W_*$ が存在して $K_\tau \cap \overline{V_0}^K = \emptyset$. $w \in W_*$, $\varepsilon \in (0,\infty)$ とする．本節末の定理 1.47 により，K の開集合 U が存在して $F_w(\overline{V_0}^K) \subset U$ かつ $\mu(U) < \mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) + \varepsilon$. $W_*^U := \{v \in W_* \mid K_v \subset U, |v| \geq |w|\}$ とおくと，U は K の開集合なので π の連続性より各 $x \in U$ に対し $x \in K_v$ となる $v \in W_*^U$ が存在し，よって $U = \bigcup_{v \in W_*^U} K_v$. ここで $u, v \in W_*$ に対し $\Sigma_v \subsetneqq \Sigma_u$ となる為にはある $u' \in W_* \setminus \{\emptyset\}$ により $v = uu'$ となることが必要十分であることに注意すると，$W_{**}^U := \{v \in W_*^U \mid \{u \in W_*^U \mid \Sigma_v \subsetneqq \Sigma_u\} = \emptyset\}$ とおけば $U = \bigcup_{v \in W_{**}^U} K_v$ であり，また $u, v \in W_{**}^U, u \neq v$ に対し $\Sigma_u \cap \Sigma_v = \emptyset$, 従って命題 1.24-(2) より $K_{u\tau} \cap K_{v\tau} = \emptyset$ となる．さらに $v \in W_{**}^U$ とすると，$\Sigma_w \cap \Sigma_v = \emptyset$ なら命題 1.24-(2) より $F_w(\overline{V_0}^K) \cap K_{v\tau} \subset K_w \cap (K_v \setminus F_v(V_0)) = \emptyset$ であり，他方 $\Sigma_w \cap \Sigma_v \neq \emptyset$ ならば $|v| \geq |w|$ より $u \in W_*$ が存在して $v = wu$, よって補題 1.38 より $F_w(\overline{V_0}^K) \cap K_{v\tau} = F_w(\overline{V_0}^K \cap K_{u\tau}) \subset F_w(\overline{V_0}^K \cap K_u^{\mathrm{I}}) = \emptyset$ となる．従って $F_w(\overline{V_0}^K) \subset U \setminus \bigcup_{v \in W_{**}^U} K_{v\tau}$ であり，よって

$$
\begin{aligned}
\mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) &\leq \mu\Bigl(U \setminus \bigcup\nolimits_{v \in W_{**}^U} K_{v\tau}\Bigr) = \mu(U) - \sum\nolimits_{v \in W_{**}^U} \mu(K_{v\tau}) \\
&\leq \mu(U) - \gamma^{|\tau|} \sum\nolimits_{v \in W_{**}^U} \mu(K_v) \leq (1-\gamma^{|\tau|})\mu(U) \\
&\leq (1-\gamma^{|\tau|})\mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) + (1-\gamma^{|\tau|})\varepsilon.
\end{aligned}
$$

$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので，これより $\mu\bigl(F_w(\overline{V_0}^K)\bigr) = 0$ を得る． □

上の定理 1.40 と定理 1.45-(4) の証明の中で測度論からの基本的な事実を用いた．本節の最後に，読者の便の為それらの事実の主張と証明を与えておく．

定理 1.46 (Dynkin 族定理)**.** X を集合とし，$\mathcal{D}$ を X における **Dynkin 族** (Dynkin system), すなわち X の部分集合からなる次の 3 条件を満たす集合族とする：
(D1) $X \in \mathcal{D}$.
(D2) $A, B \in \mathcal{D}$ かつ $A \subset B$ ならば $B \setminus A \in \mathcal{D}$.

(D3) $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ かつ任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_n \subset A_{n+1}$ ならば $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.
$\mathcal{A}$ を X の部分集合からなる集合族とし，任意の $A, B \in \mathcal{A}$ に対し $A \cap B \in \mathcal{A}$ と仮定する．このときもし $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}$ ならば，$\mathcal{A}$ を含む最小の X における σ-加法族 $\sigma_X(\mathcal{A})$ は $\mathcal{D}$ に含まれる，すなわち $\sigma_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$.

証明. まず，$\mathcal{D}$ が任意の $A, B \in \mathcal{D}$ に対し $A \cap B \in \mathcal{D}$ を満たすならば $\mathcal{D}$ は X における σ-加法族であることを示そう．実際，(D1) より $X \in \mathcal{D}$, よって (D2) より任意の $A \in \mathcal{D}$ に対し $X \setminus A \in \mathcal{D}$ であり，特に $\emptyset = X \setminus X \in \mathcal{D}$. 次に $A, B \in \mathcal{D}$ とすると，$X \setminus A, X \setminus B \in \mathcal{D}$ であり，$\mathcal{D}$ に対して冒頭でおいた仮定から $(X \setminus A) \cap (X \setminus B) \in \mathcal{D}$, 従って $A \cup B = X \setminus \bigl((X \setminus A) \cap (X \setminus B)\bigr) \in \mathcal{D}$. そこで $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $B_n := \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ とおくと，$B_n \subset B_{n+1}$ であり，先の議論から $B_n \in \mathcal{D}$, よって (D3) により $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{D}$. ゆえに X における Dynkin 族 $\mathcal{D}$ が任意の $A, B \in \mathcal{D}$ に対し $A \cap B \in \mathcal{D}$ を満たすとき，$\mathcal{D}$ は X における σ-加法族である．

さて，$\delta_X(\mathcal{A}) := \bigcap_{\mathcal{B}:\, X \text{ における Dynkin 族},\ \mathcal{A} \subset \mathcal{B}} \mathcal{B}$ とおく．X における Dynkin 族 $\mathcal{B}$ で $\mathcal{A}$ を含むものは少なくとも 1 つ存在する（$\mathcal{B}$ として X の部分集合全体の集合を取ればよい）ので，上記の共通部分を考えることは可能であり，それにより $\delta_X(\mathcal{A})$ が定義される．容易に分かるように $\delta_X(\mathcal{A})$ も $\mathcal{A}$ を含む X における Dynkin 族なので，$\delta_X(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含む最小の X における Dynkin 族である．定理の主張で与えられた $\mathcal{D}$ も $\mathcal{A}$ を含む X における Dynkin 族なので，$\delta_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}$ である．

そこであとは $\delta_X(\mathcal{A}) = \sigma_X(\mathcal{A})$ を示せばよい．$\sigma_X(\mathcal{A})$ は $\mathcal{A}$ を含む X における Dynkin 族なので $\delta_X(\mathcal{A}) \subset \sigma_X(\mathcal{A})$ である．逆の包含関係を示すには $\delta_X(\mathcal{A})$ が X における σ-加法族であることを示せばよく，その為にはこの証明の冒頭の議論から，任意の $A, B \in \delta_X(\mathcal{A})$ に対し $A \cap B \in \delta_X(\mathcal{A})$ であることを示せばよい．

$Y \in \delta_X(\mathcal{A})$ とし，$\mathcal{D}_Y := \{A \subset X \mid A \cap Y \in \delta_X(\mathcal{A})\}$ とおく．このとき $\mathcal{D}_Y$ は X における Dynkin 族である．実際，$X \cap Y = Y \in \delta_X(\mathcal{A})$ なので $X \in \mathcal{D}_Y$ であり，$A, B \in \mathcal{D}_Y$ かつ $A \subset B$ ならば $A \cap Y, B \cap Y \in \delta_X(\mathcal{A})$, $A \cap Y \subset B \cap Y$ なので $(B \setminus A) \cap Y = (B \cap Y) \setminus (A \cap Y) \in \delta_X(\mathcal{A})$, 従って $B \setminus A \in \mathcal{D}_Y$. また $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}_Y$ が任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $A_n \subset A_{n+1}$ を満たすならば，$A_n \cap Y \in \delta_X(\mathcal{A})$, $A_n \cap Y \subset A_{n+1} \cap Y$ なので $Y \cap \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A_n \cap Y) \in \delta_X(\mathcal{A})$, よって $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}_Y$.

$Y \in \mathcal{A}$ とすると，$\mathcal{A}$ に対する仮定から任意の $A \in \mathcal{A}$ に対し $A \cap Y \in \mathcal{A} \subset \delta_X(\mathcal{A})$ なので $A \in \mathcal{D}_Y$, よって $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_Y$. 従って任意の $Y \in \mathcal{A}$ に対し $\delta_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}_Y$ となるが，これは $Y \in \delta_X(\mathcal{A})$ ならば $\mathcal{A} \subset \mathcal{D}_Y$ であることを意味し，従って任意の $Y \in \delta_X(\mathcal{A})$ に対し $\delta_X(\mathcal{A}) \subset \mathcal{D}_Y$. ゆえに任意の $A, B \in \delta_X(\mathcal{A})$ に対し $A \cap B \in \delta_X(\mathcal{A})$. □

定理 1.47. X を距離化可能な位相空間，μ を X 上の有限 Borel 測度とし，$A \in \mathcal{B}(X)$ とする．このとき任意の $\varepsilon \in (0, \infty)$ に対し，$F \subset A \subset U$ を満たす X の開集合 U と X の閉集合 F が存在して $\mu(U) < \mu(A) + \varepsilon$ かつ $\mu(A) < \mu(F) + \varepsilon$.

証明. X の部分集合からなる集合族 $\mathcal{A}$ を

$$\mathcal{A} := \left\{ A \subset X \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{任意の } \varepsilon \in (0,\infty) \text{ に対し，} X \text{ の開集合 } U \text{ と } X \text{ の閉} \\ \text{集合 } F \text{ が存在して } F \subset A \subset U \text{ かつ } \mu(U \setminus F) < \varepsilon \end{array} \right\} \tag{1.16}$$

で定める．$\mathcal{A}$ が X の閉集合全体を含み，かつ X における σ-加法族になっていることを示そう．ρ を X の位相に適合した X 上の距離関数，F を X の閉集合とし，$n \in \mathbb{N}$ に対し $U_n := \bigcup_{x \in F} B_\rho(x, 1/n)$ とおく．すると U_n は X の開集合で $F \subset U_{n+1} \subset U_n$ を満たし，さらに F が X の閉集合であることから $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n$ が分かる．

従って，$\mu(X) < \infty$ に注意すると $0 = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n) - \mu(F) = \lim_{n\to\infty} \mu(U_n \setminus F)$ となり，よって $F \in \mathcal{A}$.

空集合 $\emptyset$ は X の閉集合なので $\emptyset \in \mathcal{A}$. $A \in \mathcal{A}$ とすると，$\varepsilon \in (0, \infty)$ と (1.16) のような $U, F \subset X$ に対し $F \subset A \subset U$ より $X \setminus U \subset X \setminus A \subset X \setminus F$ であり，また $(X \setminus F) \setminus (X \setminus U) = U \setminus F$ より $\mu((X \setminus F) \setminus (X \setminus U)) = \mu(U \setminus F) < \varepsilon$ であるので $X \setminus A \in \mathcal{A}$. 次に $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{A}, \varepsilon \in (0, \infty)$ とし，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し X の開集合 U_n と X の閉集合 F_n を $F_n \subset A_n \subset U_n$ かつ $\mu(U_n \setminus F_n) < 2^{-n}\varepsilon$ となるように取る．このとき $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$,

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(U_n \setminus F_n)\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(U_n \setminus F_n) < \varepsilon.$$

さらに $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\bigr) = \lim_{n\to\infty} \mu\bigl(\bigcup_{i=1}^{n} F_i\bigr)$ なので $k \in \mathbb{N}$ を $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\bigr) \leq \mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{k} F_n\bigr) + \varepsilon$ となるように取ることができ，すると $\mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{k} F_n\bigr) = \mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\bigr) + \mu\bigl(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \setminus \bigcup_{n=1}^{k} F_n\bigr) < 2\varepsilon$ となり，なおかつ $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ は X の開集合，$\bigcup_{n=1}^{k} F_n$ は X の閉集合で $\bigcup_{n=1}^{k} F_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ を満たす．従って $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$ となり，以上から $\mathcal{A}$ は X における σ-加法族である．これと $\mathcal{A}$ が X の閉集合全体を含むことから $\mathcal{A}$ は X の開集合全体も含み，よって $\mathcal{B}(X) \subset \mathcal{A}$ となる．$\mathcal{A}$ の定義 (1.16) よりこれは定理の主張の成立を意味する． □

1.6 自己相似構造の連結性

本節を通して $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i\in S})$ は与えられた自己相似構造とする．本節の目的は次の定理を示すことである．

定理 1.48. 次の 3 条件は互いに同値である．
(1) K は連結である．
(2) K は弧状連結である．
(3) 任意の $i, j \in S$ に対し，$n \in \mathbb{N}$ と $\{i_k\}_{k=0}^{n} \subset S$ が存在して，$i_0 = i, i_n = j$ かつ任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $K_{i_{k-1}} \cap K_{i_k} \neq \emptyset$.

証明. (2) ⇒ (1): 一般に弧状連結な位相空間は連結であることから従う．
(1) ⇒ (3): $i \in S$ とする．$S_i \subset S$ を

$$S_i := \left\{ j \in S \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \text{ と } \{i_k\}_{k=0}^{n} \subset S \text{ が存在して，} i_0 = i, i_n = j \\ \text{かつ任意の } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し } K_{i_{k-1}} \cap K_{i_k} \neq \emptyset \end{array} \right\} \tag{1.17}$$

で定め，$U_i := \bigcup_{j\in S_i} K_j$ とおく．明らかに $i \in S_i$ であるから $S_i \neq \emptyset, U_i \neq \emptyset$ であり，また U_i は K の閉集合である．さらに $j \in S \setminus S_i$ に対しては S_i の定義 (1.17) から $K_j \cap U_i = \emptyset$ でなければならず，従って $U_i \cap \bigcup_{j\in S\setminus S_i} K_j = \emptyset$ であり，これと $K = \bigcup_{j\in S} K_j = U_i \cup \bigcup_{j\in S\setminus S_i} K_j$ より $\bigcup_{j\in S\setminus S_i} K_j = K \setminus U_i$ となるので $K \setminus U_i$ も K の閉集合でもある．すなわち U_i は K において開かつ閉であるので K の連結性から $U_i = \emptyset$ または $U_i = K$ であるが，$U_i \neq \emptyset$ なので $U_i = K$, 従って $\bigcup_{j\in S\setminus S_i} K_j = K \setminus U_i = \emptyset$ となる．よって $S \setminus S_i = \emptyset, S_i = S$ となり，(3) を得る．
(3) ⇒ (2): $\#S = 1$ のときは $\pi : \Sigma = \Sigma(S) \to K$ の全射性より $\#K = 1$ となり K は弧状連結である．そこで $\#S \geq 2$ と仮定する．$i, j \in S$ とする．$i = j$ のと

きは (3) のような $n \in \mathbb{N}$ と $\{i_k\}_{k=0}^n \subset S$ として $n := \#S - 1, i_k := i$ が取れる．$i \neq j$ のときは，(3) のような $n \in \mathbb{N}$ と $\{i_k\}_{k=0}^n \subset S$ を $\{0, \ldots, n\} \ni k \mapsto i_k \in S$ が単射であるように選べることは容易に示せる（このとき $n \leq \#S - 1$）ので，それを $n < \#S - 1$ であれば $n < k \leq \#S - 1$ に対し $i_k := j$ と定めて延長することで $n = \#S - 1$ と仮定してよい．そこで以下この証明中では $n := \#S$ とし，各 $i, j \in S$ に対し (3) のような $\{i_k\}_{k=0}^{n-1} \subset S$ を 1 つ取りそれを $\{i_k(i, j)\}_{k=0}^{n-1}$ とおく．また $K_i \cap K_j \neq \emptyset$ を満たすような各 $i, j \in S$ に対し $q(i, j) \in K_i \cap K_j$ を取っておき，さらに各 $x \in K$ に対し $x \in K_{i(x)}$ となるような $i(x) \in S$ を取っておく．

さて $x, y \in K$ とし，$\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$ を満たす連続写像 $\gamma : [0, 1] \to K$ を構成しよう．$\{w_{1,k}\}_{k=0}^{n-1} \subset W_1 = S$ を $w_{1,k} := i_k(i(x), i(y))$ で定義し，$\{x_{1,k}\}_{k=0}^n \subset K$ を $x_{1,0} := x, x_{1,n} := y, k \in \{1, \ldots, n-1\}$ に対し $x_{1,k} := q(w_{1,k-1}, w_{1,k})$ で定める．定義から $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ に対し $x_{1,k}, x_{1,k+1} \in K_{w_{1,k}}$ であることに注意する．次に $m \in \mathbb{N}$ とし，$\{w_{m,k}\}_{k=0}^{n^m-1} \subset W_m$ と $\{x_{m,k}\}_{k=0}^{n^m} \subset K$ で任意の $k \in \{0, \ldots, n^m - 1\}$ に対し $x_{m,k}, x_{m,k+1} \in K_{w_{m,k}}$ を満たすものが与えられたと仮定する．このとき $k \in \{0, \ldots n^m - 1\}$ に対し，まず $\{i_{m+1,l}\}_{l=kn}^{(k+1)n-1} \subset S$ を

$$i_{m+1,l} := i_{l-kn}\Big(i\big(F_{w_{m,k}}^{-1}(x_{m,k})\big), i\big(F_{w_{m,k}}^{-1}(x_{m,k+1})\big)\Big)$$

で定める．次に $\{w_{m+1,l}\}_{l=kn}^{(k+1)n-1} \subset W_{m+1}$ を $w_{m+1,l} := w_{m,k} i_{m+1,l}$ で定め，$\{x_{m+1,l}\}_{l=kn}^{(k+1)n} \subset K$ を $x_{m+1,kn} := x_{m,k}$, $x_{m+1,(k+1)n} := x_{m,k+1}$, $l \in \{kn + 1, \ldots, (k + 1)n - 1\}$ に対し $x_{m+1,l} := F_{w_{m,k}}\big(q(i_{m+1,l-1}, i_{m+1,l})\big)$ で定める．すると再び定義により $l \in \{kn, \ldots, (k + 1)n - 1\}$ に対し $x_{m+1,l}, x_{m+1,l+1} \in K_{w_{m+1,l}}$ であり，$k \in \{0, \ldots n^m - 1\}$ は任意なので結局任意の $l \in \{0, \ldots, n^{m+1} - 1\}$ に対し $x_{m+1,l}, x_{m+1,l+1} \in K_{w_{m+1,l}}$ が得られる．従って，本段落冒頭の $\{w_{1,k}\}_{k=0}^{n-1} \subset W_1$ と $\{x_{1,k}\}_{k=0}^n \subset K$ から始めて上記の構成を帰納的に行えば，各 $m \in \mathbb{N}$ に対し $\{w_{m,k}\}_{k=0}^{n^m-1} \subset W_m$ と $\{x_{m,k}\}_{k=0}^{n^m} \subset K$ が得られる．このとき構成方法から，$m \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, \ldots, n^m - 1\}$ に対し

$$x_{m,k}, x_{m,k+1} \in K_{w_{m,k}}, \qquad \bigcup_{l=kn}^{(k+1)n-1} \Sigma_{w_{m+1,l}} \subset \Sigma_{w_{m,k}} \tag{1.18}$$

であり，また

$$m \in \mathbb{N} \text{ と } k \in \{0, \ldots, n^m\} \text{ に対し} \quad x_{m+1,kn} = x_{m,k}. \tag{1.19}$$

そこで $A_n := \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \{kn^{-m} \mid k \in \{0, \ldots, n^m\}\}$ とおき，$\gamma : A_n \to K$ を $t \in A_n$ に対し $t = kn^{-m}$ となる $m \in \mathbb{N}, k \in \{0, \ldots, n^m\}$ を任意に取って $\gamma(t) := x_{m,k}$ で定める（(1.19) によりこの定義は $t = kn^{-m}$ となる m, k の取り方には依存しない）．このとき，$m \in \mathbb{N}, k \in \{0, \ldots, n^m - 1\}$ とすると，任意の $j \in \mathbb{N}$ と任意の $l \in \{kn^j, \ldots, (k + 1)n^j - 1\}$ に対し $x_{m+j,l}, x_{m+j,l+1} \in K_{w_{m+j,l}} \subset K_{w_{m,k}}$ であることが (1.18) を用いて j についての数学的帰納法により容易に確認できるので，$\gamma\big(A_n \cap [kn^{-m}, (k + 1)n^{-m}]\big) \subset K_{w_{m,k}}$ となる．従って ρ を K の位相に適合した K 上の距離関数とすると，$|s - t| \leq n^{-m}$ を満たす任意の $s, t \in A_n$ に対し $\rho(\gamma(s), \gamma(t)) \leq 2 \max_{w \in W_m} \operatorname{diam}_\rho K_w$ となり，これと (1.10) より γ は A_n から (K, ρ) への写像として一様連続であることが分かる．そこで (K, ρ) がコンパクト，従って完備であることと次の演習 1.9-(1) により，$\widetilde{\gamma}|_{A_n} = \gamma$ を満たす連続写像

$\widetilde{\gamma} : \overline{A_n}^{\mathbb{R}} = [0,1] \to K$ が唯 1 つ存在し，さらにこの $\widetilde{\gamma}$ は $\widetilde{\gamma}(0) = \gamma(0) = x_{1,0} = x$, $\widetilde{\gamma}(1) = \gamma(1) = x_{1,n} = y$ を満たす．ゆえに K は弧状連結である． $\square$

上の定理 1.48 の (3) $\Rightarrow$ (2) の証明の中で次の演習 1.9-(1) の事実を用いた．

演習 1.9. $(X, \rho_X), (Y, \rho_Y)$ は距離空間で (Y, ρ_Y) は完備であるとする．$Z \subset X$, $Z \neq \emptyset$ とし，$f : Z \to Y$ は（距離関数 ρ_X, ρ_Y について）一様連続であるとする．
(1) $g|_Z = f$ を満たす連続写像 $g : \overline{Z}^X \to Y$ が唯 1 つ存在することを示せ．
(2) g は（距離関数 ρ_X, ρ_Y について）一様連続であることを示せ．

系 1.49. K が連結ならば，K は局所弧状連結である，すなわち任意の $x \in K$ に対し $\{U \subset K \mid U$ は弧状連結で $x \in \mathrm{int}_K U\}$ が K における x の基本近傍系をなす．

証明. 定理 1.48 より K は弧状連結なので，任意の $w \in W_*$ に対し $K_w = F_w(K)$ は弧状連結である．そこで $x \in K$ とすると，任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $K_{m,x} := \bigcup_{w \in W_m, x \in K_w} K_w$ は弧状連結であり，従って命題 1.26 により $\{K_{m,x}\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ は弧状連結な K の部分集合からなる，K における x の基本近傍系である． $\square$

定理 1.50. $\#K \geq 2, \#V_0 < \infty$ かつ K は連結と仮定する．このとき $\#S \geq 2, \#V_0 \geq 2$, $\overline{V_*}^K = K \neq \overline{V_0}^K = V_0$ であり，さらに任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $V_m \subsetneqq V_{m+1}$.

証明. $\#K \geq 2$ と $\pi : \Sigma = \Sigma(S) \to K$ の全射性から $\#S \geq 2$ である．$V_0 = \emptyset$ と仮定すると命題 1.24-(3) より $\pi : \Sigma \to K$ は単射，従って同相写像となるが，$\#S \geq 2$ より $\Sigma = \Sigma(S)$ は連結でないのでこれは K が連結という仮定に反する．従って $V_0 \neq \emptyset$ であり，特に命題 1.24-(4) より $\overline{V_*}^K = K$. $\#V_0 < \infty$ より $\overline{V_0}^K = V_0$ であり，また $K = V_0$ とすると K が連結かつ $\#K \geq 2$ であることに反するので $K \neq V_0$.

次に $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とし $V_m = V_{m+1}$ と仮定すると，(1.9) より帰納的に $n \geq m$ であるような任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $V_m = V_n$, よって命題 1.24-(4) より $V_* = V_m$ となるが，このとき $\#V_0 < \infty$ より $\#V_m < \infty$ であるので $K = \overline{V_*}^K = \overline{V_m}^K = V_m$ となり，K が連結かつ $\#K \geq 2$ であることに矛盾する．よって $V_m \subsetneqq V_{m+1}$.

最後に，$\#V_0 \geq 2$ を示す為に $\#V_0 = 1$ と仮定する．$i, j \in S, i \neq j$ とすると，定理 1.48 により $n \in \mathbb{N}$ と $\{i_k\}_{k=0}^n \subset S$ を $i_0 = i, i_n = j$ かつ任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $K_{i_{k-1}} \cap K_{i_k} \neq \emptyset$ となるように取れるが，定理 1.48 の (3) $\Rightarrow$ (2) の証明中でも触れたようにこの n と $\{i_k\}_{k=0}^n$ は $\{0, \ldots, n\} \ni k \mapsto i_k \in S$ が単射であるように取ることができる．すると $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $i_{k-1} \neq i_k$ なので命題 1.24-(2) により $F_{i_{k-1}}(V_0) \cap F_{i_k}(V_0) = K_{i_{k-1}} \cap K_{i_k} \neq \emptyset$, よって $\#V_0 = 1$ より $F_{i_{k-1}}(V_0) = F_{i_k}(V_0)$ となり，従って $F_i(V_0) = F_{i_0}(V_0) = F_{i_n}(V_0) = F_j(V_0)$. すなわち任意の $i, j \in S$ に対し $F_i(V_0) = F_j(V_0)$, よって $i \in S$ に対し $V_1 = \bigcup_{j \in S} F_j(V_0) = F_i(V_0)$, 従って $\#V_1 = 1$ となり $\emptyset \neq V_0 \subsetneqq V_1$ であることに矛盾する．よって $\#V_0 \geq 2$ である． $\square$

第 1 章参考文献

1.1 節の記述は [21, Section 1.1] に従っており，演習 1.1 は [21, Exercise 1.1] から採った．

1.2 節は [21, Section 1.2] の前半部分に従った．

1.3 節はほぼ [21, Section 1.3] に従っているが，自己相似構造 $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i \in S})$ が（$\{F_i\}_{i \in S}$ に重複がないという意味で）極小 (minimal) である為の条件を与える

[21, Theorem 1.3.8] は，具体例においては問題になることがまずないため本稿では省略した．その他，定義 1.28-(2) は [23, Definition 1.2.1-(3)] から採ったものであり，また命題 1.29 は [21, Proof of Lemma 4.2.3] による．命題 1.30 は前半の主張は [21, Proposition 1.2.4] から採ったものであり，後半の主張は p.-c.f. 自己相似構造に対する [21, Lemma 1.3.14] の弱有限な自己相似構造への拡張である．

1.4 節は [21, Examples 1.2.6–1.2.9, 1.3.15–1.3.17 and Exercise 1.3] の記述をより詳しく補ったものである．

1.5 節の記述は（測度論についての基本事項である定理 1.46，定理 1.47 とその直接の帰結である定理 1.40 を除いて）主に [23, Section 1.2] に従った．定理 1.42 は [21, Proposition 1.4.4] の細部を補ったものである．定理 1.45 については，定理 1.45-(1),(2),(3) は [21, Lemma 3.4.1] に，定理 1.45-(4) は [23, Theorem 1.2.4] による．

1.6 節の記述は概ね [21, Section 1.6] の前半部分に従った．定理 1.48 は畑 [13] により得られたものである．ここでは [21, Theorem 1.6.2] の記述と証明に概ね倣ったが，(3) $\Rightarrow$ (2) の証明については表現を少し改め詳細を補った．系 1.49 は [21, Proposition 1.6.4] から採った．定理 1.50 は [21, Section 1.6, Chapters 3–5 and Appendix A] において，明確な言及のないまま議論の前提として至る所で暗に使われており，ここでは [21] を補完する目的でその主張と証明を述べた．

なお難しい証明を要するため本稿では触れないが，[21, Section 1.6] の後半では K が連結であるような p.-c.f. 自己相似構造 $\mathcal{L} = (K, S, \{F_i\}_{i\in S})$ に対して，$K \setminus V_0$ の連結成分の構造の詳細な解析がなされているので合わせて参照されたい．

第 2 章

抵抗形式と有効抵抗距離

本章では，第 3 章で自己相似フラクタル上に Laplacian を構成するための準備として，抵抗形式とそこから生じる対称正則 Dirichlet 形式の一般論を取り扱う．

対称正則 Dirichlet 形式とは，Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の（適当な滑らかさを持つ）関数 u, v に対して定義される双線型形式

$$\mathcal{E}(u,v) := \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx \tag{2.1}$$

を抽象的に一般化した概念である．双線型形式 (2.1) が部分積分の公式

$$\int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = -\int_{\mathbb{R}^d} v \Delta u dx \tag{2.2}$$

により $\mathbb{R}^d$ 上の通常の Laplacian Δ との自然な対応関係を持つように，対称正則 Dirichlet 形式が与えられると L^2-内積を経由して Laplacian に相当する（自己共役で，一般に有界とは限らない）作用素を自然に定めることができる．

また確率論的な対応物として，$\mathbb{R}^d$ 上にはよく知られているように Brown 運動（Wiener 過程）$B = (\{B_t\}_{t\in[0,\infty)}, \{\mathbb{P}_x\}_{x\in\mathbb{R}^d})$ が定義され，その性質から（多少の面倒な計算は必要になるが，比較的容易に）

$$\lim_{t\downarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[u(B_{2t})] - u(x)}{t} = \Delta u(x) \tag{2.3}$$

が適当な滑らかさと可積分性を持つ関数 u に対して成り立つことが証明される．関係式 (2.3) の一般化として対称正則 Dirichlet 形式に対しては，適当に良い性質を持つ確率過程 $X = \{X_t\}$ で，(2.3) に相当する関係式を（L^2-ノルム収束の意味で）満たすものが存在することが知られている．

さらに Brown 運動 $B = \{B_t\}_{t\in[0,\infty)}$ についてはその見本路 $[0,\infty) \ni t \mapsto B_t(\omega)$ は連続であるが，この性質は対応する Dirichlet 形式の局所性

$$\mathrm{supp}_{\mathbb{R}^d}[u] \cap \mathrm{supp}_{\mathbb{R}^d}[v] = \emptyset \quad \Longrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}^d} \langle \nabla u, \nabla v \rangle dx = 0 \tag{2.4}$$

により特徴付けられる．すなわち，対称正則 Dirichlet 形式に対応する確率過程 $X = \{X_t\}$ が連続な見本路を持つためには，元の Dirichlet 形式が (2.4) に相当する

局所性を持つという意味で局所的であることが必要十分である．（上記の対称正則 Dirichlet 形式の一般論について詳細は [11, 9] を参照のこと．）

さて，我々の目標は自己相似フラクタルにおいて自然な Laplacian や熱方程式を定式化することであった．フラクタルとしては連結（従って定理 1.48 により弧状連結）なものを考えており，すると「熱は空間を連続的に伝わる」と考えるのが自然であるから，Laplacian に対応する確率過程は連続な見本路を持つことが当然に要求される．そこで上記の対称正則 Dirichlet 形式の一般論を考慮すると，自己相似フラクタル上に（非自明で）局所的な対称正則 Dirichlet 形式を構成することさえできれば，あとは [11, 9] にある一般論を適用することで Laplacian やそれに (2.3) の意味で対応する確率過程も自動的に得られ，Laplacian の構成という我々の目標が達成される．そこで**（非自明で）局所的な対称正則 Dirichlet 形式を自己相似フラクタル上に構成すればよい**ことになる．

その方法として，素朴には次のようなものが考えられる：

1. 与えられた自己相似フラクタル K を有限部分集合の増大列 $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ により近似する．

2. 各 V_m 上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}^{(m)}:\mathbb{R}^{V_m}\times\mathbb{R}^{V_m}\to\mathbb{R}$ をとる．

3. $\{(V_m,\mathcal{E}^{(m)})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を適切に選んでその「$m\to\infty$ とした極限」を取ることにより，K 上の（非自明で自然な）対称正則 Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ が得られる．

このアイデアを実行するのは非常に難しいのが普通である[1]が，実は p.-c.f. 自己相似構造（定義 1.15 参照）に対しては定義 1.21 の $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を考えることで，比較的平易な議論により上記のアイデアを実行することができる．さらに各 $\mathcal{E}^{(m)}$ が極限の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ の V_m への「制限」（あるいは，$\mathcal{E}$ が $\{(V_m,\mathcal{E}^{(m)})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ の「帰納極限」[2]）になっていることが分かり，そのことから $\mathcal{E}$ について色々と具体的な計算を行うことが可能になる．以上のことを証明し，それにより p.-c.f. 自己相似構造上の局所的な Dirichlet 形式を得るのが第 3 章の目標である．

本章ではその準備として，主に [21, Chapter 2] に従い有限集合上の Dirichlet 形式の列の「帰納極限」についての一般論を展開する．具体的には，まず 2.1 節で有限集合上の Dirichlet 形式[3]の性質を詳しく調べる．そこで見るように，有限集合 V において Dirichlet 形式 $\mathcal{E}$ を考えることは V に連結な電気回路の構造を導入することに他ならず，そこで自然に定まる 2 点 $x,y\in V$ の間の「有効抵抗」$R_{\mathcal{E}}(x,y)$ を考えると実は $R_{\mathcal{E}}$ は V 上の距離関数になる．この「有効抵抗距離」の概念が本章では（従って p.-c.f. 自己相似構造上の Laplacian の構成と解析にも）極めて重要な役割を果たす．続いて 2.2 節で，有限集合 V_m とその上の Dirichlet 形式 $\mathcal{E}^{(m)}$ の列 $\mathcal{S}=\{(V_m,\mathcal{E}^{(m)})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ の自然な「帰納極限」を取ることができるための条件を与え，さらに極限として得られる可算集合 $\bigcup_{m=0}^{\infty}V_m$ 上の双線型形式 $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ の基本性質を述べる．2.3 節では，2.2 節の $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ と同様の性質を有する，可算とは限

[1]例えば Sierpiński carpet に対してはこれは楠岡-Zhou [27] によりなされたが，そこでの証明は複雑な計算による幾つもの精密な不等式評価の積み重ねであり，細部まで正確に理解するのはかなり骨が折れる．以前筆者が [27] を読んだときには，途中の計算を追うことはできた（と思う）がその計算に至る発想の由来は全然分からなかった．

[2]「帰納極限」という語はここでは「極限値の『有限の段階への制限』が極限を取る前の値に一致するという性質を満たすような極限概念」の意味に用いている．

[3]本章で取り扱う有限集合上の Dirichlet 形式は，正確には Dirichlet 形式の一般論で言うところの「既約再帰的な」Dirichlet 形式である．定義 2.2 とその直前の記述を参照のこと．

らない一般の集合上で定義された双線型形式を「抵抗形式」として定式化しその一般論を展開する．特に，任意の抵抗形式が有限集合上の Dirichlet 形式の「帰納極限」として記述できること，有効抵抗距離に関する完備化を考えることにより 2.2 節の $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ から自然に非可算集合上の抵抗形式が得られること，及び Green 関数が抵抗形式の再生核として自然に定まりかつ有効抵抗距離を用いて具体的に表現されることを示す．最後に 2.4 節では，ある条件の下では抵抗形式を [11, 9] の意味での対称正則 Dirichlet 形式と見なせることを示す．

なお第 0 章末尾で触れたように，本章の内容は（定理 2.40 の証明に演習 1.9-(1) の結果を用いていること以外は）第 1 章とは独立しており，第 1 章を読まずに直接本章を読むことも可能な構成になっているので留意されたい．

2.1 有限集合上の抵抗形式と有効抵抗距離

本節では有限集合上の Dirichlet 形式と対応する有効抵抗距離の基本性質を取り扱う．まず，本節を通して使われる記号を 3 つ準備する．

記号. (1) K を空でない集合とする．$A \subset K$ に対し $\mathbf{1}_A^K \in \mathbb{R}^K = \{u \mid u : K \to \mathbb{R}\}$ を

$$\mathbf{1}_A^K(x) := \begin{cases} 1 & x \in A, \\ 0 & x \in K \setminus A, \end{cases} \tag{2.5}$$

で定める．誤解の恐れがない場合には，K を省略してこれを単に $\mathbf{1}_A$ と書く．また $x \in K$ に対し $\mathbf{1}_{\{x\}}^K, \mathbf{1}_{\{x\}}$ をそれぞれ単に $\mathbf{1}_x^K, \mathbf{1}_x$ と書く．
(2) 空でない有限集合 V に対し，$\mathbb{R}^V$ 上の内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ を次で定める：

$$\langle u, v \rangle_V := \sum_{x \in V} u(x)v(x), \quad u, v \in \mathbb{R}^V. \tag{2.6}$$

(3) U, V を空でない有限集合とする．線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^U$ に対し $L_{xy} := (L\mathbf{1}_y^V)(x)$ により行列 $(L_{xy})_{x \in U, y \in V} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ を定める．容易に分かるように，$L \mapsto (L_{xy})_{x \in U, y \in V}$ は線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^U$ の全体から行列 $(L_{xy})_{x \in U, y \in V} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ の全体への線型同型であり，以下この線型同型により線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^U$ と行列 $(L_{xy})_{x \in U, y \in V} = \big((L\mathbf{1}_y^V)(x)\big)_{x \in U, y \in V} \in \mathbb{R}^{U \times V}$ を同一視する．

さらに $U = V$ のとき，線型写像 $L : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^V$ に対し双線型形式 $\mathcal{E}_L : \mathbb{R}^V \times \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{E}_L(u, v) := \langle u, -Lv \rangle_V$ で定める．L が内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle_V$ について対称（すなわち双線型形式 $\mathcal{E}_L$ が対称）であるためには L に対応する行列 $(L_{xy})_{x,y \in V}$ が対称行列であることが必要十分であることを注意しておく．

まず，次の基本的な事実を思い出しておく．

命題 2.1 (Cauchy-Schwarz の不等式)**.** $\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}$ 上の線型空間とし，$\mathcal{E} : \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を $\mathcal{F}$ 上の非負定値対称双線型形式とする．このとき任意の $u, v \in \mathcal{F}$ に対し

$$|\mathcal{E}(u, v)| \le \mathcal{E}(u, u)^{1/2} \mathcal{E}(v, v)^{1/2}, \tag{2.7}$$

$$\mathcal{E}(u + v, u + v)^{1/2} \le \mathcal{E}(u, u)^{1/2} + \mathcal{E}(v, v)^{1/2}. \tag{2.8}$$

証明. $u, v \in \mathcal{F}, t \in \mathbb{R}$ とする．$\mathcal{E}$ は非負定値対称双線型なので

$$0 \leq \mathcal{E}(u + tv, u + tv) = \mathcal{E}(u, u) + 2t\mathcal{E}(u, v) + t^2\mathcal{E}(v, v). \tag{2.9}$$

$\mathcal{E}(v, v) = 0$ のときは，(2.9) より任意の $t \in (0, \infty)$ に対し $|\mathcal{E}(u, v)| \leq t^{-1}\mathcal{E}(u, u)$ であり，従って $\mathcal{E}(u, v) = 0$ となり (2.7) が成り立つ．$\mathcal{E}(v, v) > 0$ のときは，(2.9) で $t := -\mathcal{E}(u, v)/\mathcal{E}(v, v)$ とおくことで $0 \leq \mathcal{E}(u, u)\mathcal{E}(v, v) - \mathcal{E}(u, v)^2$ となり (2.7) を得る．さらに (2.9) で $t = 1$ として (2.7) を用いれば直ちに (2.8) が従う． □

有限集合上の（既約再帰的な）Dirichlet 形式は次で定義される．なお，有限集合に対しては次の定義は後に 2.3 節で与える抵抗形式の定義（定義 2.26）と一致するため，用語の統一のため最初からこれを抵抗形式と呼ぶことにする．

定義 2.2 (有限集合上の抵抗形式)**.** V を空でない有限集合とする．$\mathbb{R}^V$ 上の非負定値対称双線型形式 $\mathcal{E} : \mathbb{R}^V \times \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}$ が次の 2 条件を満たすとき，$\mathcal{E}$ は V 上の**抵抗形式** (resistance form) であるという：
(RF1)$_{\mathrm{fin}}$ $\{u \in \mathbb{R}^V \mid \mathcal{E}(u, u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_V$.
(RF2)$_{\mathrm{fin}}$（Markov 性）任意の $u \in \mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u, u)$.
　さらに $\mathcal{RF}(V) := \{\mathcal{E} \mid \mathcal{E}$ は V 上の抵抗形式$\}$ とおく．

定義 2.3 (有限集合上の Laplacian)**.** V を空でない有限集合とする．$\mathbb{R}^V$ 上の対称線型写像 $L = (L_{xy})_{x,y \in V} : \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^V$ が次の 2 条件を満たすとき，L は V 上の **Laplacian** であるという：
(LA1) $\{u \in \mathbb{R}^V \mid Lu = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_V$.
(LA2) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V$ に対し $L_{xy} \geq 0$.
　さらに $\mathcal{LA}(V) := \{L \mid L$ は V 上の Laplacian$\}$ とおく．

定義 2.4 (有限集合上の抵抗網構造)**.** V を空でない有限集合とする．次の 2 条件を満たす $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y \in V, x \neq y} \subset (0, \infty]$ を V 上の**抵抗網構造** (resistor network structure) という：
(RN1) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V$ に対し $r_{xy} = r_{yx}$.
(RN2) $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V$ に対し，$n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^n \subset V$ が存在して，$x_0 = x, x_n = y$, かつ任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $x_{k-1} \neq x_k$ かつ $r_{x_{k-1}x_k} < \infty$.
　さらに $\mathcal{RN}(V) := \{\boldsymbol{r} \mid \boldsymbol{r}$ は V 上の抵抗網構造$\}$ とおく．

次の命題に述べるように，$\mathcal{RF}(V), \mathcal{LA}(V), \mathcal{RN}(V)$ の間には自然な全単射が存在し，これにより $\mathcal{E} \in \mathcal{RF}(V)$ は対応する $L_{\mathcal{E}} \in \mathcal{LA}(V)$ 及び $\boldsymbol{r}_{L_{\mathcal{E}}} \in \mathcal{RN}(V)$ と自然に同一視される．

命題 2.5. V を空でない有限集合とする．
(1) $L \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $\mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$ であり，$\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$ は全単射でその逆写像は $\mathcal{RF}(V) \ni \mathcal{E} \mapsto L_{\mathcal{E}} := (-\mathcal{E}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y))_{x,y \in V}$ で与えられる．
(2) $L = (L_{xy})_{x,y \in V} \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $\boldsymbol{r}_L := (L_{xy}^{-1})_{x,y \in V, x \neq y} \subset (0, \infty]$ $(0^{-1} := \infty)$ とおくと $\boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$. また $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y \in V, x \neq y} \in \mathcal{RN}(V)$ に対し $L_{\boldsymbol{r}} = (L_{xy})_{x,y \in V} \in \mathbb{R}^{V \times V}$ を $x \neq y$ のとき $L_{xy} := r_{xy}^{-1}$, $x = y$ のとき $L_{xx} := -\sum_{z \in V \setminus \{x\}} r_{xz}^{-1}$ $(\infty^{-1} := 0)$ により定めると $L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$. さらに $\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ と $\mathcal{RN}(V) \ni \boldsymbol{r} \mapsto L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$ は互いに逆の全単射である．

証明. (1) $L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V)$ とし，$u \in \mathbb{R}^V$ とする．(LA1) と L の対称性より任意の $x \in V$ に対し $\sum_{y\in V} L_{xy} = \sum_{y\in V} L_{yx} = 0$ であるので，(LA2) より

$$\mathcal{E}_L(u,u) = -\sum_{x,y\in V} L_{xy}u(x)u(y) = \frac{1}{2}\sum_{x,y\in V} L_{xy}(u(x)-u(y))^2 \geq 0. \tag{2.10}$$

すると $\mathcal{E}_L$ は $\mathbb{R}^V$ 上の非負定値対称双線型形式となるので，$\mathcal{E}_L(u,u) = 0$ とすると (2.7) により $\langle Lu, Lu\rangle_V = \mathcal{E}_L(-Lu,u) = 0$, 従って $Lu = 0$ となり，(LA1) より $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$. 逆に $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ のとき $Lu = 0$ より $\mathcal{E}_L(u,u) = \langle u, -Lu\rangle_V = 0$. さらに任意の $x,y \in V$ に対し $|(u^+ \wedge 1)(x) - (u^+ \wedge 1)(y)| \leq |u(x)-u(y)|$ であるので，(2.10) より $\mathcal{E}_L(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}_L(u,u)$. 以上から $\mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$. また明らかに $L_{\mathcal{E}_L} = (-\mathcal{E}_L(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y))_{x,y\in V} = L$ であり，特に $\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \mathcal{E}_L \in \mathcal{RF}(V)$ は単射である．

次に $\mathcal{E} \in \mathcal{RF}(V)$ とし，$L_\mathcal{E} = (-\mathcal{E}(\mathbf{1}_x, \mathbf{1}_y))_{x,y\in V} =: (L_{xy})_{x,y\in V}$ とおく．明らかに $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{L_\mathcal{E}}$ であるので，前段落を考慮すると $L_\mathcal{E} \in \mathcal{LA}(V)$ を示せば (1) の証明が完了する．$\mathcal{E}$ の対称性から $L_\mathcal{E}$ は対称である．$u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ ならば $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $\mathcal{E}(u,u) = 0$, 従って (2.7) より $\langle L_\mathcal{E}u, L_\mathcal{E}u\rangle_V = -\mathcal{E}(L_\mathcal{E}u, u) = 0$ となり，よって $L_\mathcal{E}u = 0$. 逆に $u \in \mathbb{R}^V$, $L_\mathcal{E}u = 0$ ならば $\mathcal{E}(u,u) = \langle u, -L_\mathcal{E}u\rangle_V = 0$ となり $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$. 次に (LA2) を示すために $x,y \in V$, $x \neq y$ とする．$\varepsilon \in (0,\infty)$ とし $u := \mathbf{1}_x - \varepsilon\mathbf{1}_y \in \mathbb{R}^V$ とおくと，$u^+ \wedge 1 = \mathbf{1}_x$ であるので $(\mathrm{RF2})_{\mathrm{fin}}$ により

$$-L_{xx} + 2\varepsilon L_{xy} - \varepsilon^2 L_{yy} = \mathcal{E}(u,u) \geq \mathcal{E}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) = -L_{xx},$$

従って $L_{xy} \geq (\varepsilon/2)L_{yy}$ となり，$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意であるので $L_{xy} \geq 0$. よって $L_\mathcal{E}$ が (LA2) を満たすことが分かり，$L_\mathcal{E} \in \mathcal{LA}(V)$.

(2) $L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V)$ とする．L は対称なので $\boldsymbol{r}_L = (L_{xy}^{-1})_{x,y\in V, x\neq y} =: (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y}$ は (RN1) を満たす．(RN2) を示すために，$x \in V$ とし

$$V_L^x := \{x\} \cup \left\{ y \in V \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \text{ と } \{x_k\}_{k=0}^n \subset V \text{ が存在して，} x_0 = x, x_n = y, \text{かつ} \\ \text{任意の } k \in \{1,\ldots,n\} \text{ に対し } x_{k-1} \neq x_k \text{ かつ } r_{x_{k-1}x_k} < \infty \end{array} \right\} \tag{2.11}$$

とおく．すると V_L^x の定義 (2.11) から $y \in V_L^x$, $z \in V \setminus V_L^x$ に対し $r_{yz} = r_{zy} = \infty$, すなわち $L_{yz} = L_{zy} = 0$ でなければならず，このとき $L\mathbf{1}_V = 0$ より $L\mathbf{1}_{V_L^x} = 0$ が得られる．従って (LA1) より $\mathbf{1}_{V_L^x} \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ であり，$\mathbf{1}_{V_L^x}(x) = 1$ より $\mathbf{1}_{V_L^x} = \mathbf{1}_V$, すなわち $V_L^x = V$. これは (RN2) を意味し，よって $\boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ が従う．

逆に $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} \in \mathcal{RN}(V)$ とし $L_{\boldsymbol{r}} = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathbb{R}^{V\times V}$ を主張のように定める．$L_{\boldsymbol{r}}$ はその定義より (LA2) と $L_{\boldsymbol{r}}\mathbf{1}_V = 0$ を満たし，(RN1) より対称である．次に $u \in \mathbb{R}^V$ は $L_{\boldsymbol{r}}u = 0$ を満たすとし，$u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ を示すために $x \in V$ を $u(x) = \max_{z\in V} u(z)$ となるように取る．$y \in V \setminus \{x\}$ とし，(RN2) のように $n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^n \subset V$ を取る．このとき $u(x_0) = u(x) = \max_{z\in V} u(z)$ に注意し，$k \in \{1,\ldots,n\}$, $u(x_{k-1}) = \max_{z\in V} u(z)$ と仮定すると，$r_{x_{k-1}x_k} \in (0,\infty)$ であり

$$0 = (L_{\boldsymbol{r}}u)(x_{k-1}) = \sum_{z\in V\setminus\{x_{k-1}\}} r_{x_{k-1}z}^{-1}(u(z) - u(x_{k-1})) \leq \frac{u(x_k) - u(x_{k-1})}{r_{x_{k-1}x_k}} \leq 0$$

なので $u(x_k) = u(x_{k-1}) = \max_{z\in V} u(z)$. 従って k についての数学的帰納法により $u(y) = u(x_n) = u(x)$ となり，$y \in V \setminus \{x\}$ は任意なので $u = u(x)\mathbf{1}_V \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$. よって $L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$ である．

最後に，容易に確認できるように任意の $L \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $L_{\boldsymbol{r}_L} = L$, また任意の $\boldsymbol{r} \in \mathcal{RN}(V)$ に対し $\boldsymbol{r}_{L_{\boldsymbol{r}}} = \boldsymbol{r}$ であるので，$\mathcal{LA}(V) \ni L \mapsto \boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ と $\mathcal{RN}(V) \ni \boldsymbol{r} \mapsto L_{\boldsymbol{r}} \in \mathcal{LA}(V)$ は互いに逆の全単射である． □

注意 2.6. V を空でない有限集合，$\mathcal{E} \in \mathcal{RF}(V)$ とし，$L = (L_{xy})_{x,y\in V} := L_{\mathcal{E}} \in \mathcal{LA}(V)$, $\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} := \boldsymbol{r}_{L_{\mathcal{E}}} \in \mathcal{RN}(V)$ をそれぞれ命題 2.5 の意味で $\mathcal{E}$ に対応する V 上の Laplacian 及び抵抗網構造とする．このとき $x, y \in V$, $x \neq y$ に対し，$r_{xy} < \infty$ なら x と y は抵抗値 r_{xy} の抵抗器により接続されており，$r_{xy} = \infty$ なら x と y は抵抗器により直接接続されてはいないと考えることにより，V には抵抗器のネットワーク構造が備わっていると見なすことができる．このとき (2.10) より $u \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\mathcal{E}(u,u) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{x,y\in V, x\neq y \\ r_{xy}<\infty}} \frac{(u(x) - u(y))^2}{r_{xy}} \tag{2.12}$$

であるが，(2.12) の右辺は

「抵抗網 $(V, \boldsymbol{r})$ に電位 $u = (u(x))_{x\in V}$ を与えたときの V 上での総消費電力」

に他ならない．$\mathcal{RF}(V)$ の元を V 上の抵抗形式と呼ぶのはこのことに由来する．

次に，抵抗形式の部分集合への「制限」について考察する．

補題 2.7. V を有限集合とし，$U \subsetneqq V$, $U \neq \emptyset$ とする．$L \in \mathcal{LA}(V)$ とし，$T = T_U \in \mathbb{R}^{U\times U}$, $J = J_U \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times U}$, $X = X_U \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times(V\setminus U)}$ を，L の $U, U \setminus V$ の各成分への分割

$$L = \begin{pmatrix} T & J^* \\ J & X \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_U & J_U^* \\ J_U & X_U \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

により定める．このとき X は負定値対称行列であり，また任意の $u \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_L(u,u) = \mathcal{E}_X(u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U), u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U)) \\ + \mathcal{E}_{T-J^*X^{-1}J}(u|_U, u|_U).\end{aligned} \tag{2.14}$$

証明. L は対称なので，(2.13) より X も対称である．$v \in \mathbb{R}^{V\setminus U}$ とし，$\tilde{v} \in \mathbb{R}^V$ を $\tilde{v}|_{V\setminus U} := v$, $\tilde{v}|_U := 0$ により定めると，$\mathcal{E}_X(v,v) = \mathcal{E}_L(\tilde{v},\tilde{v}) \geq 0$ なので $\mathcal{E}_X$ は非負定値であり，さらに $\mathcal{E}_X(v,v) = 0$ ならば $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $\tilde{v} \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ となるので $\tilde{v}|_U = 0$ $(U \neq \emptyset)$ により $\tilde{v} = 0$, よって $v = 0$ である．すなわち $\mathcal{E}_X$ は正定値であり，従って X は負定値である（ので X^{-1} が存在する）．最後に $u \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_X(u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U), u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U)) \\
&= \langle u|_{V\setminus U} + X^{-1}J(u|_U), -X(u|_{V\setminus U}) - J(u|_U)\rangle_{V\setminus U} \\
&= \langle u|_{V\setminus U}, -X(u|_{V\setminus U})\rangle_{V\setminus U} + 2\langle u|_{V\setminus U}, -J(u|_U)\rangle_{V\setminus U} + \langle u|_U, -J^*X^{-1}J(u|_U)\rangle_U \\
&= \mathcal{E}_L(u,u) + \langle u|_U, T(u|_U)\rangle_U + \langle u|_U, -J^*X^{-1}J(u|_U)\rangle_U \\
&= \mathcal{E}_L(u,u) - \mathcal{E}_{T-J^*X^{-1}J}(u|_U, u|_U)
\end{aligned}$$

となるので，(2.14) を得る． □

定理 2.8. V を有限集合とし，$U \subsetneq V, U \neq \emptyset$ とする．$L \in \mathcal{LA}(V)$ とし，$T \in \mathbb{R}^{U\times U}$, $J \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times U}$, $X \in \mathbb{R}^{(V\setminus U)\times(V\setminus U)}$ を (2.13) で定める．$u \in \mathbb{R}^U$ とし，$h_U(u) = h^L_U(u) \in \mathbb{R}^V$ を $h_U(u)|_U := u, h_U(u)|_{V\setminus U} := -X^{-1}Ju$ で定める．
(1) $h_U(u)$ は最小値 $\min_{v\in\mathbb{R}^V,\, v|_U=u} \mathcal{E}_L(v,v)$ を達成する唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^V$ である．
(2) $[L]_U := T - J^*X^{-1}J$ とおくと $[L]_U \in \mathcal{LA}(U)$ であり

$$\mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) = \mathcal{E}_L(h_U(u), h_U(u)) = \min_{v\in\mathbb{R}^V,\, v|_U=u} \mathcal{E}_L(v,v). \tag{2.15}$$

証明. $v \in \mathbb{R}^V, v|_U = u$ とすると補題 2.7 より X は負定値であるので，(2.14) から

$$\mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_X(v|_{V\setminus U} + X^{-1}Ju, v|_{V\setminus U} + X^{-1}Ju) + \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) \geq \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u)$$

であり，さらに上の不等式における等号成立は $v|_{V\setminus U} = -X^{-1}Ju = h_U(u)|_{V\setminus U}$，すなわち $v = h_U(u)$ と同値である．これで (1) と (2.15) が示せた．

次に $\mathcal{E}_{[L]_U} \in \mathcal{RF}(U)$ を示そう．L の対称性と (2.13) から $[L]_U$ は対称であり，(2.15) より $\mathcal{E}_{[L]_U}$ は対称で非負定値である．さらに (2.15) により，$\mathcal{E}_{[L]_U}(\mathbf{1}_U, \mathbf{1}_U) = 0$ であり，また $u \in \mathbb{R}^U, \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) = 0$ とすると $\mathcal{E}_L(h_U(u), h_U(u)) = 0$ なので $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $h_U(u) \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$, 従って $u = h_U(u)|_U \in \mathbb{R}\mathbf{1}_U$ である．最後に $u \in \mathbb{R}^U$ に対し，$(h_U(u)^+ \wedge 1)|_U = u^+ \wedge 1$ であるので (2.15) と $(\mathrm{RF2})_{\mathrm{fin}}$ により

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) &\geq \mathcal{E}_L(h_U(u)^+ \wedge 1, h_U(u)^+ \wedge 1)\\ &\geq \min_{v\in\mathbb{R}^V,\, v|_U=u^+\wedge 1} \mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_{[L]_U}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1).\end{aligned}$$

従って $\mathcal{E}_{[L]_U} \in \mathcal{RF}(U)$ であるので，命題 2.5-(1) より $[L]_U = L_{\mathcal{E}_{[L]_U}} \in \mathcal{LA}(U)$. □

注意 2.9. 定理 2.8 の状況を仮定する．
(1) $h_U(u)$ はその定義から，L に関する $V \setminus U$ 上での Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題

$$\begin{cases} Lv|_{V\setminus U} = 0 \\ v|_U = u \end{cases} \tag{2.16}$$

の唯 1 つの解 $v \in \mathbb{R}^V$ である．$Lv|_{V\setminus U} = 0$ は v が「L に関して $V \setminus U$ 上で調和」であることを意味しており，このことから $h_U(u)$ を $u \in \mathbb{R}^U$ の「L に関する（あるいは $\mathcal{E}_L$ に関する）V 上への**調和拡張** (harmonic extension)」と呼ぶことがある．

(2.16) の一意解 $h_U(u)$ が定理 2.8-(1) の最小値を達成する唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^V$ にもなっていることに注意されたい．つまり，L に対応する双線型形式 $\mathcal{E}_L$ の最小化問題 $\min_{v\in\mathbb{R}^V,\, v|_U=u} \mathcal{E}_L(v,v)$ の解を求めることは，L に関する Laplace 方程式の Dirichlet 境界値問題 (2.16) の解を求めることと同値なのである．同様の事実は Euclid 空間 $\mathbb{R}^d$ 上の通常の Laplacian（あるいはより一般に楕円型偏微分作用素）に対してはよく知られたことであるが，定理 2.8 はその「離散版」である．
(2) 定理 2.8-(2) の $[L]_U$ が

「$L \in \mathcal{LA}(V)$ の $U \subsetneq V$ への抵抗網としての制限」

を表している．この意味を説明するために，$v := h_U(u)$ に対する等式 $Lv|_{V\setminus U} = 0$ を「電気回路」的に解釈してみる．$\boldsymbol{r} = (r_{xy})_{x,y\in V, x\neq y} := \boldsymbol{r}_L \in \mathcal{RN}(V)$ とおくと

き，$(Lv)(x)$ を $\boldsymbol{r}$ を用いて書き換えると

$$(Lv)(x) = \sum_{y \in V \setminus \{x\},\, r_{xy} < \infty} \frac{v(y) - v(x)}{r_{xy}} \tag{2.17}$$

となるが，v を V の各点における電位と解釈すれば，(2.17) の右辺は電位 v の下での「x における総流入電流量と総流出電流量の差」を表していることになる．従って $Lv|_{V \setminus U} = 0$ とは

「各 $x \in V \setminus U$ において総流入電流量と総流出電流量が釣り合っている」，

言い換えると

「各 $x \in V \setminus U$ において電流の外部からの流入・外部への流出が起きていない」

ということを表している．中学・高等学校の理科で学んだのは，このような状況で回路の総消費電力を求めるためには，$V \setminus U$ の点を「ないもの」と見なして U における「合成抵抗」を求め，その「合成抵抗」と U の各点の電位 $u = v|_U$ から通常の方法で総消費電力を計算すればよい，ということであった．定理 2.8-(2) の $\mathcal{E}_{[L]_U}(u,u)$ がまさにこの「合成抵抗を用いた総消費電力の計算」であり，対応する U 上の Laplacian $[L]_U$ が「合成抵抗」を表している．つまり $[L]_U$ は

「抵抗網 L において $V \setminus U$ の点を『ないもの』と見なした『合成抵抗』網」

を表しており，この意味で $[L]_U$ は「L の $U \subsetneq V$ への抵抗網としての自然な制限」と考えられるのである．

「調和拡張作用素」$h_U = h_U^L : \mathbb{R}^U \to \mathbb{R}^V$ と「制限」$[L]_U$ についてはさらに次が成り立つ．空でない有限集合 V と $L \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $h_V = h_V^L := \mathrm{id}_{\mathbb{R}^V}$，$[L]_V := L$ と定める．このとき定理 2.8 の結論は全て $U = V$ の場合も含めて成り立つことに注意する．

命題 2.10. V を有限集合とし，U, W は V の部分集合で $\emptyset \neq W \subset U$ を満たすとする．このとき $L \in \mathcal{LA}(V)$ に対し $[[L]_U]_W = [L]_W$ かつ $h_U^L \circ h_W^{[L]_U} = h_W^L$.

証明. $w \in \mathbb{R}^W$ とする．$h_W^L(w)|_W = h_U^L \circ h_W^{[L]_U}(w)|_W = w$ であるので (2.15) より

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_{[L]_W}(w,w) = \mathcal{E}_L\bigl(h_W^L(w), h_W^L(w)\bigr) \\
&\geq \min_{v \in \mathbb{R}^V,\, v|_U = h_W^L(w)|_U} \mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_{[L]_U}\bigl(h_W^L(w)|_U, h_W^L(w)|_U\bigr) \\
&\geq \min_{u \in \mathbb{R}^U,\, u|_W = w} \mathcal{E}_{[L]_U}(u,u) = \mathcal{E}_{[[L]_U]_W}(w,w) = \mathcal{E}_{[L]_U}\bigl(h_W^{[L]_U}(w), h_W^{[L]_U}(w)\bigr) \\
&= \mathcal{E}_L\bigl(h_U^L \circ h_W^{[L]_U}(w), h_U^L \circ h_W^{[L]_U}(w)\bigr) \geq \min_{v \in \mathbb{R}^V,\, v|_W = w} \mathcal{E}_L(v,v) = \mathcal{E}_{[L]_W}(w,w).
\end{aligned}$$

よって上記の計算中の各辺は全て等しく，そこで定理 2.8-(1) の $h_W^L(w)$ の一意性の主張から $h_U^L \circ h_W^{[L]_U}(w) = h_W^L(w)$, すなわち $h_U^L \circ h_W^{[L]_U} = h_W^L$ を得る．また $\mathcal{E}_{[[L]_U]_W}(w,w) = \mathcal{E}_{[L]_W}(w,w)$ と $\mathcal{E}_{[[L]_U]_W}, \mathcal{E}_{[L]_W}$ の対称双線型性から $\mathcal{E}_{[[L]_U]_W} = \mathcal{E}_{[L]_W}$ となり，従って $[[L]_U]_W = L_{\mathcal{E}_{[[L]_U]_W}} = L_{\mathcal{E}_{[L]_W}} = [L]_W$. □

以下に $L \in \mathcal{LA}(V)$ に関する調和関数の基本性質を挙げる．注意 2.9-(1) 同様，これらの事実も $\mathbb{R}^d$ 上の通常の Laplacian に対してはよく知られたものである．

定理 2.11 (強最大値の原理)**.** V を有限集合とし，$U \subsetneq V, U \neq \emptyset$ とする．$L = (L_{xy})_{x,y\in V} \in \mathcal{LA}(V), x \in V \setminus U$ とし，$W_L^x \subset V \setminus U, U_L^x \subset U$ を次で定める：

$$W_L^x := \{x\} \cup \left\{ y \in V \setminus U \;\middle|\; \begin{array}{l} n \in \mathbb{N} \text{ と } \{x_k\}_{k=0}^n \subset V \setminus U \text{ が存在して，} x_0 = x, \\ x_n = y, \text{任意の } k \in \{1, \ldots, n\} \text{ に対し } L_{x_{k-1}x_k} > 0 \end{array} \right\},$$

$$U_L^x := \{y \in U \mid \text{ある } z \in W_L^x \text{ に対し } L_{yz} > 0\}. \tag{2.18}$$

(1) $U_L^x \neq \emptyset$ であり，任意の $y \in W_L^x$ に対し $\{z \in V \mid L_{yz} > 0\} \subset W_L^x \cup U_L^x$.
(2) $u \in \mathbb{R}^{W_L^x \cup U_L^x}$ とし，(1) より $(Lu)(y) = \sum_{z\in V, L_{yz}>0} L_{yz}(u(z) - u(y))$ が $y \in W_L^x$ に対し自然に定義されることに注意して $Lu|_{W_L^x} = 0$ と仮定する．このとき

$$\min_{q\in U_L^x} u(q) \leq \min_{q\in W_L^x} u(q) \leq \max_{q\in W_L^x} u(q) \leq \max_{q\in U_L^x} u(q). \tag{2.19}$$

さらに，$\max_{q\in W_L^x} u(q) = \max_{q\in U_L^x} u(q)$ または $\min_{q\in W_L^x} u(q) = \min_{q\in U_L^x} u(q)$ であるためには $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$ であることが必要十分である．

証明. まず W_L^x の定義から容易に分かるように，$y, z \in V \setminus U$ に対し $z \in W_L^y$ のとき $y \sim_{(V\setminus U,L)} z$ と定めると $\sim_{(V\setminus U,L)}$ は $V \setminus U$ 上の同値関係であることを注意しておく．特に $y \in V \setminus U$ に対し W_L^y は $\sim_{(V\setminus U,L)}$ に関する y の同値類であるので，$W_L^x \cap W_L^y \neq \emptyset$ ならば $W_L^x = W_L^y$ であり，従ってまた $U_L^x = U_L^y$ である．
(1) $y \in U$ を取る．(RN2) より $n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^n \subset V$ が存在して $x_0 = x, x_n = y$ かつ任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $L_{x_{k-1}x_k} > 0$. $l := \min\{k \in \{1, \ldots, n\} \mid x_k \in U\}$ とおくと $\{x_k\}_{k=0}^{l-1} \subset V \setminus U, x_l \in U$ であるので $\{x_k\}_{k=0}^{l-1} \subset W_L^x, x_l \in U_L^x \neq \emptyset$.

次に $y \in W_L^x$ とし $z \in V, L_{yz} > 0$ とすると (2.18) により，$z \in U$ ならば $z \in U_L^x$ であり，$z \in V \setminus U$ ならば $z \in W_L^y = W_L^x$ となるので $\{z \in V \mid L_{yz} > 0\} \subset W_L^x \cup U_L^x$.
(2) $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$ ならば (2.19) の 4 辺は全て等しい．また，$\max_{q\in W_L^x} u(q) < \max_{q\in W_L^x \cup U_L^x} u(q)$ ならば $\max_{q\in W_L^x} u(q) < \max_{q\in W_L^x \cup U_L^x} u(q) = \max_{q\in U_L^x} u(q)$. あとは $\max_{q\in W_L^x} u(q) = \max_{q\in W_L^x \cup U_L^x} u(q)$ と仮定し $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$ を導けば，$\max_{q\in W_L^x} u(q) \leq \max_{q\in U_L^x} u(q)$ 及びこの等号の成立が $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$ の場合に限ることが分かり，$\min_{q\in U_L^x} u(q) \leq \min_{q\in W_L^x} u(q)$ に対する同様の議論と合わせて証明が完了する．そこで $\max_{q\in W_L^x} u(q) = \max_{q\in W_L^x \cup U_L^x} u(q)$ と仮定し，$u(x_*) = \max_{q\in W_L^x \cup U_L^x} u(q)$ を満たす $x_* \in W_L^x$ を取る．このとき $W_L^{x_*} = W_L^x$ なので，$y \in (W_L^x \cup U_L^x) \setminus \{x_*\}$ とすると，$n \in \mathbb{N}$ と $\{x_k\}_{k=0}^{n-1} \subset V \setminus U$ が存在して，$x_0 = x_*$, かつ $x_n := y$ とおくと任意の $k \in \{1, \ldots, n\}$ に対し $L_{x_{k-1}x_k} > 0$. $u(x_0) = u(x_*) = \max_{q\in W_L^x \cup U_L^x} u(q)$ に注意して，$k \in \{1, \ldots, n\}$ とし $x_{k-1} \in W_L^x \cup U_L^x$ かつ $u(x_{k-1}) = u(x_*)$ と仮定すると，$x_{k-1} \in V \setminus U$ より $x_{k-1} \in W_L^x$ であり，すると (1) より $x_k \in \{z \in V \mid L_{x_{k-1}z} > 0\} \subset W_L^x \cup U_L^x$ であるので

$$\begin{aligned} 0 = (Lu)(x_{k-1}) &= \sum\nolimits_{z\in V, L_{x_{k-1}z}>0} L_{x_{k-1}z}(u(z) - u(x_{k-1})) \\ &\leq L_{x_{k-1}x_k}(u(x_k) - u(x_*)) \leq 0 \end{aligned}$$

となり，よって $u(x_k) = u(x_*)$. 従って k に関する数学的帰納法により $u(y) = u(x_n) = u(x_*)$ となり，$y \in (W_L^x \cup U_L^x) \setminus \{x_*\}$ は任意なので $u \in \mathbb{R}\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x}$. $\square$

系 2.12 (楕円型 Harnack 不等式)**.** V を有限集合とし，$U \subsetneq V$, $U \neq \emptyset$ とする．$L = (L_{xy})_{x,y \in V} \in \mathcal{LA}(V)$, $x \in V \setminus U$ とし W_L^x, U_L^x を (2.18) で定める．このとき $c \in (0, \infty)$ が存在して，$u \geq 0$ と $Lu|_{W_L^x} = 0$ を満たす任意の $u \in \mathbb{R}^{W_L^x \cup U_L^x}$ に対し

$$c \max_{q \in W_L^x \cup U_L^x} u(q) \leq \min_{q \in W_L^x} u(q). \tag{2.20}$$

証明. $\mathcal{A} := \bigl\{u \in \mathbb{R}^{W_L^x \cup U_L^x} \bigm| u \geq 0, Lu|_{W_L^x} = 0, \max_{q \in W_L^x \cup U_L^x} u(q) = 1\bigr\}$ とおく．$\mathbf{1}_{W_L^x \cup U_L^x} \in \mathcal{A}$ より $\mathcal{A} \neq \emptyset$ であり，定理 2.11 より $\min_{q \in W_L^x} u(q) > 0$ が任意の $u \in \mathcal{A}$ に対して成り立つ．そこで $c := \inf\bigl\{\min_{q \in W_L^x} u(q) \bigm| u \in \mathcal{A}\bigr\}$ とおくと，$\mathcal{A}$ は $\mathbb{R}^{W_L^x \cup U_L^x}$ の空でないコンパクト部分集合で $\mathcal{A} \ni u \mapsto \min_{q \in W_L^x} u(q) \in \mathbb{R}$ は連続なので $c = \min\bigl\{\min_{q \in W_L^x} u(q) \bigm| u \in \mathcal{A}\bigr\} \in (0, \infty)$ となり，すると $u \geq 0$ と $Lu|_{W_L^x} = 0$ を満たす $u \in \mathbb{R}^{W_L^x \cup U_L^x}$ に対し c の定義より容易に (2.20) を得る． □

次に定義する有効抵抗距離の概念は抵抗形式の理論の根幹に位置しており，極めて重要である．

定義 2.13 (有限集合上の有効抵抗距離)**.** V を空でない有限集合，$L \in \mathcal{LA}(V)$ とする．$R_L : V \times V \to [0, \infty)$ を

$$R_L(x, y) := \bigl(\min\{\mathcal{E}_L(u, u) \mid u \in \mathbb{R}^V, u(x) = 1, u(y) = 0\}\bigr)^{-1} \tag{2.21}$$

$$= \max\left\{\frac{|u(x) - u(y)|^2}{\mathcal{E}_L(u, u)} \;\middle|\; u \in \mathbb{R}^V \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_V\right\} \tag{2.22}$$

（ただし $\min \emptyset := \infty, \infty^{-1} := 0, \max \emptyset := 0$）で定める．$R_L$ を L に対応する**有効抵抗距離** (effective resistance metric, あるいは単に resistance metric) という．

$x = y$ のときは (2.21), (2.22) の右辺は明らかに共に 0 となる．$x \neq y$ のとき，(2.21) の最小値が存在して正であることは定理 2.8 から分かり，(2.22) の最大値が存在して (2.21) の右辺に等しいことは，$u \in \mathbb{R}^V \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ に対し $u(x) \neq u(y)$ ならば

$$\frac{|u(x) - u(y)|^2}{\mathcal{E}_L(u, u)} = \mathcal{E}_L\left(\frac{u - u(y)}{u(x) - u(y)}, \frac{u - u(y)}{u(x) - u(y)}\right)^{-1} \leq R_L(x, y) \tag{2.23}$$

であり，さらに (2.21) の最小値を達成する $u \in \mathbb{R}^V$ に対して (2.23) の不等式で等号が成立することから分かる．すると特に (2.22) から次の不等式が得られる．

命題 2.14. V を空でない有限集合，$L \in \mathcal{LA}(V)$ とするとき，任意の $u \in \mathbb{R}^V$ と任意の $x, y \in V$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq R_L(x, y)\mathcal{E}_L(u, u). \tag{2.24}$$

注意 2.15. $x, y \in V, x \neq y$ のとき，定理 2.8-(2) から次が成り立つことが分かる：

$$[L]_{\{x,y\}} = \frac{1}{R_L(x, y)}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{2.25}$$

注意 2.9-(2) によれば $[L]_{\{x,y\}}$ は「(V, L) を 2 点 x, y 間の単一の抵抗器と見なした『合成抵抗』網」を表していると解釈することができるが，(2.25) はその「合成抵抗」網が 2 点 x, y を抵抗値 $R_L(x, y)$ の抵抗器で接続して得られる抵抗網であることを示している．$R_L(x, y)$ を「有効抵抗」と呼ぶのはこの解釈に基づいている．

その名称が示唆する通り，有効抵抗距離 R_L は実は距離関数になっている．さらに R_L によって Laplacian L は一意的に定まる．これを次に定理として述べる．

定理 2.16. V を空でない有限集合とする．
(1) $L \in \mathcal{LA}(V)$ とするとき，R_L は V 上の距離関数である．
(2) $L_1, L_2 \in \mathcal{LA}(V)$ が $R_{L_1} = R_{L_2}$ を満たすならば $L_1 = L_2$ である．

定理 2.16 の証明の前に，定理 2.16-(2) の重要な系を 1 つ述べておく．

定義 2.17. $k = 1, 2$ に対し V_k を空でない有限集合，$L_k \in \mathcal{LA}(V_k)$ とする．$V_1 \subset V_2$ かつ $L_1 = [L_2]_{V_1}$ であるとき $\{(V_1, L_1), (V_2, L_2)\}$ は**適合**している (compatible) といい，この性質が成り立つことを $(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ と書き表す．

系 2.18. $k = 1, 2$ に対し V_k を空でない有限集合，$L_k \in \mathcal{LA}(V_k)$ とする．このとき，$(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ であるためには $V_1 \subset V_2$ かつ $R_{L_1} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ であることが必要十分である．

証明. $(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ ならば，$V_1 \subset V_2$ であり，また $x \neq y$ なる任意の $x, y \in V_1$ に対し命題 2.10 より $[L_1]_{\{x,y\}} = [[L_2]_{V_1}]_{\{x,y\}} = [L_2]_{\{x,y\}}$, 従って (2.25) より $R_{L_1}(x, y) = R_{L_2}(x, y)$ となるので $R_{L_1} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ である．

逆に $V_1 \subset V_2$ かつ $R_{L_1} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ ならば，前段落の結果から $R_{[L_2]_{V_1}} = R_{L_2}|_{V_1 \times V_1}$ であるので $R_{L_1} = R_{[L_2]_{V_1}}$ となり，従って定理 2.16-(2) より $L_1 = [L_2]_{V_1}$, すなわち $(V_1, L_1) \leq (V_2, L_2)$ である． □

以下，本節の残りで定理 2.16 の証明を与える．系 2.18 の必要性の主張は，上で（定理 2.8 の結果及び）命題 2.10 と (2.25) のみを用いて証明され，従って定理 2.16 には依存していないので定理 2.16 の証明の中で用いてもよいことに注意する．

定理 2.16 の証明のために補題を 2 つ準備する．初めの補題は有効抵抗距離の計算や有限集合上の Laplacian の適合性の証明に頻繁に用いられる．

補題 2.19 (Δ-Y 変換 (Δ-Y transform))**.** $V = \{q, x, y, z\}$ を $\#V = 4$ であるような集合，$U := \{x, y, z\}$ とし，$L_\Delta = (L_{x'y'})_{x',y' \in U} \in \mathcal{LA}(U)$ は $L_{xy}, L_{yz}, L_{zx} \in (0, \infty)$ を満たすとする．このとき，$L_* := L_{zx}L_{xy} + L_{xy}L_{yz} + L_{yz}L_{zx}$ とおき

$$\check{L}_{qx} := \frac{L_*}{L_{yz}}, \quad \check{L}_{qy} := \frac{L_*}{L_{zx}}, \quad \check{L}_{qz} := \frac{L_*}{L_{xy}}, \quad \check{L}_{xy} := \check{L}_{yz} := \check{L}_{zx} := 0 \quad (2.26)$$

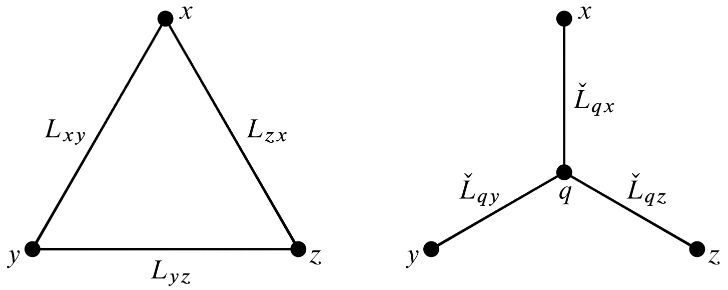
により $L_{\mathrm{Y}} := (\check{L}_{x'y'})_{x',y' \in V} \in \mathcal{LA}(V)$ を定めると $L_\Delta = [L_{\mathrm{Y}}]_U$（下の図 2.1 参照）．

演習 2.1. 補題 2.19 を示せ．

補題 2.20. V を空でない有限集合，$L \in \mathcal{LA}(V), z \in V$ とし，$g_z^L : V \times V \to \mathbb{R}$ を

$$g_z^L(x, y) := \frac{R_L(x, z) + R_L(y, z) - R_L(x, y)}{2}, \quad x, y \in V \qquad (2.27)$$

で定める．このとき各 $x \in V$ に対し $v_x := g_z^L(x, \cdot)$ は $v_x(z) = 0$ かつ任意の $u \in \mathbb{R}^V$ について $\mathcal{E}_L(u, v_x) = u(x) - u(z)$ となるような唯 1 つの $\mathbb{R}^V$ の元であり，さらに任意の $x, y \in V$ に対し $0 \leq g_z^L(x, y) = g_z^L(y, x) \leq g_z^L(x, x)$.



(U, L_Δ)　　(V, L_{Y})

図 2.1: Δ-Y 変換

注意 2.21. V を $\#V \geq 2$ であるような有限集合とし，$L \in \mathcal{LA}(V), z \in V$ とする．補題 2.20 から特に，$u \in \mathbb{R}^V$ が $u(z) = 0$ を満たすならば任意の $x \in V$ に対し

$$\begin{aligned} u(x) = \mathcal{E}_L\big(g_z^L(x, \cdot), u\big) = \big\langle g_z^L(x, \cdot), -Lu\big\rangle_V = \sum\nolimits_{y \in V \setminus \{z\}} g_z^L(x, y)(-Lu)(y) \\ = \big\langle g_z^L(x, \cdot)|_{V \setminus \{z\}}, -X_{\{z\}}(u|_{V \setminus \{z\}})\big\rangle_{V \setminus \{z\}} \end{aligned} \tag{2.28}$$

（$X_{\{z\}}$ は補題 2.7 で $U = \{z\}$ として得られる $\mathbb{R}^{(V \setminus \{z\}) \times (V \setminus \{z\})}$ の元）となる．(2.28) は，Dirichlet 境界条件 $u(z) = 0$ の下での Laplacian $X_{\{z\}}$ の逆作用素 $(-X_{\{z\}})^{-1}$ が，g_z^L を積分核とする積分核作用素で与えられることを示している．これと同様に，Euclid 空間，Riemann 多様体，フラクタル等の空間上で定義された Laplacian に対し，その Dirichlet 境界条件の下での逆作用素は（ほとんどの場合）積分核作用素として表せることが知られており，そのときの積分核は一般に **Green 関数**と呼ばれる．(2.28) によれば，g_z^L は「z を境界とする，Laplacian L に対応する Green 関数」に他ならず，補題 2.20 はそれが有効抵抗距離 R_L を用いて (2.27) のように具体的に表現できることを主張している．

補題 2.20 の証明. まず (2.22) より R_L は対称，すなわち任意の $x, y \in V$ に対し $R_L(x, y) = R_L(y, x)$ であり，従ってまた $g_z^L(x, y) = g_z^L(y, x)$ であることを注意しておく．

$x \in V$ とする．主張の v_x と同じ性質を $v_1, v_2 \in \mathbb{R}^V$ が持つとすると，$u := v_1 - v_2$ として $\mathcal{E}_L(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = \mathcal{E}_L(u, v_1) - \mathcal{E}_L(u, v_2) = 0$ なので $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ より $v_1 - v_2 \in \mathbb{R}\mathbf{1}_V$ となり，これと $v_1(z) - v_2(z) = 0$ から $v_1 = v_2$ が従う．

明らかに $v_x(z) = 0 \leq R_L(x, z) = v_x(x)$ である．$x = z$ のときは R_L の対称性より $v_z = g_z^L(z, \cdot) = 0$ であり，この関数は $v_z(z) = 0$ かつ任意の $u \in \mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}_L(u, v_z) = u(z) - u(z)\ (= 0)$ を満たす．そこで以下 $x \neq z$ と仮定する．初めに $0 \leq v_x|_{V \setminus \{x,z\}} \leq v_x(x), Lv_x|_{V \setminus \{x,z\}} = 0$ であることを示そう．注意 2.9-(1) より後者は $v_x = h_{\{x,z\}}^L(v_x|_{\{x,z\}})$ と同値であり，また $y \in V \setminus \{x, z\}$ に対し命題 2.10 より

$$h_{\{x,z\}}^L(v_x|_{\{x,z\}})(y) = \big(h_{\{x,y,z\}}^L \circ h_{\{x,z\}}^{[L]_{\{x,y,z\}}}(v_x|_{\{x,z\}})\big)(y) = h_{\{x,z\}}^{[L]_{\{x,y,z\}}}(v_x|_{\{x,z\}})(y)$$

であるので，$y \in V \setminus \{x, z\}$ とし $0 \leq v_x(y) \leq v_x(x), v_x(y) = h_{\{x,z\}}^{[L]_{\{x,y,z\}}}(v_x|_{\{x,z\}})(y)$ を示せばよい．後者は再び注意 2.9-(1) により $\big([L]_{\{x,y,z\}}(v_x|_{\{x,y,z\}})\big)(y) = 0$ と同

値であるので，$U := \{x, y, z\}$, $L_\Delta = (L_{x'y'})_{x',y'\in U} := [L]_U$, $v := v_x|_U$ として $0 \le v(y) \le v(x)$, $(L_\Delta v)(y) = 0$ を示せばよいことになる．

まず $L_{xy}, L_{yz}, L_{zx} \in (0,\infty)$ と仮定する．U に属さない元 q を 1 つ取り，補題 2.19 にある通り $L_{\mathrm{Y}} := (\check{L}_{x'y'})_{x',y'\in\{q\}\cup U} \in \mathcal{LA}(\{q\}\cup U)$ を $L_* := L_{zx}L_{xy} + L_{xy}L_{yz} + L_{yz}L_{zx}$ と (2.26) で定める．系 2.18 の必要性の主張から $R_L|_{U\times U} = R_{L_\Delta} = R_{L_{\mathrm{Y}}}|_{U\times U}$ であり，$(\{q\}\cup U, L_{\mathrm{Y}})$ の構造（図 2.1 右）から容易に $R_{L_{\mathrm{Y}}}(x,y) = \check{L}_{qx}^{-1} + \check{L}_{qy}^{-1}$, $R_{L_{\mathrm{Y}}}(y,z) = \check{L}_{qy}^{-1} + \check{L}_{qz}^{-1}$, $R_{L_{\mathrm{Y}}}(z,x) = \check{L}_{qz}^{-1} + \check{L}_{qx}^{-1}$ を得る．すなわち

$$R_L(x,y) = \frac{L_{yz} + L_{zx}}{L_*}, \quad R_L(y,z) = \frac{L_{zx} + L_{xy}}{L_*}, \quad R_L(z,x) = \frac{L_{xy} + L_{yz}}{L_*}. \tag{2.29}$$

すると (2.27), (2.29) より $v(z) = 0 < \frac{L_{xy}}{L_*} = v(y) < \frac{L_{xy}+L_{yz}}{L_*} = R_L(x,z) = v(x)$ となり，これより $(L_\Delta v)(y) = L_{xy}(v(x) - v(y)) + L_{yz}(v(z) - v(y)) = 0$ を得る．

次に $L_{xy}, L_{yz}, L_{zx} \in (0,\infty)$ が不成立の場合を考える．このとき $L_\Delta \in \mathcal{LA}(U)$ より L_{xy}, L_{yz}, L_{zx} のうち 1 つは 0 で他の 2 つは正である．$v(z) = 0$ に注意する．

$L_{xy} = 0$ のときは $v(x) = R_L(x,z) = L_{zx}^{-1}$, $R_L(y,z) = L_{yz}^{-1}$, $R_L(x,y) = L_{yz}^{-1} + L_{zx}^{-1}$, $v(y) = 0 = v(z) < v(x)$ となり，$(L_\Delta v)(y) = L_{yz}(v(z) - v(y)) = 0.$

$L_{yz} = 0$ のときは $v(x) = R_L(x,z) = L_{zx}^{-1}$, $R_L(y,z) = L_{zx}^{-1} + L_{xy}^{-1}$, $R_L(x,y) = L_{xy}^{-1}$, $v(y) = L_{zx}^{-1} = v(x) > 0$ となり，$(L_\Delta v)(y) = L_{xy}(v(x) - v(y)) = 0.$

$L_{zx} = 0$ のときは $v(x) = R_L(x,z) = L_{xy}^{-1} + L_{yz}^{-1}$, $R_L(y,z) = L_{yz}^{-1}$, $R_L(x,y) = L_{xy}^{-1}$, $v(y) = L_{yz}^{-1}$ となり，$(L_\Delta v)(y) = L_{xy}(v(x) - v(y)) + L_{yz}(v(z) - v(y)) = 0$, また $0 < v(y) < v(x)$.

以上で $0 \le v(y) \le v(x)$, $(L_\Delta v)(y) = 0$ が分かり，$0 \le v_x|_{V\setminus\{x,z\}} \le v_x(x)$, $Lv_x|_{V\setminus\{x,z\}} = 0$ であることが示せた．前者は $0 \le g_z^L(x,y) \le g_z^L(x,x)$ が任意の $y \in V$ に対して成り立つことを意味している．今 $u \in \mathbb{R}^V$ に対し

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_L(u, v_x) &= \langle u, -Lv_x\rangle_V = \big\langle h^L_{\{x,z\}}(u|_{\{x,z\}}), -Lv_x\big\rangle_V = \mathcal{E}_L\big(h^L_{\{x,z\}}(u|_{\{x,z\}}), v_x\big) \\
&= \mathcal{E}_L\big(h^L_{\{x,z\}}(u|_{\{x,z\}}), h^L_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})\big) = \mathcal{E}_{[L]_{\{x,z\}}}(u|_{\{x,z\}}, v_x|_{\{x,z\}}) \\
&= R_L(x,z)^{-1}(u(x) - u(z))(v_x(x) - v_x(z)) = u(x) - u(z).
\end{aligned}$$

ただし 2 つ目の等号に $Lv_x|_{V\setminus\{x,z\}} = 0$ を，4 つ目の等号に $v_x = h^L_{\{x,z\}}(v_x|_{\{x,z\}})$ を，5 つ目の等号に $\mathcal{E}_L, \mathcal{E}_{[L]_{\{x,z\}}}$ の対称双線型性，$h^L_{\{x,z\}}$ の線型性と (2.15) を，6 つ目の等号に (2.25) を，最後の等号に $v_x(z) = 0$ と $v_x(x) = R_L(x,z)$ を，それぞれ用いた．これで $v_x = g_z^L(x,\cdot)$ が主張の性質を持つことが示せた． □

定理 2.16 の証明. (1) (2.22) より $x, y \in V$ に対し，$R_L(x,y) = R_L(y,x)$ であり，また $x = y$ なら $R_L(x,y) = 0$, $x \ne y$ なら $R_L(x,y) > 0$ である．さらに補題 2.20 より $x, y, z \in V$ に対し $g_z^L(x,y) \ge 0$, すなわち $R_L(x,y) \le R_L(x,z) + R_L(z,y)$.
(2) $z \in V$ を取る．$R_{L_1} = R_{L_2}$ と (2.27) より $g_z^{L_1} = g_z^{L_2}$ であることに注意し，各 $x \in V \setminus \{z\}$ に対し $v_x := g_z^{L_1}(x,\cdot) = g_z^{L_2}(x,\cdot)$ とおく．このとき $\{\mathbf{1}_V\} \cup \{v_x\}_{x\in V\setminus\{z\}} \subset \mathbb{R}^V$ は線型独立であり，従って $\mathbb{R}^V$ の基底を成す．実際，$(a_x)_{x\in V} \in \mathbb{R}^V$ とし $u := a_z\mathbf{1}_V + \sum_{x\in V\setminus\{z\}} a_x v_x$ とおくと，$y \in V \setminus \{z\}$ と $k \in \{1,2\}$ に対し

$$\mathcal{E}_{L_k}(u, \mathbf{1}_y) = \sum_{x\in V\setminus\{z\}} a_x \mathcal{E}_{L_k}(v_x, \mathbf{1}_y) = \sum_{x\in V\setminus\{z\}} a_x(\mathbf{1}_y(x) - \mathbf{1}_y(z)) = a_y \tag{2.30}$$

であり，また $u(z)=a_z$ であるので，$u=0$ ならば $(a_x)_{x\in V}=0$ である．そこで今 $u\in\mathbb{R}^V$ を任意に取り $u=a_z\mathbf{1}_V+\sum_{x\in V\setminus\{z\}}a_x v_x$ となる $(a_x)_{x\in V}\in\mathbb{R}^V$ を取ると，$y\in V\setminus\{z\}$ に対し (2.30) より $\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_y)=\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_y)$ であり，さらにこれと $\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_V)=\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_V)=0$ より $\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_z)=\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_z)$. よって任意の $v\in\mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}_{L_1}(u,v)=\sum_{x\in V}v(x)\mathcal{E}_{L_1}(u,\mathbf{1}_x)=\sum_{x\in V}v(x)\mathcal{E}_{L_2}(u,\mathbf{1}_x)=\mathcal{E}_{L_2}(u,v)$ であるので $\mathcal{E}_{L_1}=\mathcal{E}_{L_2}$, 従ってまた $L_1=L_{\mathcal{E}_{L_1}}=L_{\mathcal{E}_{L_2}}=L_2$ となる． □

2.2　有限集合上の Laplacian の適合列とその極限

有限集合上の抵抗形式及び Laplacian に関する前節の結果を受けて，本節では有限集合上の Laplacian の適合列の概念を導入し，その自然な「帰納極限」の基本性質を調べる．

有限集合上の Laplacian の適合列とその自然な「帰納極限」は次で定義される．

定義 2.22 (有限集合上の Laplacian の適合列とその極限)**.** 各 $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し V_m を空でない有限集合，$L_m\in\mathcal{LA}(V_m)$ とし，$\mathcal{S}:=\{(V_m,L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ とおく．任意の $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $(V_m,L_m)\le(V_{m+1},L_{m+1})$ が成り立つとき，$\mathcal{S}=\{(V_m,L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は有限集合上の Laplacian の**適合列** (compatible sequence) であるという．さらに $\mathcal{S}$ が有限集合上の Laplacian の適合列であるとき，$V_*:=V_*(\mathcal{S}):=\bigcup_{m=0}^{\infty}V_m$ とし

$$\mathcal{F}_{\mathcal{S}}:=\{u\in\mathbb{R}^{V_*}\mid \lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m},u|_{V_m})<\infty\}, \tag{2.31}$$

$$\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,v):=\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m},v|_{V_m})\in\mathbb{R},\quad u,v\in\mathcal{F}_{\mathcal{S}}, \tag{2.32}$$

$$R_{\mathcal{S}}(x,y):=R_{L_m}(x,y),\quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ x,y\in V_m, \tag{2.33}$$

により $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\subset\mathbb{R}^{V_*}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}:\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\times\mathcal{F}_{\mathcal{S}}\to\mathbb{R}$, $R_{\mathcal{S}}:V_*\times V_*\to[0,\infty)$ を定める．

ここで任意の $u\in\mathbb{R}^{V_*}$ に対し (2.15) より $\{\mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m},u|_{V_m})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}\subset[0,\infty)$ は非減少で，従って極限 $\lim_{m\to\infty}\mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m},u|_{V_m})\in[0,\infty]$ を持つことを (2.31) において用いた．さらにこのとき (2.8) より $\mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は $\mathbb{R}^{V_*}$ の線型部分空間であり，すると $\mathcal{E}_{L_m}$ の対称双線型性により (2.32) の極限の存在が保証され $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}$ もまた非負定値対称双線型であることに注意する．また $m\le n$ なる任意の $m,n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し，命題 2.10 より帰納的に $(V_m,L_m)\le(V_n,L_n)$ であり，従って系 2.18 の必要性の主張から $R_{L_n}|_{V_m\times V_m}=R_{L_m}$ であるので，$x,y\in V_*$ に対し $R_{\mathcal{S}}(x,y):=R_{L_m}(x,y)$ は $x,y\in V_m$ を満たす $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ の取り方に依らずに定まり，さらに定理 2.16-(1) より $R_{\mathcal{S}}$ は V_* 上の距離関数である．

以下本節では $\mathcal{S}=\{(V_m,L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列とする．定理 2.8 と同様に，V_m 上の関数に対してはその「$(\mathcal{E}_{\mathcal{S}},\mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ に関する V_* 上への調和拡張」が唯 1 つ存在する．すなわち次の命題が成り立つ．

命題 2.23. $m\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ とする．$u\in\mathbb{R}^{V_m}$ に対し，命題 2.10 より $n_1,n_2\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, $m\le n_1\le n_2$ ならば $h_{V_m}^{L_{n_1}}(u)=h_{V_m}^{L_{n_2}}(u)\big|_{V_{n_1}}$ であることに注意して，$h_{V_m}(u)=h_{V_m}^{\mathcal{S}}(u)\in\mathbb{R}^{V_*}$ を $n\ge m$ なる $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $h_{V_m}(u)|_{V_n}:=h_{V_m}^{L_n}(u)$ で定める．このとき各 $u\in\mathbb{R}^{V_m}$ に対し，$h_{V_m}(u)$ は

$$v|_{V_m}=u\quad\text{かつ}\quad n>m\ \text{なる任意の}\ n\in\mathbb{N}\ \text{に対し}\ L_n(v|_{V_n})|_{V_n\setminus V_m}=0 \tag{2.34}$$

を満たす唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^{V_*}$ であり，かつ最小値 $\min_{v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}},\, v|_{V_m}=u} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v,v)$ を達成する唯 1 つの $v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ であって

$$\mathcal{E}_{L_m}(u,u) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(h_{V_m}(u), h_{V_m}(u)) = \min_{v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}},\, v|_{V_m}=u} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v,v). \tag{2.35}$$

さらに $h_{V_m} : \mathbb{R}^{V_m} \to \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は線型写像である．

証明. $u \in \mathbb{R}^{V_m}$ とする．$h_{V_m}(u)$ が (2.34) を満たす唯 1 つの $v \in \mathbb{R}^{V_*}$ であることは注意 2.9-(1) から分かる．また (2.15) から $n \geq m$ なる任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し

$$\mathcal{E}_{L_n}(h_{V_m}(u)|_{V_n}, h_{V_m}(u)|_{V_n}) = \mathcal{E}_{L_n}\big(h^{L_n}_{V_m}(u), h^{L_n}_{V_m}(u)\big) = \mathcal{E}_{[L_n]_{V_m}}(u,u) = \mathcal{E}_{L_m}(u,u)$$

であるので，これより $h_{V_m}(u) \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ かつ $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(h_{V_m}(u), h_{V_m}(u)) = \mathcal{E}_{L_m}(u,u)$. さらに $v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ が $v|_{V_m} = u$, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v,v) \leq \mathcal{E}_{L_m}(u,u)$ を満たすならば，$n \geq m$ なる任意の $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $\mathcal{E}_{L_m}(u,u) \leq \mathcal{E}_{L_n}(v|_{V_n}, v|_{V_n}) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v,v)$, 従って $\mathcal{E}_{L_n}(v|_{V_n}, v|_{V_n}) = \mathcal{E}_{L_m}(u,u) = \min_{w \in \mathbb{R}^{V_n},\, w|_{V_m}=u} \mathcal{E}_{L_n}(w,w)$ となり，よって定理 2.8-(1) の一意性の主張から $v|_{V_n} = h^{L_n}_{V_m}(u)$, すなわち $v = h_{V_m}(u)$ を得る．ゆえに $\mathcal{E}_{L_m}(u,u) = \min_{v \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}},\, v|_{V_m}=u} \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(v,v)$ であり，かつこの最小値は $v = h_{V_m}(u)$ においてのみ達成される．最後に h_{V_m} の線型性は各 $h^{L_n}_{V_m}$ の線型性から従う． □

有限集合上の Laplacian の場合と同様に，$R_{\mathcal{S}}$ は次に述べるように $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ から決まる「有効抵抗」として特徴付けられる．定義 2.22 と $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ から容易に分かるように，$\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ であることを注意しておく．

補題 2.24. 任意の $x, y \in V_*$ に対し

$$R_{\mathcal{S}}(x,y) = \big(\min\{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) \mid u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}, u(x) = 1, u(y) = 0\}\big)^{-1} \tag{2.36}$$

$$= \max\left\{ \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u)} \;\middle|\; u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*} \right\} \tag{2.37}$$

（ただし $\min \emptyset := \infty$, $\infty^{-1} := 0$, $\max \emptyset := 0$）であり，さらに任意の $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ に対し

$$|u(x) - u(y)|^2 \leq R_{\mathcal{S}}(x,y) \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u). \tag{2.38}$$

証明. $x = y$ のときはどの主張も明らかなので，$x \neq y$ と仮定してよい．$x, y \in V_m$ となる $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ をとると，$u(x) = 1$, $u(y) = 0$ を満たす任意の $u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ に対し $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) \geq \mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) \geq R_{L_m}(x,y)^{-1} = R_{\mathcal{S}}(x,y)^{-1}$ であり，また $u = h_{V_m} \circ h^{L_m}_{\{x,y\}}\big(\mathbf{1}^{\{x,y\}}_x\big)$ のときこの等号が成立するので (2.36) が従う．(2.37) の最大値が存在して (2.36) の右辺に等しいことは (2.22) と全く同様にして示され，(2.38) は (2.37) から直ちに分かる． □

次に，$(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ がその構成から自然に有限集合上の抵抗形式と同様の性質を有し，かつ一種の完備性を持つことを見る．

定理 2.25. (1) $\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ であり，$(\mathcal{F}_{\mathcal{S}}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}, \mathcal{E}_{\mathcal{S}})$ は Hilbert 空間である．
(2) V_* の任意の空でない有限部分集合 V に対し $\{u|_V \mid u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\} = \mathbb{R}^V$.
(3)（Markov 性）$u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ ならば $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$, $\mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u,u)$.

証明. (2) V を V_* の空でない有限部分集合とするとき，$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ を $V \subset V_m$ となるように取ることができ，そこで $u \in \mathbb{R}^V$ に対し $v := h_{V_m} \circ h_V^{L_m}(u)$ とおけば，$v \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$ かつ $v|_V = \big(h_{V_m} \circ h_V^{L_m}(u)|_{V_m}\big)|_V = h_V^{L_m}(u)|_V = u$ となり主張が従う．
(3) $u \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$ とすると任意の $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $(\mathrm{RF2})_{\mathrm{fin}}$ より

$$\mathcal{E}_{L_m}(u^+ \wedge 1|_{V_m}, u^+ \wedge 1|_{V_m}) \le \mathcal{E}_{L_m}(u|_{V_m}, u|_{V_m}) \le \mathcal{E}_\mathcal{S}(u,u) < \infty$$

であるので，$m \to \infty$ とすることで $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ と $\mathcal{E}_\mathcal{S}$ の定義より直ちに主張を得る．
(1) 補題 2.24 の前に注意したように，$\{u \in \mathcal{F}_\mathcal{S} \mid \mathcal{E}_\mathcal{S}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ は定義 2.22 と $(\mathrm{RF1})_{\mathrm{fin}}$ から容易に従う．すると $u, v \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ に対し $\mathcal{E}_\mathcal{S}(u,v) = \mathcal{E}_\mathcal{S}(u + \alpha\mathbf{1}_{V_*}, v + \beta\mathbf{1}_{V_*})$ であるので $\mathcal{E}_\mathcal{S}(u,v)$ は u, v の定める $\mathcal{F}_\mathcal{S}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ の元だけで決まることになり，よって $\mathcal{E}_\mathcal{S}$ を自然に $(\mathcal{F}_\mathcal{S}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}) \times (\mathcal{F}_\mathcal{S}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*})$ 上の実数値関数と見なすことができる．このとき $\mathcal{E}_\mathcal{S}$ が $\mathcal{F}_\mathcal{S}/\mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ 上の内積になっていることは $\{u \in \mathcal{F}_\mathcal{S} \mid \mathcal{E}_\mathcal{S}(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{V_*}$ から容易に確認できるので，あとはこの内積の定める距離関数が完備であることを示せばよい．

そこで $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}_\mathcal{S}$ が $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}_\mathcal{S}(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとする．$z \in V_*$ を取る．u_n の代わりに $u_n - u_n(z)$ を考えることにより任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $u_n(z) = 0$ と仮定してよい．$x \in V_*$ とすると，$k, l \in \mathbb{N}$ に対し (2.38) より

$$|u_k(x) - u_l(x)|^2 = |(u_k - u_l)(x) - (u_k - u_l)(z)|^2 \le R_\mathcal{S}(x,z)\mathcal{E}_\mathcal{S}(u_k - u_l, u_k - u_l)$$

なので $\lim_{k\wedge l\to\infty} |u_k(x) - u_l(x)| = 0$ となり，従って極限 $u(x) := \lim_{n\to\infty} u_n(x) \in \mathbb{R}$ が存在する．この $u \in \mathbb{R}^{V_*}$ に対し $u \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\mathcal{S}(u - u_n, u - u_n) = 0$ であることを示そう．$\varepsilon \in (0,\infty)$ とし，$N \in \mathbb{N}$ を $k \wedge l \ge N$ なる任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_\mathcal{S}(u_k - u_l, u_k - u_l) \le \varepsilon$ となるように取る．$k, l \in \mathbb{N}$ は $k \wedge l \ge N$ を満たすとし，$m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ とする．このとき

$$\mathcal{E}_{L_m}((u_k - u_l)|_{V_m}, (u_k - u_l)|_{V_m}) \le \mathcal{E}_\mathcal{S}(u_k - u_l, u_k - u_l) \le \varepsilon. \tag{2.39}$$

ところが V_m が有限集合であることから，$\{u_n|_{V_m}\}_{n\in\mathbb{N}}$ は $\mathbb{R}^{V_m}$ において $u|_{V_m}$ に収束し，さらに $\mathcal{E}_{L_m} : \mathbb{R}^{V_m} \times \mathbb{R}^{V_m} \to \mathbb{R}$ は連続である．よって (2.39) で $l \to \infty$ とした後 $m \to \infty$ とすることで，$\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{L_m}((u - u_k)|_{V_m}, (u - u_k)|_{V_m}) \le \varepsilon$ が $k \ge N$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し成り立つことが分かる．特に $u - u_N \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$, 従ってまた $u = (u - u_N) + u_N \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$ であり，さらに $k \ge N$ なる任意の $k \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_\mathcal{S}(u - u_k, u - u_k) = \lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{L_m}((u - u_k)|_{V_m}, (u - u_k)|_{V_m}) \le \varepsilon$ であるが，$\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_\mathcal{S}(u - u_n, u - u_n) = 0$ が従う． □

定理 2.25-(1),(3) は $(\mathcal{E}_\mathcal{S}, \mathcal{F}_\mathcal{S})$ が然るべき完備性と Markov 性を有していることを，定理 2.25-(2) は $\mathcal{F}_\mathcal{S}$ が十分多くの関数を含んでいることを示しており，この意味で $(\mathcal{E}_\mathcal{S}, \mathcal{F}_\mathcal{S})$ は「性質の良い」双線型形式であるといえる．しかしながら，この $(\mathcal{E}_\mathcal{S}, \mathcal{F}_\mathcal{S})$ は V_* という**可算集合**上で定義された双線型形式に過ぎず，これでは自己相似フラクタル（非可算集合！）上に局所的な正則 Dirichlet 形式を構成するという我々の目標のためには不十分である．この困難は，V_* の距離関数 $R_\mathcal{S}$ による完備化 $K_\mathcal{S} := \overline{V_*}^{R_\mathcal{S}}$ を考え，(2.38) と演習 1.9-(1) から各 $u \in \mathcal{F}_\mathcal{S}$ が $K_\mathcal{S}$ 上の連続関数に一意的に拡張できることに注意して，$\mathcal{F}_\mathcal{S}$ を自然に $\mathbb{R}^{K_\mathcal{S}}$ の部分空間と見なすことにより解決する．このとき完備化 $K_\mathcal{S}$ は一般に非可算であり，$\mathcal{F}_\mathcal{S}$ を $\mathbb{R}^{K_\mathcal{S}}$ の部分空間と考えるときこれはもはや本節の理論の範疇には入らない．このよう

な状況を統一的に取り扱うために，次節では $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ と同様の性質を持つ（可算とは限らない集合上の）非負定値対称双線型形式を抵抗形式として定式化し，その一般論を展開する．

2.3 一般の抵抗形式と有効抵抗距離

前節で見たように，有限集合上の Laplacian の適合列 $\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ に対してはその「帰納極限」として V_* 上の非負定値対称双線型形式 $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ が定まり，これは定理 2.25 で述べた性質を持つ．さらに $R_{\mathcal{S}} : V_* \times V_* \to [0,\infty)$ が $R_{\mathcal{S}}|_{V_m\times V_m} := R_{L_m}, m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ により定まり，これは (2.36), (2.37) を満たす．一般にこれらの性質を満たす非負定値対称双線型形式を抵抗形式と呼ぶ．

定義 2.26 (抵抗形式)**.** K を空でない集合，$\mathcal{F}$ を $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間とし，$\mathcal{E}$: $\mathcal{F}\times\mathcal{F}\to\mathbb{R}$ を $\mathcal{F}$ 上の非負定値対称双線型形式とする．$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ が次の 4 条件を満たすとき，$(\mathcal{E},\mathcal{F})$ は K 上の**抵抗形式** (resistance form) であるという：
(RF1) $\{u\in\mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u)=0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ であり，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ は Hilbert 空間である．
(RF2) $x\neq y$ なる任意の $x, y\in K$ に対し，$u\in\mathcal{F}$ が存在して $u(x)\neq u(y)$.
(RF3) 任意の $x, y \in K$ に対し

$$R_{\mathcal{E}}(x,y) := R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(x,y) := \sup\left\{\frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}(u,u)} \;\middle|\; u\in\mathcal{F}\setminus\mathbb{R}\mathbf{1}_K\right\} < \infty. \quad (2.40)$$

(RF4)（Markov 性）$u\in\mathcal{F}$ ならば $u^+\wedge 1\in\mathcal{F}, \mathcal{E}(u^+\wedge 1, u^+\wedge 1)\leq\mathcal{E}(u,u)$.

(2.40) で定義される $R_{\mathcal{E}} = R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} : K\times K\to[0,\infty)$ を抵抗形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ の**有効抵抗距離** (effective resistance metric, あるいは単に resistance metric) という．

さらに $\mathcal{RF}(K) := \{(\mathcal{E},\mathcal{F}) \mid (\mathcal{E},\mathcal{F})$ は K 上の抵抗形式$\}$ とおく．

定理 2.25-(1) の証明と同様，上の (RF1) において $\{u\in\mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u,u)=0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ であることから $\mathcal{E}$ は自然に $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K)\times(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K)$ 上の実数値関数と見なされ，かつこれが $\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K$ 上の内積になっていることに注意されたい．また (RF3) から任意の $u\in\mathcal{F}$ と任意の $x,y\in K$ に対し

$$|u(x)-u(y)|^2 \leq R_{\mathcal{E}}(x,y)\mathcal{E}(u,u). \quad (2.41)$$

V を空でない有限集合とする．$\mathcal{E}$ を定義 2.2 の意味での V 上の抵抗形式とすると $(\mathcal{E},\mathbb{R}^V)$ は定義 2.26 の意味での V 上の抵抗形式であることが，有限次元内積空間が常に Hilbert 空間であることと定義 2.13 から直ちに従う．逆に定義 2.26 の意味での V 上の抵抗形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に対し $\mathcal{F}=\mathbb{R}^V$ でなければならないことは次の補題から分かる．よって有限集合に対しては定義 2.2 と定義 2.26 は一致する．

補題 2.27. K を空でない集合とし，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間で定義 2.26 の (RF2), $\{u^+\wedge 1 \mid u\in\mathcal{F}\}\subset\mathcal{F}$, 及び任意の $x\in K$ に対し $u\in\mathcal{F}$ が存在して $u(x)\neq 0$, を満たすとする．このとき V が K の空でない有限部分集合ならば $\{u|_V \mid u\in\mathcal{F}\} = \mathbb{R}^V$.

証明. $\#V=1$ のときは補題の主張は仮定より明らかである．

$\#V=2$ と仮定し，$V=\{x,y\}$ とする．仮定から $u,v,w\in\mathcal{F}$ を $u(x)=v(y)=1$, $w(x)\neq w(y)$ となるように取ることができ，$u^+\wedge 1, v^+\wedge 1$ を考えることに

より $u(y), v(x) \in [0,1]$ と仮定してよい．補題の主張を示すためには $f(x) = 1$, $f(y) = 0$ を満たす $f \in \mathcal{F}$ が存在することを示せばよく，$u(y) < 1$ のときは $(u - u(y)v)(x) = 1 - u(y)v(x) > 0, (u - u(y)v)(y) = 0$ なので $f := \frac{u-u(y)v}{(u-u(y)v)(x)}$ とおき，$u(y) = 1$ のときは $(w - w(y)u)(x) = w(x) - w(y) \neq 0, (w - w(y)u)(y) = 0$ なので $f := \frac{w-w(y)u}{(w-w(y)u)(x)}$ とおけばよい．これで $\#V = 2$ の場合の主張が示せた．

次に $\#V \geq 3$ と仮定し，$x \in V$ とする．$f|_V = \mathbf{1}_x^V$ であるような $f \in \mathcal{F}$ が存在することを示せばよい．前段落の結果から各 $y \in V \setminus \{x\}$ に対し $u_y, v_y \in \mathcal{F}$ を $u_y(x) = v_y(y) = 1, u_y(y) = v_y(x) = 0$ となるように取ることができ，$u_y^+ \wedge 1, v_y^+ \wedge 1$ を考えることで $0 \leq u_y \leq 1, 0 \leq v_y \leq 1$ と仮定してよい．このとき $g := \sum_{y \in V\setminus\{x\}} u_y, h := \sum_{y \in V\setminus\{x\}} v_y$ とおくと $g(x) = \#V - 1, g|_{V\setminus\{x\}} \leq \#V - 2$, $h(x) = 0, h|_{V\setminus\{x\}} \geq 1$ であるので，$f := (g - (\#V-2)(h^+ \wedge 1))^+ \wedge 1$ とおけば $f \in \mathcal{F}, f|_V = \mathbf{1}_x^V$ となる．以上で補題の主張が示せた． □

$\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列とするとき，補題 2.24 と定理 2.25 から $(\mathcal{E}_\mathcal{S}, \mathcal{F}_\mathcal{S})$ は $V_*(\mathcal{S}) = \bigcup_{m=0}^\infty V_m$ 上の抵抗形式であり，補題 2.24 よりその有効抵抗距離 $R_{\mathcal{E}_\mathcal{S}} = R_{(\mathcal{E}_\mathcal{S}, \mathcal{F}_\mathcal{S})}$ は (2.33) で与えられる $R_\mathcal{S}$ に等しい．また，$m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ に対し $R_{\mathcal{E}_\mathcal{S}}|_{V_m \times V_m} = R_\mathcal{S}|_{V_m \times V_m} = R_{L_m}$, すなわち $R_{\mathcal{E}_\mathcal{S}}$ の有限部分集合 V_m への制限は Laplacian $L_m \in \mathcal{LA}(V_m)$ に対応する有効抵抗距離 R_{L_m} に一致する．この状況を踏まえ一般の集合上の有効抵抗距離を次で定義する．

定義 2.28 (有効抵抗距離). K を空でない集合とし，$R : K \times K \to [0,\infty)$ とする．K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $L_V \in \mathcal{LA}(V)$ が存在して $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ となるとき，R は K 上の**有効抵抗距離** (effective resistance metric, あるいは単に resistance metric) であるという．

さらに $\mathcal{RM}(K) := \{R \mid R$ は K 上の有効抵抗距離$\}$ とおく．

K を空でない集合とし，$R \in \mathcal{RM}(K)$ とする．このとき定理 2.16-(1) から R は K 上の距離関数である．また定理 2.16-(2) により，K の空でない各有限部分集合 V に対し $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ となる $L_V \in \mathcal{LA}(V)$ は一意的に定まり，さらに系 2.18 により，V_1, V_2 が K の空でない有限部分集合で $V_1 \subset V_2$ ならば $(V_1, L_{V_1}) \leq (V_2, L_{V_2})$.

空でない有限集合 V に対しては $\mathcal{RM}(V) = \{R_L \mid L \in \mathcal{LA}(V)\}$ であることが，系 2.18 の必要性の主張より $L \in \mathcal{LA}(V)$ と V の空でない部分集合 U に対し $R_L|_{U\times U} = R_{[L]_U}$ であることから分かる．

$\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N}\cup\{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列とするとき，$R_{\mathcal{E}_\mathcal{S}} \in \mathcal{RM}(V_*(\mathcal{S}))$ である．実際，V を $V_*(\mathcal{S})$ の空でない有限部分集合とすると，$m \in \mathbb{N}\cup\{0\}$ を $V \subset V_m$ となるように取ることができ，そこで系 2.18 の必要性の主張より $R_{\mathcal{E}_\mathcal{S}}|_{V\times V} = R_\mathcal{S}|_{V\times V} = (R_\mathcal{S}|_{V_m\times V_m})|_{V\times V} = R_{L_m}|_{V\times V} = R_{[L_m]_V}$.

実は，一般に K を空でない集合とするとき，K 上の抵抗形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ に対し $R_\mathcal{E} = R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} \in \mathcal{RM}(K)$ であり，$\mathcal{RF}(K) \ni (\mathcal{E}, \mathcal{F}) \mapsto R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})} \in \mathcal{RM}(K)$ は全単射，かつその逆写像は $R \in \mathcal{RM}(K)$ に $\{\mathcal{E}_{L_V} \mid V$ は K の空でない有限部分集合$\}$（L_V は $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ なる唯 1 つの $L_V \in \mathcal{LA}(V)$）の「帰納極限」を対応させることで与えられる．これを以下に系 2.33, 定理 2.35 として述べる．まず系 2.33 は，定理 2.8, 命題 2.23 の抵抗形式への一般化である次の定理から得られる．

定理 2.29. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．Y を K の空でない部分集合とし，$\mathbb{R}^Y$ の線型部分空間 $\mathcal{F}|_Y$ を $\mathcal{F}|_Y := \{v|_Y \mid v \in \mathcal{F}\}$ で定める．このと

き各 $u \in \mathcal{F}|_Y$ に対し，最小値 $\min_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u} \mathcal{E}(v,v)$ が存在して唯 1 つの $h_Y(u) = h_Y^{\mathcal{E}}(u) = h_Y^{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(u) \in \mathcal{F}$ により達成され，この $h_Y(u)$ は

$$h|_Y = u \quad かつ \quad v|_Y = 0 \text{ なる任意の } v \in \mathcal{F} \text{ に対し } \mathcal{E}(h,v) = 0 \tag{2.42}$$

を満たす唯 1 つの $h \in \mathcal{F}$ である．さらに $h_Y = h_Y^{\mathcal{E}} : \mathcal{F}|_Y \to \mathcal{F}$ は線型写像であり，

$$\mathcal{E}|_Y(u,v) := \mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(v)), \quad u,v \in \mathcal{F}|_Y \tag{2.43}$$

により $\mathcal{E}|_Y : \mathcal{F}|_Y \times \mathcal{F}|_Y \to \mathbb{R}$ を定めると $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y) \in \mathcal{RF}(Y)$, $R_{\mathcal{E}|_Y} = R_{\mathcal{E}}|_{Y\times Y}$.

証明. $z \in Y$ を取って固定する．$u \in \mathcal{F}|_Y$ とし $M_u := \inf_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u} \mathcal{E}(v,v)$ とおく．明らかに $M_u \in [0,\infty)$ である．$v|_Y = w|_Y = u$ なる $v, w \in \mathcal{F}$ に対し，$\frac{v+w}{2} \in \mathcal{F}$, $\frac{v+w}{2}\big|_Y = u$ なので $\mathcal{E}\bigl(\frac{v+w}{2}, \frac{v+w}{2}\bigr) \geq M_u$ であり，従って

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(v-w, v-w) &= 2\mathcal{E}(v,v) + 2\mathcal{E}(w,w) - \mathcal{E}(v+w, v+w)\\ &\leq 2\mathcal{E}(v,v) + 2\mathcal{E}(w,w) - 4M_u\end{aligned} \tag{2.44}$$

であることに注意する．さて，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $v_n \in \mathcal{F}$ を $v_n|_Y = u$ かつ $\mathcal{E}(v_n, v_n) \leq M_u + n^{-1}$ となるように取ると，(2.44) より $k, l \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(v_k - v_l, v_k - v_l) \leq 2(k^{-1} + l^{-1})$, 従って $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}(v_k - v_l, v_k - v_l) = 0$ となるので $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性により $h \in \mathcal{F}$ が存在して $h(z) = u(z)$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(h - v_n, h - v_n) = 0$. このとき (2.8) より $\mathcal{E}(h,h) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(v_n, v_n) = M_u$ であり，また (2.41) より任意の $y \in Y$ に対し

$$|h(y) - u(y)|^2 = |(h - v_n)(y) - (h - v_n)(z)|^2 \leq R_{\mathcal{E}}(y,z)\mathcal{E}(h - v_n, h - v_n)$$

であるので $n \to \infty$ として $h(y) = u(y)$, すなわち $h|_Y = u$ を得る．よって $M_u = \mathcal{E}(h,h) = \min_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u} \mathcal{E}(v,v)$ である．さらに $v \in \mathcal{F}$ が $v|_Y = u$, $\mathcal{E}(v,v) = M_u$ を満たすとすると (2.44) より $\mathcal{E}(h-v, h-v) = 0$, 従って (RF1) より $h - v \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ となり，$h|_Y = v|_Y = u$ より $h = v$ となる．以上で最小値 $\min_{v\in\mathcal{F},\, v|_Y=u} \mathcal{E}(v,v)$ が $h_Y(u) := h$ によってのみ達成されることが示せた．

$v \in \mathcal{F}$ が $v|_Y = 0$ を満たすとすると，任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $h_Y(u) + tv \in \mathcal{F}$, $(h_Y(u) + tv)|_Y = u$ なので $\mathcal{E}(h_Y(u) + tv, h_Y(u) + tv) \geq \mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u))$, 従って $2t\mathcal{E}(h_Y(u), v) + t^2\mathcal{E}(v,v) \geq 0$ となり，特に任意の $\varepsilon \in (0,\infty)$ に対し $t = \pm 2\varepsilon$ とすれば $|\mathcal{E}(h_Y(u), v)| \leq \varepsilon\mathcal{E}(v,v)$ となるので $\mathcal{E}(h_Y(u), v) = 0$ が分かる．すなわち $h_Y(u)$ は (2.42) を満たす．さらに $w \in \mathcal{F}$ も (2.42) を満たすとすると，$w|_Y = h_Y(u)|_Y = u$ より $(w - h_Y(u))|_Y = 0$ であるので $\mathcal{E}(w - h_Y(u), w - h_Y(u)) = \mathcal{E}(w, w - h_Y(u)) - \mathcal{E}(h_Y(u), w - h_Y(u)) = 0$ となり，(RF1) より $w - h_Y(u) \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$, 従って $w = h_Y(u)$, すなわち $h_Y(u)$ は (2.42) を満たす唯 1 つの $h \in \mathcal{F}$ である．

$\mathcal{F}|_Y$ は明らかに $\mathbb{R}^Y$ の線型部分空間である．$h_Y : \mathcal{F}|_Y \to \mathcal{F}$ の線型性は各 $u \in \mathcal{F}|_Y$ に対する (2.42) を満たす $h = h_Y(u) \in \mathcal{F}$ の一意性から直ちに従い，するとまた $\mathcal{E}|_Y : \mathcal{F}|_Y \times \mathcal{F}|_Y \to \mathbb{R}$ が非負定値対称双線型であることも直ちに分かる．明らかに $\mathbf{1}_Y = \mathbf{1}_K|_Y \in \mathcal{F}|_Y$, $h_Y(\mathbf{1}_Y) = \mathbf{1}_K$ であるので $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対する (RF1) から $\{u \in \mathcal{F}|_Y \mid \mathcal{E}|_Y(u,u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_Y$ が得られ，また $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対する (RF2) から $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ に対する (RF2) が得られる．

$\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}|_Y$ が $\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}|_Y(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとすると，$\lim_{k\wedge l\to\infty} \mathcal{E}(h_Y(u_k) - h_Y(u_l), h_Y(u_k) - h_Y(u_l)) = 0$ なので $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性

から $h \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(h - h_Y(u_n), h - h_Y(u_n)) = 0$ となり，そこで $u := h|_Y \in \mathcal{F}|_Y$ とおけば $\mathcal{E}|_Y(u - u_n, u - u_n) \le \mathcal{E}(h - h_Y(u_n), h - h_Y(u_n))$ より $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}|_Y(u - u_n, u - u_n) = 0$ となる．よって $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ は (RF1) を満たす．

$x, y \in Y, x \neq y$ とする．$u \in \mathcal{F}|_Y \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_Y$ とすると $h_Y(u) \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ なので

$$\frac{|u(x) - u(y)|^2}{\mathcal{E}|_Y(u,u)} = \frac{|h_Y(u)(x) - h_Y(u)(y)|^2}{\mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u))} \le R_{\mathcal{E}}(x,y)$$

であり，よって $R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y) \le R_{\mathcal{E}}(x,y)$. 逆に $v \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ とすると，$v(x) = v(y)$ ならば $\frac{|v(x)-v(y)|^2}{\mathcal{E}(v,v)} = 0 \le R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y)$ であり，また $v(x) \neq v(y)$ ならば $v|_Y \in \mathcal{F}|_Y \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_Y$ かつ $\mathcal{E}(v,v) \ge \mathcal{E}|_Y(v|_Y, v|_Y) > 0$, 従って

$$\frac{|v(x) - v(y)|^2}{\mathcal{E}(v,v)} \le \frac{|(v|_Y)(x) - (v|_Y)(y)|^2}{\mathcal{E}|_Y(v|_Y, v|_Y)} \le R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y)$$

であるので，$R_{\mathcal{E}}(x,y) \le R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y)$. ゆえに $R_{\mathcal{E}|_Y}(x,y) = R_{\mathcal{E}}(x,y) < \infty$, すなわち $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ は (RF3) 及び $R_{\mathcal{E}|_Y} = R_{\mathcal{E}}|_{Y\times Y}$ を満たす．

$u \in \mathcal{F}|_Y$ とすると $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対する (RF4) により，$h_Y(u)^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}$, 従ってまた $u^+ \wedge 1 = h_Y(u)^+ \wedge 1|_Y \in \mathcal{F}|_Y$ であり，さらに $\mathcal{E}|_Y(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) \le \mathcal{E}(h_Y(u)^+ \wedge 1, h_Y(u)^+ \wedge 1) \le \mathcal{E}(h_Y(u), h_Y(u)) = \mathcal{E}|_Y(u,u)$. よって $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y)$ が (RF4) も満たすことが分かり，$(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y) \in \mathcal{RF}(Y)$ が示せた． □

定理 2.29 において，(2.42) が調和性を表す条件である (2.16), (2.34) に相当することに注意されたい．すなわち，K 上の関数 $h \in \mathcal{F}$ が「$K \setminus Y$ において調和である」という概念は純粋に抵抗形式（より一般には Dirichlet 形式）$(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ だけを用いて定式化できるのである．そこで次の定義をしておく．

定義 2.30. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，Y を K の空でない部分集合とする．
(1) 定理 2.29 の $(\mathcal{E}|_Y, \mathcal{F}|_Y) \in \mathcal{RF}(Y)$ を $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Y への**トレース** (跡, trace) という．
(2) $h \in \mathcal{F}$ とする．$v|_Y = 0$ なる任意の $v \in \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{E}(h, v) = 0$ であるとき，h は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関して ***Y*-調和** (Y-harmonic) であるといい，どの抵抗形式 $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に関してかが文脈から明らかである場合には単に h は Y-調和であるという．定理 2.29 により，h が Y-調和であるためには $h \in h_Y(\mathcal{F}|_Y)$ であることが必要十分である．

注意 2.31. 定理 2.29 で行ったような,「調和拡張」$h_Y : \mathcal{F}|_Y \to \mathcal{F}$ を用いて $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ の Y へのトレースを (2.43) で定義するという構成は実は一般の正則 Dirichlet 形式の枠組みでも行うことができ，このとき得られるトレースもまた正則 Dirichlet 形式であり，さらに対応する確率過程が元の確率過程のあるランダムな時間変更[4]により与えられることが知られている．時間変更の理論は Dirichlet 形式の概念の強みを最大限に活用して展開される大変興味深い理論であり，同時に Dirichlet 形式を解析するための強力な道具であるが，その厳密な記述のためには極めて長大な解析的・確率論的準備が必要であり本稿では到底触れることができない．興味のある読者は時間変更の理論への入門としては [11, Section 6.2] を，より詳細な結果については [9, Chapter 5] を参照されたい．

[4] このランダムな時間変更は，元の確率過程の連続正値加法汎関数の右連続逆関数で与えられる．

さらに命題 2.10 の抵抗形式への一般化として，次の命題が成り立つ．

命題 2.32. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$ とし，Y,Z を $\emptyset\neq Z\subset Y$ なる K の部分集合とする．このとき $(\mathcal{E}|_Y|_Z,\mathcal{F}|_Y|_Z)=(\mathcal{E}|_Z,\mathcal{F}|_Z)$ かつ $h^{\mathcal{E}}_Y\circ h^{\mathcal{E}|_Y}_Z=h^{\mathcal{E}}_Z$.

証明. 明らかに $\mathcal{F}|_Y|_Z=\mathcal{F}|_Z$ である．$u\in\mathcal{F}|_Z$ とする．命題 2.10 の証明と同様に，$h^{\mathcal{E}}_Z(u)|_Z=h^{\mathcal{E}}_Y\circ h^{\mathcal{E}|_Y}_Z(u)|_Z=u$ に注意して定理 2.29 の結果を用いると

$$\begin{aligned}\mathcal{E}|_Z(u,u)&=\mathcal{E}(h^{\mathcal{E}}_Z(u),h^{\mathcal{E}}_Z(u))\\&\geq\min_{w\in\mathcal{F},\,w|_Y=h^{\mathcal{E}}_Z(u)|_Y}\mathcal{E}(w,w)=\mathcal{E}|_Y(h^{\mathcal{E}}_Z(u)|_Y,h^{\mathcal{E}}_Z(u)|_Y)\\&\geq\min_{v\in\mathcal{F}|_Y,\,v|_Z=u}\mathcal{E}|_Y(v,v)=\mathcal{E}|_Y|_Z(u,u)=\mathcal{E}|_Y\big(h^{\mathcal{E}|_Y}_Z(u),h^{\mathcal{E}|_Y}_Z(u)\big)\\&=\mathcal{E}\big(h^{\mathcal{E}}_Y\circ h^{\mathcal{E}|_Y}_Z(u),h^{\mathcal{E}}_Y\circ h^{\mathcal{E}|_Y}_Z(u)\big)\geq\min_{w\in\mathcal{F},\,w|_Z=u}\mathcal{E}(w,w)=\mathcal{E}|_Z(u,u).\end{aligned}$$

よって上記の計算中の各辺は全て等しく，そこで (1) の $h^{\mathcal{E}}_Z(u)$ の一意性の主張から $h^{\mathcal{E}}_Y\circ h^{\mathcal{E}|_Y}_Z(u)=h^{\mathcal{E}}_Z(u)$, すなわち $h^{\mathcal{E}}_Y\circ h^{\mathcal{E}|_Y}_Z=h^{\mathcal{E}}_Z$ を得る．また $\mathcal{E}|_Y|_Z(u,u)=\mathcal{E}|_Z(u,u)$ と $\mathcal{E}|_Y|_Z,\mathcal{E}|_Z$ の対称双線型性から $\mathcal{E}|_Y|_Z=\mathcal{E}|_Z$ が分かる． □

系 2.33. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$ とする．このとき各 $x,y\in K$ に対し

$$R_{\mathcal{E}}(x,y)=\big(\min\{\mathcal{E}(u,u)\mid u\in\mathcal{F},u(x)=1,u(y)=0\}\big)^{-1}\tag{2.45}$$
$$=\max\left\{\frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}(u,u)}\;\middle|\;u\in\mathcal{F}\setminus\mathbb{R}\mathbf{1}_K\right\}\tag{2.46}$$

（ただし $\min\emptyset:=\infty,\infty^{-1}:=0,\max\emptyset:=0$）であり，さらに K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $R_{\mathcal{E}}|_{V\times V}=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}$, 従って特に $R_{\mathcal{E}}\in\mathcal{RM}(K)$.

証明. $x,y\in K$ とする．$x=y$ のときは (2.45), (2.46) は明らかである．$x\neq y$ のとき，定理 2.29 より (2.45) の最小値は存在して正であり，また (2.22) と全く同様にして (2.46) の最大値が存在して (2.45) の右辺に等しいことが分かるので，(2.40) により (2.45), (2.46) の右辺は共に $R_{\mathcal{E}}(x,y)$ に等しい．

V を K の空でない有限部分集合とすると $x,y\in V$ に対し，$x=y$ ならば $R_{\mathcal{E}}(x,y)=0=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}(x,y)$, また $x\neq y$ ならば (2.45), 定理 2.29, 命題 2.32, $\mathcal{E}|_V=\mathcal{E}_{L_{\mathcal{E}|_V}}$, (2.21) より

$$R_{\mathcal{E}}(x,y)=\mathcal{E}|_{\{x,y\}}\big(\mathbf{1}^{\{x,y\}}_x,\mathbf{1}^{\{x,y\}}_x\big)^{-1}=\mathcal{E}|_V|_{\{x,y\}}\big(\mathbf{1}^{\{x,y\}}_x,\mathbf{1}^{\{x,y\}}_x\big)^{-1}=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}(x,y)$$

となるので，$R_{\mathcal{E}}|_{V\times V}=R_{L_{\mathcal{E}|_V}}$, 従ってまた $R_{\mathcal{E}}\in\mathcal{RM}(K)$ となる． □

系 2.34. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F})\in\mathcal{RF}(K)$ とし，各 $n\in\mathbb{N}$ に対し Y_n を K の空でない部分集合とする．このとき $u\in\mathcal{F}$ が $\mathcal{E}(u,u)=\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}|_{Y_n}(u|_{Y_n},u|_{Y_n})$ を満たすならば $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=0$.

証明. 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し (2.42) より $\mathcal{E}(h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=0$, 従ってさらに (2.43) から $\mathcal{E}(h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u)=\mathcal{E}(h_{Y_n}(u|_{Y_n}),h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=\mathcal{E}|_{Y_n}(u|_{Y_n},u|_{Y_n})$ であるので，$\mathcal{E}(u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}),u-h_{Y_n}(u|_{Y_n}))=\mathcal{E}(u,u)-\mathcal{E}|_{Y_n}(u|_{Y_n},u|_{Y_n})\xrightarrow{n\to\infty}0$. □

定理 2.35. K を空でない集合とする．
(1) $R \in \mathcal{RM}(K)$ とする．K の空でない各有限部分集合 V に対して $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ なる（唯 1 つの）$L_V \in \mathcal{LA}(V)$ を取り，$\mathcal{F}_R \subset \mathbb{R}^K, \mathcal{E}_R : \mathcal{F}_R \times \mathcal{F}_R \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F}_R := \{u \in \mathbb{R}^K \mid \sup_{V\subset K,\,1\le \#V<\infty} \mathcal{E}_{L_V}(u|_V, u|_V) < \infty\}, \tag{2.47}$$

$$\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u) := \sup_{V\subset K,\,1\le \#V<\infty} \mathcal{E}_{L_V}(u|_V, u|_V) \in [0,\infty), \quad u \in \mathcal{F}_R, \tag{2.48}$$

$$\mathcal{E}_R(u,v) := \frac{1}{2}\bigl(\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u+v) - \mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u) - \mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(v)\bigr) \in \mathbb{R}, \quad u,v \in \mathcal{F}_R \tag{2.49}$$

で定義する．このとき $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) \in \mathcal{RF}(K)$ かつ $(R_{(\mathcal{E}_R,\mathcal{F}_R)} =:)\, R_{\mathcal{E}_R} = R$.
(2) $(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ ならば $(\mathcal{E}_{R_\mathcal{E}}, \mathcal{F}_{R_\mathcal{E}}) = (\mathcal{E},\mathcal{F})$. 特に $\mathcal{RF}(K) \ni (\mathcal{E},\mathcal{F}) \mapsto R_\mathcal{E} \in \mathcal{RM}(K)$ 及び $\mathcal{RM}(K) \ni R \mapsto (\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) \in \mathcal{RF}(K)$ は互いに逆の全単射である．

証明. (1) $\mathcal{F}_R$ が $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間であることは (2.8) より容易に分かり，従って $\mathcal{E}_R : \mathcal{F}_R \times \mathcal{F}_R \to \mathbb{R}$ を (2.49) により定義することができる．明らかに，$u \in \mathcal{F}_R$, $\alpha \in \mathbb{R}$ とすると $\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(\alpha u) = \alpha^2 \mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u)$ なので特に $\mathcal{E}_R(u,u) = \mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(u) \ge 0$ であり，また $u,v \in \mathcal{F}_R$ に対し $\mathcal{E}_R(u,v) = \mathcal{E}_R(v,u)$ である．

$\mathcal{E}_R$ の双線型性を示すため，$u,v,w \in \mathcal{F}_R, \alpha \in \mathbb{R}$ とし $\mathcal{A} := \{u,v,w,u+v,\alpha u\}$ とおく．$\varepsilon \in (0,\infty)$ を任意に取る．このとき，系 2.18 より $\emptyset \ne U \subset V$ なる K の有限部分集合 U,V に対し $L_U = [L_V]_U$ であり，従って (2.15) から各 $f \in \mathcal{F}_R$ に対し $\mathcal{E}_{L_V}(f|_V, f|_V)$ が V について単調非減少であることに注意すると，K の空でない有限部分集合 V を任意の $h \in \mathcal{A} \cup \{f+g \mid f,g \in \mathcal{A}\}$ に対し $\mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(h) - \varepsilon \le \mathcal{E}_{L_V}(h|_V, h|_V) \le \mathcal{E}_R^{\mathrm{diag}}(h)$ となるように選べる．すると $f \in \mathcal{A}$ に対し，この不等式の $h = f, w, f+w$ の場合から容易に $|\mathcal{E}_R(f,w) - \mathcal{E}_{L_V}(f|_V, w|_V)| \le \varepsilon$ が得られ，これを $f = u, v, u+v, \alpha u$ に対して適用し 3 角不等式を用いることで $|\mathcal{E}_R(u+v,w) - \mathcal{E}_R(u,w) - \mathcal{E}_R(v,w)| \le 3\varepsilon$, $|\mathcal{E}_R(\alpha u, w) - \alpha\mathcal{E}_R(u,w)| \le (|\alpha|+1)\varepsilon$ が分かる．ここで $\varepsilon \in (0,\infty)$ は任意なので $\mathcal{E}_R(u+v,w) = \mathcal{E}_R(u,w) + \mathcal{E}_R(v,w)$, $\mathcal{E}_R(\alpha u, w) = \alpha\mathcal{E}_R(u,w)$ となり，$\mathcal{E}_R$ の双線型性が示せた．

$(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) \in \mathcal{RF}(K)$ かつ $R_{\mathcal{E}_R} = R$ であることの証明は 2.2 節の議論に倣う．(RF1), (RF4) は $\lim_{m\to\infty} \mathcal{E}_{L_m}((\cdot)|_{V_m}, (\cdot)|_{V_m})$ を $\sup_{V\subset K,\,1\le \#V<\infty} \mathcal{E}_{L_V}((\cdot)|_V, (\cdot)|_V)$ と置き換えれば定理 2.25-(1),(3) の証明と全く同様にして示される．

U を K の空でない有限部分集合，$u \in \mathbb{R}^U$ とする．$v|_U = u$ なる任意の $v \in \mathcal{F}_R$ に対し定義より $\mathcal{E}_R(v,v) \ge \mathcal{E}_{L_U}(u,u)$ であることに注意する．$h|_U = u$ なる $h \in \mathcal{F}_R$ で $\mathcal{E}_R(h,h) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u)$ を満たすものが存在する（従って $\mathcal{E}_{L_U}(u,u) = \min_{v\in\mathcal{F}_R,\, v|_U = u} \mathcal{E}_R(v,v)$ である）ことを示そう．$h \in \mathbb{R}^K$ を，$x \in K$ に対し $h(x) := h_U^{L_{U\cup\{x\}}}(u)(x)$ とおくことで定める．$h_U^{L_U} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^U}$ より $h|_U = u$ である．V を K の空でない有限部分集合とし $W := U \cup V$ とおくと，$x \in W$ に対し命題 2.10 より $h(x) = h_U^{L_{U\cup\{x\}}}(u)(x) = \bigl(h_{U\cup\{x\}}^{L_W} \circ h_U^{[L_W]_{U\cup\{x\}}}(u)\bigr)(x) = h_U^{L_W}(u)(x)$, すなわち $h|_W = h_U^{L_W}(u)$ であるので

$$\mathcal{E}_{L_V}(h|_V, h|_V) \le \mathcal{E}_{L_W}(h|_W, h|_W) = \mathcal{E}_{L_W}\bigl(h_U^{L_W}(u), h_U^{L_W}(u)\bigr) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u).$$

これは $\max_{V\subset K,\,1\le \#V<\infty} \mathcal{E}_{L_V}(h|_V, h|_V) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u)$ を意味し，よって $h \in \mathcal{F}_R$ かつ $\mathcal{E}_R(h,h) = \mathcal{E}_{L_U}(u,u) = \min_{v\in\mathcal{F}_R,\, v|_U = u} \mathcal{E}_R(v,v)$ となる．

$x,y \in K, x \ne y$ とする．前段落において特に $U := \{x,y\}, u := \mathbf{1}_x^{\{x,y\}}$ としたときの h を考えると，$h \in \mathcal{F}_R$, $h(x) = 1 \ne 0 = h(y)$ であるので $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ が

(RF2) を満たすことが分かり，さらに

$$\frac{|h(x)-h(y)|^2}{\mathcal{E}_R(h,h)} = \mathcal{E}_{L_{\{x,y\}}}\big(\mathbf{1}_x^{\{x,y\}}, \mathbf{1}_x^{\{x,y\}}\big)^{-1} = R_{L_{\{x,y\}}}(x,y) = R(x,y). \tag{2.50}$$

他方，各 $u \in \mathcal{F}_R \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ に対し $\mathcal{E}_R(u,u) \geq \mathcal{E}_{L_{\{x,y\}}}(u|_{\{x,y\}}, u|_{\{x,y\}}) = \frac{|u(x)-u(y)|^2}{R(x,y)}$, 従って $\frac{|u(x)-u(y)|^2}{\mathcal{E}_R(u,u)} \leq R(x,y) < \infty$ であるので，(2.50) と合わせて $R_{\mathcal{E}_R}(x,y) = R(x,y) < \infty$ を得る．すなわち $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ は (RF3) を満たし，従って $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) \in \mathcal{RF}(K)$ であり，かつ $R_{\mathcal{E}_R} = R$. なお前段落の結果から，K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $L_{\mathcal{E}_R|_V} = L_V$ であることを注意しておく．

(2) $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，$R := R_{\mathcal{E}}$ とおく．K の空でない各有限部分集合 V に対し $L_V := L_{\mathcal{E}|_V} \in \mathcal{LA}(V)$ とおく．系 2.33 により $R|_{V\times V} = R_{L_V}$ であるので，$(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ はこの $\{L_V\}_{V\subset K,\, 1\leq \#V<\infty}$ を用いて (2.47), (2.48), (2.49) により定義される．さらに上記 (1) の証明の最後に注意したように $L_{\mathcal{E}_R|_V} = L_V$ であり，すると任意の $u \in \mathbb{R}^V$ と $x \in K$ に対し，$h_V^{\mathcal{E}_R|_{V\cup\{x\}}} = h_V^{L_{V\cup\{x\}}} = h_V^{\mathcal{E}|_{V\cup\{x\}}}$ に注意すれば命題 2.32 より

$$\begin{aligned} h_V^{\mathcal{E}_R}(u)(x) &= \big(h_{V\cup\{x\}}^{\mathcal{E}_R} \circ h_V^{L_{V\cup\{x\}}}(u)\big)(x) = h_V^{L_{V\cup\{x\}}}(u)(x) \\ &= \big(h_{V\cup\{x\}}^{\mathcal{E}} \circ h_V^{L_{V\cup\{x\}}}(u)\big)(x) = h_V^{\mathcal{E}}(u)(x) \end{aligned}$$

となるので，$h_V^{\mathcal{E}_R}(u) = h_V^{\mathcal{E}}(u)$. そこで $h_V^{\mathcal{E}} : \mathbb{R}^V \to \mathcal{F}$ を以下では単に h_V で表す．特に，(2.43) を $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R)$ 及び $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対して用いることにより任意の $u, v \in \mathbb{R}^V$ に対し $\mathcal{E}_{L_V}(u,v) = \mathcal{E}_R(h_V(u), h_V(v)) = \mathcal{E}(h_V(u), h_V(v))$ であることが分かる．

まず $u \in \mathcal{F}$ とすると，定理 2.29 より K の任意の空でない有限部分集合 V に対し $\mathcal{E}_{L_V}(u|_V, u|_V) \leq \mathcal{E}(u,u)$, 従って $u \in \mathcal{F}_R$, $\mathcal{E}_R(u,u) \leq \mathcal{E}(u,u)$. 特に $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}_R$.

$u \in \mathcal{F}_R$ とする．各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}_{L_{V_n}}(u|_{V_n}, u|_{V_n}) \geq \mathcal{E}_R(u,u) - n^{-1}$ を満たす K の空でない有限部分集合 V_n を取り $u_n := h_{V_n}(u|_{V_n})$ とおくと，$\mathcal{E}_R(u,u) - n^{-1} \leq \mathcal{E}_{L_{V_n}}(u|_{V_n}, u|_{V_n}) = \mathcal{E}_R|_{V_n}(u|_{V_n}, u|_{V_n}) \leq \mathcal{E}_R(u,u)$ であるので系 2.34 より $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_R(u-u_n, u-u_n) = 0$. 他方 $k, l \in \mathbb{N}$ に対し，命題 2.32 により $u_k = h_{V_k\cup V_l} \circ h_{V_k}^{L_{V_k\cup V_l}}(u|_{V_k}) = h_{V_k\cup V_l}(u_k|_{V_k\cup V_l})$, $u_l = h_{V_k\cup V_l}(u_l|_{V_k\cup V_l})$ なので $u_k - u_l = h_{V_k\cup V_l}((u_k-u_l)|_{V_k\cup V_l})$ であり，そこで前々段落の最後に述べた事実と (2.8) 及び $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_R(u-u_n, u-u_n) = 0$ から $\mathcal{E}(u_k-u_l, u_k-u_l) = \mathcal{E}_R(u_k-u_l, u_k-u_l) \xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 0$. よって $(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性から $v \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(v-u_n, v-u_n) = 0$, 従って (2.8) より $\mathcal{E}(v,v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n)$ であるが，$n \in \mathbb{N}$ に対し前段落の結果から $v \in \mathcal{F}_R$, $\mathcal{E}_R(v-u_n, v-u_n) \leq \mathcal{E}(v-u_n, v-u_n)$ なので $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_R(v-u_n, v-u_n) = 0$ でもあり，これと (2.8), $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_R(u-u_n, u-u_n) = 0$ から $\mathcal{E}_R(u-v, u-v) = 0$ となる．ゆえに (RF1) より $u - v \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K \subset \mathcal{F}$, 従って $u = (u-v) + v \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}(v,v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}_R(u_n, u_n) = \mathcal{E}_R(u,u)$ であり，前段落の結果と合わせて $(\mathcal{E}_R, \mathcal{F}_R) = (\mathcal{E}, \mathcal{F})$ が分かる． □

上記の定理 2.35-(2) の証明において $\mathcal{E}_{L_V} = \mathcal{E}_{L_{\mathcal{E}|_V}} = \mathcal{E}|_V$ であるので，これを (2.47), (2.48), (2.49) に当てはめ $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) = (\mathcal{E}_{R_{\mathcal{E}}}, \mathcal{F}_{R_{\mathcal{E}}})$ を用いることで次を得る．

系 2.36. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とするとき，

$$\mathcal{F} = \{u \in \mathbb{R}^K \mid \sup_{V\subset K,\, 1\le \#V<\infty} \mathcal{E}|_V(u|_V, u|_V) < \infty\}, \tag{2.51}$$

$$\mathcal{E}(u,u) = \sup_{V\subset K,\, 1\le \#V<\infty} \mathcal{E}|_V(u|_V, u|_V), \quad u \in \mathcal{F}. \tag{2.52}$$

系 2.36 から，抵抗形式について次の一連の重要な基本性質が得られる．

定理 2.37. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．
(1) $n \in \mathbb{N}$, $\{u_k\}_{k=1}^n \subset \mathcal{F}$, $u : K \to \mathbb{R}$, $p \in (0,2]$ とし，任意の $x, y \in K$ に対し $|u(x)-u(y)|^p \le \sum_{k=1}^n |u_k(x)-u_k(y)|^p$ と仮定する．このとき $u \in \mathcal{F}$ かつ

$$\mathcal{E}(u,u)^{p/2} \le \sum_{k=1}^n \mathcal{E}(u_k,u_k)^{p/2}. \tag{2.53}$$

(2) $u \in \mathcal{F}$, $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ とする．このとき，$\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u-u_n, u-u_n) = 0$ となるためには，$\limsup_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n,u_n) \le \mathcal{E}(u,u)$ かつ任意の $x, y \in K$ に対し $\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(y)) = u(x)-u(y)$ となることが必要十分である．

証明. (1) V を K の空でない有限部分集合とし $(L^V_{xy})_{x,y\in V} := L_{\mathcal{E}|_V}$ とすると，$2/p \in [1,\infty)$ に注意して $u, \{u_k\}_{k=1}^n$ に対する仮定と Minkowski の不等式により

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}|_V(u|_V,u|_V)^{p/2} &= \Bigl(\frac{1}{2}\sum_{x,y\in V,\, x\neq y} L^V_{xy}\bigl(|u(x)-u(y)|^p\bigr)^{2/p}\Bigr)^{p/2} \\
&\le \Bigl(\frac{1}{2}\sum_{x,y\in V,\, x\neq y} L^V_{xy}\Bigl(\sum_{k=1}^n |u_k(x)-u_k(y)|^p\Bigr)^{2/p}\Bigr)^{p/2} \\
&\le \sum_{k=1}^n \Bigl(\frac{1}{2}\sum_{x,y\in V,\, x\neq y} L^V_{xy}\bigl(|u_k(x)-u_k(y)|^p\bigr)^{2/p}\Bigr)^{p/2} \\
&= \sum_{k=1}^n \mathcal{E}|_V(u_k|_V,u_k|_V)^{p/2} \le \sum_{k=1}^n \mathcal{E}(u_k,u_k)^{p/2} < \infty.
\end{aligned}$$

そこで V について上限を取り系 2.36 を用いれば $u \in \mathcal{F}$ と (2.53) が得られる．
(2) 必要性は (2.8) と (2.41) から明らかであるので，十分性を示せばよい．まず $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n) = \mathcal{E}(u,u)$ を示す．$\varepsilon \in (0,\infty)$ とする．$\limsup_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n) \le \mathcal{E}(u,u)$ より $N_1 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \ge N_1$ なる任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u_n,u_n) \le \mathcal{E}(u,u)+\varepsilon$. また系 2.36 より K の空でない有限部分集合 V を $\mathcal{E}|_V(u|_V,u|_V) > \mathcal{E}(u,u)-\varepsilon$ となるように取れるが，$\mathcal{E}|_V = \mathcal{E}_{L_{\mathcal{E}|_V}}$ に対する (2.10) と $x,y \in V$ に対し $\lim_{n\to\infty}(u_n(x)-u_n(y)) = u(x)-u(y)$ であることから $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}|_V(u_n|_V,u_n|_V) = \mathcal{E}|_V(u|_V,u|_V) > \mathcal{E}(u,u)-\varepsilon$. そこで (2.52) に注意すれば，$N_2 \in \mathbb{N}$ が存在して $n \ge N_2$ なる任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u,u)-\varepsilon < \mathcal{E}|_V(u_n|_V,u_n|_V) \le \mathcal{E}(u_n,u_n)$ となり，従って $n \ge N_1 \vee N_2$ なる任意の $n \in \mathbb{N}$ に対し $\mathcal{E}(u,u)-\varepsilon \le \mathcal{E}(u_n,u_n) \le \mathcal{E}(u,u)+\varepsilon$. 以上で $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}(u_n,u_n) = \mathcal{E}(u,u)$ が示せた．

さて，(2.8) により $\bigl\{\frac{u+u_n}{2}\bigr\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ も $u \in \mathcal{F}$ に対して $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ と同じ仮定を満たすので前段落の結果から $\lim_{n\to\infty}\mathcal{E}\bigl(\frac{u+u_n}{2},\frac{u+u_n}{2}\bigr) = \mathcal{E}(u,u)$ であり，よって $\mathcal{E}(u-u_n,u-u_n) = 2\mathcal{E}(u,u)+2\mathcal{E}(u_n,u_n)-\mathcal{E}(u+u_n,u+u_n)$ は $n\to\infty$ のとき $2\mathcal{E}(u,u)+2\mathcal{E}(u,u)-4\mathcal{E}(u,u) = 0$ に収束する．これで十分性が示せた． □

系 2.38. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．
(1) $u \in \mathcal{F}$ に対し $|u|, u^+, u^- \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(|u|,|u|)\vee\mathcal{E}(u^+,u^+)\vee\mathcal{E}(u^-,u^-) \le \mathcal{E}(u,u)$.

(2) $u,v \in \mathcal{F}$ に対し $u \vee v, u \wedge v \in \mathcal{F}$ かつ $\mathcal{E}(u \vee v, u \vee v) + \mathcal{E}(u \wedge v, u \wedge v) \leq \mathcal{E}(u,u) + \mathcal{E}(v,v)$.
(3) $\mathcal{F}_{\mathrm{b}} := \{u \in \mathcal{F} \mid \|u\|_\infty < \infty\}$ とおくとき，$u,v \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ に対し $uv \in \mathcal{F}_{\mathrm{b}}$ かつ $\mathcal{E}(uv,uv)^{1/2} \leq \|v\|_\infty \mathcal{E}(u,u)^{1/2} + \|u\|_\infty \mathcal{E}(v,v)^{1/2}$.
(4) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は任意の $s,t \in \mathbb{R}$ に対し $|\varphi_n(s) - \varphi_n(t)| \leq |s-t|$ を満たすとし，さらに任意の $t \in \mathbb{R}$ に対し $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t) = t$ と仮定する．このとき $u \in \mathcal{F}$ に対し $\{\varphi_n \circ u\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u - \varphi_n \circ u, u - \varphi_n \circ u) = 0$.
(5) $u \in \mathcal{F}, \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ は $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u - u_n, u - u_n) = 0$ を満たすとし，さらに $\lim_{n\to\infty} u_n(x) = u(x)$ となる $x \in K$ が存在すると仮定する．このとき $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が任意の $s,t \in \mathbb{R}$ に対し $|\varphi(s) - \varphi(t)| \leq |s-t|$ を満たし，かつ $\varphi \circ u = u$ ならば，$\{\varphi \circ u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ かつ $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u - \varphi \circ u_n, u - \varphi \circ u_n) = 0$.

証明. (1) $v \in \{|u|, u^+, u^-\}$ とすると明らかに任意の $x,y \in K$ に対し $|v(x) - v(y)| \leq |u(x) - u(y)|$ であるので，定理 2.37-(1) から $v \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(v,v) \leq \mathcal{E}(u,u)$.
(2) $u \vee v = \frac{1}{2}(u + v + |u-v|), u \wedge v = \frac{1}{2}(u + v - |u-v|)$ であるので，(1) より $|u-v|, u \vee v, u \wedge v \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(|u-v|, |u-v|) \leq \mathcal{E}(u-v, u-v)$ であり，従って

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}(u \vee v, u \vee v) + \mathcal{E}(u \wedge v, u \wedge v) &= \tfrac{1}{2}(\mathcal{E}(u+v, u+v) + \mathcal{E}(|u-v|, |u-v|)) \\
&\leq \tfrac{1}{2}(\mathcal{E}(u+v, u+v) + \mathcal{E}(u-v, u-v)) = \mathcal{E}(u,u) + \mathcal{E}(v,v).
\end{aligned}
$$

(3) $u_1 := \|v\|_\infty u, u_2 := \|u\|_\infty v$ とおくと $u_1, u_2 \in \mathcal{F}$ であり，$x,y \in K$ に対し

$$
\begin{aligned}
|(uv)(x) - (uv)(y)| &\leq |v(x)||u(x) - u(y)| + |u(y)||v(x) - v(y)| \\
&\leq \|v\|_\infty |u(x) - u(y)| + \|u\|_\infty |v(x) - v(y)| = \textstyle\sum_{k=1}^2 |u_k(x) - u_k(y)|
\end{aligned}
$$

なので，定理 2.37-(1) を用いれば $\|uv\|_\infty \leq \|u\|_\infty \|v\|_\infty < \infty$ と合わせ主張を得る．
(4) 定理 2.37-(1) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi_n \circ u \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(\varphi_n \circ u, \varphi_n \circ u) \leq \mathcal{E}(u,u)$ であり，そこで定理 2.37-(2) を用いれば $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u - \varphi_n \circ u, u - \varphi_n \circ u) = 0$ が従う．
(5) 任意の $y \in K$ に対し，$u, \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ に対する仮定と (2.41) から

$$
|u(y) - u_n(y)| \leq R_{\mathcal{E}}(x,y)^{1/2} \mathcal{E}(u - u_n, u - u_n)^{1/2} + |u(x) - u_n(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0,
$$

従って $\lim_{n\to\infty} u_n(y) = u(y)$, よってさらに $\lim_{n\to\infty} \varphi \circ u_n(y) = \varphi \circ u(y) = u(y)$ であり，また定理 2.37-(1) より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $\varphi \circ u_n \in \mathcal{F}, \mathcal{E}(\varphi \circ u_n, \varphi \circ u_n) \leq \mathcal{E}(u,u)$. ゆえに定理 2.37-(2) により $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u - \varphi \circ u_n, u - \varphi \circ u_n) = 0$. □

注意 2.39. 系 2.38-(4) は，$\varphi_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\varphi_n(t) = (-n) \vee (t \wedge n)$ で与えられる場合及び $\varphi_n(t) = t - (-n^{-1}) \vee (t \wedge n^{-1})$ で与えられる場合によく用いられる．また系 2.38-(5) は $u \geq 0$ で $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が $\varphi(t) = t^+$ で与えられる場合によく用いられる．

次に「有限集合上の Laplacian の適合列の極限は可算集合で定義されているに過ぎない」という前節の最後に触れた問題の解決策として，抵抗形式は有効抵抗距離に関する完備化を取る操作で不変であることを示そう．

定理 2.40. (K,R) を距離空間とし，$K_0 \subset K$ は $\overline{K_0}^K = K$ と $R|_{K_0 \times K_0} \in \mathcal{RM}(K_0)$ を満たすとする．$R_{\mathcal{E}_0} = R|_{K_0 \times K_0}$ なる（唯 1 つの）$(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) \in \mathcal{RF}(K_0)$ を取り，

$$
\mathcal{F} := \{u \in C(K) \mid u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0\}, \qquad \mathcal{E}(u,v) := \mathcal{E}_0(u|_{K_0}, v|_{K_0}), \quad u,v \in \mathcal{F} \tag{2.54}
$$

により $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^K$ と $\mathcal{E}: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を定める．このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$, $R_{\mathcal{E}} = R$ であり，$\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0$ は線型同型である．

証明. 明らかに $\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間であり，$\mathcal{E}: \mathcal{F} \times \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ は非負定値対称双線型である．$u \in \mathcal{F}_0$ とすると (2.41) より $u: K_0 \to \mathbb{R}$ は（R 及び $\mathbb{R}$ 上の通常の距離に関して）一様連続であるから，演習 1.9-(1) より $v \in C(K)$ が唯 1 つ存在して $v|_{K_0} = u$ となり，このとき $v \in \mathcal{F}$ である．従って $\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0$ は全単射，よって線型同型である．そこで $\mathbf{1}_K|_{K_0} = \mathbf{1}_{K_0}$ に注意すると，$(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$ に対する (RF1), (RF4) から $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に対する (RF1), (RF4) が直ちに従う．また $u \in \mathcal{F}$ とすると，$K \times K$ 上の連続関数 $K \times K \ni (x, y) \mapsto |u(x) - u(y)|^2 - R(x, y)\mathcal{E}(u, u) \in \mathbb{R}$ は $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$ と $u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0$ に対する (2.41) により $K_0 \times K_0$ 上 $(-\infty, 0]$ 値であるので，連続性から $\overline{K_0 \times K_0}^{K \times K} = K \times K$ 上でも $(-\infty, 0]$ 値である．すなわち任意の $u \in \mathcal{F}$ と任意の $x, y \in K$ に対し $|u(x) - u(y)|^2 \leq R(x, y)\mathcal{E}(u, u)$.

後は $x, y \in K, x \neq y$ とし，$u \in \mathcal{F}$ で $u(x) = 1, u(y) = 0, \mathcal{E}(u, u) = R(x, y)^{-1}$ を満たすものが存在することを示せば，(RF2) が得られ，さらに前段落の結果と合わせると (2.40) の上限は最大値であって $\mathcal{E}(u, u)^{-1} = R(x, y)$ に等しいことが分かるので，(RF3) と $R_{\mathcal{E}} = R$ も従い証明が完了する．そこで以下そのような $u \in \mathcal{F}$ の存在を示す．$\overline{K_0}^K = K, R(x, y) > 0$ より各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $x_n, y_n \in K_0$ を $R(x, x_n) \vee R(y, y_n) < n^{-1} \wedge \frac{R(x,y)}{2}$ となるように取れて，このとき $R(x_n, y_n) > 0$, 従って $x_n \neq y_n$ なのでさらに $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) \in \mathcal{RF}(K_0)$ に対する定理 2.29 により，$u_n \in \mathcal{F}$ で $u_n(x_n) = 1, u_n(y_n) = 0, \mathcal{E}(u_n, u_n) = R(x_n, y_n)^{-1}$ を満たすものが唯 1 つ存在し $u_n|_{K_0} = h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_n, y_n\}}(\mathbf{1}^{\{x_n, y_n\}}_{x_n})$ である．(2.42), (2.43) より任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(u_k, u_l) &= \mathcal{E}_0(u_k|_{K_0}, u_l|_{K_0}) = \mathcal{E}_0\bigl(h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_k, y_k\}}(\mathbf{1}^{\{x_k, y_k\}}_{x_k}), u_l|_{K_0}\bigr) \\ &= \mathcal{E}_0\bigl(h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_k, y_k\}}(\mathbf{1}^{\{x_k, y_k\}}_{x_k}), h^{\mathcal{E}_0}_{\{x_k, y_k\}}(u_l|_{\{x_k, y_k\}})\bigr) \\ &= \mathcal{E}_0|_{\{x_k, y_k\}}\bigl(\mathbf{1}^{\{x_k, y_k\}}_{x_k}, u_l|_{\{x_k, y_k\}}\bigr) = R(x_k, y_k)^{-1}(u_l(x_k) - u_l(y_k)).\end{aligned} \tag{2.55}$$

さらに $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$ に対する (2.41) から，任意の $k, l \in \mathbb{N}$ に対し

$$\begin{aligned}|u_l(x_k) - 1|^2 = |u_l(x_k) - u_l(x_l)|^2 \leq R(x_k, x_l)\mathcal{E}(u_l, u_l) = R(x_k, x_l)R(x_l, y_l)^{-1}, \\ |u_l(y_k)|^2 = |u_l(y_k) - u_l(y_l)|^2 \leq R(y_k, y_l)\mathcal{E}(u_l, u_l) = R(y_k, y_l)R(x_l, y_l)^{-1}\end{aligned}$$

であるが，$\lim_{n\to\infty} R(x_n, x) \vee R(y_n, y) = 0$ より $\lim_{n\to\infty} R(x_n, y_n) = R(x, y) > 0$, $\lim_{k\wedge l\to\infty} R(x_k, x_l) \vee R(y_k, y_l) = 0$ なので，$\lim_{k\wedge l\to\infty}(u_l(x_k) - u_l(y_k)) = 1$ となる．これと (2.55) 及び $\lim_{n\to\infty} R(x_n, y_n) = R(x, y) > 0$ から

$$\begin{aligned}&\mathcal{E}(u_k - u_l, u_k - u_l) \\ &= R(x_k, y_k)^{-1} + R(x_l, y_l)^{-1} - 2R(x_k, y_k)^{-1}(u_l(x_k) - u_l(y_k)) \xrightarrow{k\wedge l\to\infty} 0\end{aligned}$$

となるので，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性により $\lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(v - u_n, v - u_n) = 0$ となる $v \in \mathcal{F}$ が存在し，(2.8) より $\mathcal{E}(v, v) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{E}(u_n, u_n) = \lim_{n\to\infty} R(x_n, y_n)^{-1} = R(x, y)^{-1}$. また v は K 上連続なので $v(x) - v(y) = \lim_{n\to\infty}(v(x_n) - v(y_n))$ であり，$(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0)$ に対する (2.41) から $n \in \mathbb{N}$ に対し

$$|v(x_n) - v(y_n) - 1|^2 = |(v - u_n)(x_n) - (v - u_n)(y_n)|^2$$

$$\le R(x_n, y_n)\mathcal{E}(v - u_n, v - u_n) \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

であるので，$v(x) - v(y) = 1$ である．そこで $u := v - v(y)$ とすれば $u \in \mathcal{F}$, $u(x) = 1, u(y) = 0, \mathcal{E}(u,u) = \mathcal{E}(v,v) = R(x,y)^{-1}$. 以上で証明が完了した． □

(K, R) が $(K_0, R_{\mathcal{E}_0})$ の完備化として与えられている場合に定理 2.40 を適用することで，有効抵抗距離に関する完備化についての次の系を得る．

系 2.41. K_0 を空でない集合，$(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) \in \mathcal{RF}(K_0)$ とし，(K, R) を $(K_0, R_{\mathcal{E}_0})$ の完備化，すなわち（等長同型を除いて一意的に存在する）$K_0 \subset K$, $R|_{K_0\times K_0} = R_{\mathcal{E}_0}$, $\overline{K_0}^K = K$ を満たす完備距離空間とする．このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ を (2.54) により定めると，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$, $R_{\mathcal{E}} = R$ であり，$\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{K_0} \in \mathcal{F}_0$ は線型同型である．

抵抗形式を新たに構成するという立場からは初めに有限集合上の Laplacian の適合列を与えるのが自然であり，その場合には系 2.41 は次のように述べられる．

系 2.42. $\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ を有限集合上の Laplacian の適合列，(K, R) を $(V_*(\mathcal{S}), R_{\mathcal{S}})$ の完備化とし，$\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^K, \mathcal{E} : \mathcal{F}\times\mathcal{F} \to \mathbb{R}$ を

$$\mathcal{F} := \{u \in C(K) \mid u|_{V_*(\mathcal{S})} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\}, \qquad \mathcal{E}(u,v) := \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u|_{V_*(\mathcal{S})}, v|_{V_*(\mathcal{S})}), \quad u, v \in \mathcal{F} \tag{2.56}$$

により定める．このとき $(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$, $R_{\mathcal{E}} = R$ であり，$\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{V_*(\mathcal{S})} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は線型同型である．

証明. 定義 2.28 の直前の段落で注意したように $(\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}}) \in \mathcal{RF}(V_*(\mathcal{S}))$, $R_{\mathcal{S}} = R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}$ であるので，$K_0 := V_*(\mathcal{S})$, $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) := (\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ として系 2.41 を適用することにより主張を得る． □

注意 2.43. 系 2.41, 系 2.42 において (K, R) は $(K_0, R_{\mathcal{E}_0})$ あるいは $(V_*(\mathcal{S}), R_{\mathcal{S}})$ の抽象的な完備化として与えられているに過ぎず，(K, R) **が具体的にどのような距離空間になっているかは個別の解析を経なければ分からない**ことに注意されたい．

実際，第 3 章の主題である自己相似集合上の Laplacian の構成は，$V_*(\mathcal{S})$ が与えられた自己相似集合 K' の部分集合である場合に系 2.42 を適用することによりなされるが，その場合 $(V_*(\mathcal{S}), R_{\mathcal{S}})$ の完備化 (K, R) を位相空間として元の自己相似集合 K' と同一視できるかどうかは非自明であり，できることもできないこともある．この詳細は第 3 章を，さらにより詳しくは [21, Section 3.3] を参照のこと．

定理 2.40 において元の K 上の距離関数 R 自身が既に $R \in \mathcal{RM}(K)$ を満たしており，さらに K_0 が可算集合である場合を考えれば次の系が得られる．

系 2.44. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，K を距離関数 $R_{\mathcal{E}}$ により位相空間と見なす．K は可分と仮定し，K の空でない有限部分集合の非減少列 $\{V_m\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ で $V_* := \bigcup_{m=0}^{\infty} V_m$ が $\overline{V_*}^K = K$ を満たすものを取る．このとき $\mathcal{S} := \{(V_m, L_{\mathcal{E}|_{V_m}})\}_{m\in\mathbb{N}\cup\{0\}}$ は有限集合上の Laplacian の適合列，

$$\mathcal{F} = \{u \in C(K) \mid u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\}, \qquad \mathcal{E}(u,v) = \mathcal{E}_{\mathcal{S}}(u|_{V_*}, v|_{V_*}), \quad u, v \in \mathcal{F} \tag{2.57}$$

であり，$\mathcal{F} \ni u \mapsto u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ は線型同型である．

証明. $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し $L_m := L_{\mathcal{E}|_{V_m}}$ とおく．$m \le n$ なる $m, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し命題 2.32 と定理 2.8 より $\mathcal{E}_{L_m} = \mathcal{E}|_{V_m} = \mathcal{E}|_{V_n}|_{V_m} = \mathcal{E}_{L_n}|_{V_m} = \mathcal{E}_{[L_n]_{V_m}}$ であるので $L_m = [L_n]_{V_m}$, すなわち $\mathcal{S} = \{(V_m, L_m)\}_{m \in \mathbb{N} \cup \{0\}}$ は有限集合上の Laplacian の適合列であり，さらに $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ に対し系 2.33 と (2.33) より $R_{\mathcal{E}}|_{V_m \times V_m} = R_{L_m} = R_{\mathcal{S}}|_{V_m \times V_m} = R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}|_{V_m \times V_m}$, よって $R_{\mathcal{E}}|_{V_* \times V_*} = R_{\mathcal{E}_{\mathcal{S}}}$. そこで $R := R_{\mathcal{E}}$, $K_0 := V_*$, $(\mathcal{E}_0, \mathcal{F}_0) := (\mathcal{E}_{\mathcal{S}}, \mathcal{F}_{\mathcal{S}})$ として定理 2.40 を用いれば，(2.57) の両式の右辺が $R_{\mathcal{E}}$ を有効抵抗距離に持つ K 上の抵抗形式を定め，かつ $\{u \in C(K) \mid u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}\} \ni u \mapsto u|_{V_*} \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}}$ が線型同型であることが分かる．ところが定理 2.35-(2) によりこの抵抗形式は $(\mathcal{E}, \mathcal{F})$ に等しいので (2.57) が得られ，主張が従う． □

本節の最後に，補題 2.20 の一般化として抵抗形式に対しては空でない閉集合を境界とする Green 関数が自然に定まり有効抵抗距離を用いて具体的に表現されることを示し，関連する事実を述べる．次の定義と命題はそのための準備である．

定義 2.45. 空でない集合 K と $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間 $\mathcal{F}$ に対し，

$$\mathcal{F}(U) := \{u \in \mathcal{F} \mid u|_{K \setminus U} = 0\}, \quad U \subset K, \tag{2.58}$$

$$B^{\mathcal{F}} := \bigcap\nolimits_{u \in \mathcal{F}(K \setminus B)} u^{-1}(0), \quad B \subset K \tag{2.59}$$

と定める．各 $B \subset K$ に対し容易に分かるように $B \subset B^{\mathcal{F}}, \mathcal{F}(K \setminus B^{\mathcal{F}}) = \mathcal{F}(K \setminus B)$ であり，従ってまた $(B^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}} = B^{\mathcal{F}}$ であることを注意しておく．

命題 2.46. K を空でない集合とし，$\mathcal{F}$ は $\mathbb{R}^K$ の線型部分空間で $\{u^+ \wedge 1 \mid u \in \mathcal{F}\} \subset \mathcal{F}$, 及び任意の $x \in K$ に対し $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) \neq 0$, を満たすとする．このとき $\emptyset^{\mathcal{F}} = \emptyset$, かつ各 $A, B \subset K$ に対し $(A \cup B)^{\mathcal{F}} = A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$ であり，特に K には $B \mapsto B^{\mathcal{F}}$ を閉包作用子とする位相が入る．また，任意の $x \in K$ に対し $\{x\}^{\mathcal{F}} = \{x\}$ となるためには $\mathcal{F}$ が定義 2.26 の (RF2) を満たすことが必要十分である．

証明. 仮定より各 $x \in K$ に対し $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) \neq 0$ すなわち $x \notin u^{-1}(0)$ であるので，$\emptyset^{\mathcal{F}} = \bigcap_{u \in \mathcal{F}} u^{-1}(0) = \emptyset$. 次に $A, B \subset K$ とする．$\mathcal{F}(K \setminus (A \cup B)) = \mathcal{F}(K \setminus A) \cap \mathcal{F}(K \setminus B)$ なので $A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}} \subset (A \cup B)^{\mathcal{F}}$ である．逆に $x \in K \setminus (A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}})$ とすると，$u \in \mathcal{F}(K \setminus A), v \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ が存在して $u(x) = v(x) = 1$ となり，そこで $g := u^+ \wedge 1, h := v^+ \wedge 1, f := g + h - (g + h)^+ \wedge 1$ とおけば，$g, h, f \in \mathcal{F}$, $f(x) = 1$ であり，また各 $y \in A \cup B$ に対し $u(y) = 0$ または $v(y) = 0$ より $(g + h)(y) \in [0, 1]$, 従って $f(y) = 0$ なので $f \in \mathcal{F}(K \setminus (A \cup B))$, よって $x \in K \setminus (A \cup B)^{\mathcal{F}}$ である．ゆえに $(A \cup B)^{\mathcal{F}} \subset A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$ となり，$(A \cup B)^{\mathcal{F}} = A^{\mathcal{F}} \cup B^{\mathcal{F}}$ が示せた．定義 2.45 で注意したように各 $B \subset K$ に対し $B \subset B^{\mathcal{F}} = (B^{\mathcal{F}})^{\mathcal{F}}$ でもあるので，$B \mapsto B^{\mathcal{F}}$ は閉包作用子の公理を満たし，よってこれを閉包作用子とする位相が K に入る．

$\mathcal{F}$ が定義 2.26 の (RF2) を満たすとすると，$x \neq y$ なる任意の $x, y \in K$ に対し，補題 2.27 より $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(x) = 0 \neq u(y)$ となり，従って $u \in \mathcal{F}(K \setminus \{x\})$, $y \notin u^{-1}(0)$ であるので $y \notin \{x\}^{\mathcal{F}}$, ゆえに $\{x\}^{\mathcal{F}} = \{x\}$. 逆に任意の $x \in K$ に対し $\{x\}^{\mathcal{F}} = \{x\}$ であるとすると，$x \neq y$ なる任意の $x, y \in K$ に対し $y \notin \{x\} = \{x\}^{\mathcal{F}}$ より $u \in \mathcal{F}(K \setminus \{x\})$, すなわち $u(x) = 0$ なる $u \in \mathcal{F}$ が存在して $u(y) \neq 0$ となるので，$\mathcal{F}$ は定義 2.26 の (RF2) を満たす． □

命題 2.47. K を空でない集合，$(\mathcal{E}, \mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとする．$K_B := (K \setminus B) \cup \{B\}$ とおき，$\pi_B : K \to K_B$ を

$x \in K \setminus B$ に対し $\pi_B(x) := x$, また $x \in B$ に対し $\pi_B(x) := B$ で定める．このとき

$$\mathcal{F}^B := \{u \in \mathbb{R}^{K_B} \mid u \circ \pi_B \in \mathcal{F}\}, \tag{2.60}$$

$$\mathcal{E}^B(u, v) := \mathcal{E}(u \circ \pi_B, v \circ \pi_B), \quad u, v \in \mathcal{F}^B \tag{2.61}$$

と定めると $(\mathcal{E}^B, \mathcal{F}^B) \in \mathcal{RF}(K_B)$, かつ各 $x, y \in K$ に対し $R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), \pi_B(y)) \leq R_{\mathcal{E}}(x, y)$. また $x \in K$ とし $R_{\mathcal{E}}(x, B) := R_{(\mathcal{E},\mathcal{F})}(x, B) := R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), B)$ とおくと，

$$R_{\mathcal{E}}(x, B) = \bigl(\min\{\mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}(K \setminus B), u(x) = 1\}\bigr)^{-1} = \max_{u \in \mathcal{F}(K \setminus B) \setminus \{0\}} \frac{|u(x)|^2}{\mathcal{E}(u, u)} \tag{2.62}$$

（ただし $\min \emptyset := \infty, \infty^{-1} := 0, \max \emptyset := 0$），かつ $R_{\mathcal{E}}(x, B) \leq \mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B)$.

証明. 明らかに $\mathcal{F}^B$ は $\mathbb{R}^{K_B}$ の線型部分空間，$\mathcal{E}^B$ は $\mathcal{F}^B$ 上の非負定値対称双線型形式であり，$\{u \in \mathcal{F} \mid \mathcal{E}(u, u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ から $\{u \in \mathcal{F}^B \mid \mathcal{E}^B(u, u) = 0\} = \mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}$ が分かる．$\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{F}^B$ が $\lim_{k \wedge l \to \infty} \mathcal{E}^B(u_k - u_l, u_k - u_l) = 0$ を満たすとすると，$(\mathcal{F}/\mathbb{R}\mathbf{1}_K, \mathcal{E})$ の完備性から $v \in \mathcal{F}$ が存在して $\lim_{n \to \infty} \mathcal{E}(v - u_n \circ \pi_B, v - u_n \circ \pi_B) = 0$ となるが，このとき $x, y \in B$ とすると，各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $u_n \circ \pi_B(x) = u_n(B) = u_n \circ \pi_B(y)$ なので (2.41) より $v(x) - v(y) = \lim_{n \to \infty}(u_n \circ \pi_B(x) - u_n \circ \pi_B(y)) = 0$. よって $v|_B \in \mathbb{R}\mathbf{1}_B$ なので，$z \in B$ を任意に取り $u \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $u|_{K \setminus B} := v|_{K \setminus B}, u(B) := v(z)$ で定めると $u \circ \pi_B = v \in \mathcal{F}$, 従って $u \in \mathcal{F}^B$ かつ $\lim_{n \to \infty} \mathcal{E}^B(u - u_n, u - u_n) = 0$ となる．以上で $(\mathcal{F}^B/\mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}, \mathcal{E}^B)$ の完備性が得られ，(RF1) が示せた．

(RF2) を示すために $x, y \in K_B, x \neq y$ とする．一般性を失うことなく $y \in K \setminus B$ と仮定してよい．$B_x \subset K$ を $x \in K \setminus B$ のとき $B_x := B \cup \{x\}$, $x = B$ のとき $B_x := B$ で定める．このとき $B^{\mathcal{F}} = B$ と命題 2.46 より $y \notin B_x = (B_x)^{\mathcal{F}}$ なので $v \in \mathcal{F}(K \setminus B_x)$ が存在して $v(y) \neq 0$ となり，そこで $u \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $u|_{K \setminus B} := v|_{K \setminus B}$, $u(B) := 0$ で定めると，$v|_{B_x} = 0$ より $u \circ \pi_B = v \in \mathcal{F}$ なので $u \in \mathcal{F}^B$ であり，また $u(y) = v(y) \neq 0 = u(x)$. ゆえに (RF2) が成り立つ．

$x, y \in K$ とすると，各 $u \in \mathcal{F}^B \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}$ に対し $u \circ \pi_B \in \mathcal{F} \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ なので

$$\frac{|u(\pi_B(x)) - u(\pi_B(y))|^2}{\mathcal{E}^B(u, u)} = \frac{|u \circ \pi_B(x) - u \circ \pi_B(y)|^2}{\mathcal{E}(u \circ \pi_B, u \circ \pi_B)} \leq R_{\mathcal{E}}(x, y) < \infty$$

であり，$u \in \mathcal{F}^B \setminus \mathbb{R}\mathbf{1}_{K_B}$ について上限を取ることで (RF3) と $R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), \pi_B(y)) \leq R_{\mathcal{E}}(x, y)$ を得る．また，$u \in \mathcal{F}^B$ とすると $(u^+ \wedge 1) \circ \pi_B = (u \circ \pi_B)^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}$ なので $u^+ \wedge 1 \in \mathcal{F}^B$ であり，さらに $\mathcal{E}^B(u^+ \wedge 1, u^+ \wedge 1) = \mathcal{E}((u \circ \pi_B)^+ \wedge 1, (u \circ \pi_B)^+ \wedge 1) \leq \mathcal{E}(u \circ \pi_B, u \circ \pi_B) = \mathcal{E}^B(u, u)$ となるので (RF4) が成り立つ．

最後に $x \in K$ とする．任意の $y \in B$ に対し $R_{\mathcal{E}}(x, y) \geq R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), \pi_B(y)) = R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x), B) = R_{\mathcal{E}}(x, B)$ であるので，$y \in B$ に対する下限を取ることで $\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) \geq R_{\mathcal{E}}(x, B)$ を得る．次に (2.62) について，$x \in B$ ならば $\{u \in \mathcal{F}(K \setminus B) \mid u(x) \neq 0\} = \emptyset$ より (2.62) の 3 辺は全て 0 に等しいので，以下 $x \in K \setminus B$ とする．$x \notin B = B^{\mathcal{F}}$ より $\mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}} \in \mathcal{F}|_{B \cup \{x\}}$ なので，定理 2.29 より最小値 $\min\{\mathcal{E}(u, u) \mid u \in \mathcal{F}(K \setminus B), u(x) = 1\} = \min_{u \in \mathcal{F}, u|_{B \cup \{x\}} = \mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}}} \mathcal{E}(u, u)$ は存在して $v := h^{\mathcal{E}}_{B \cup \{x\}}\bigl(\mathbf{1}_x^{B \cup \{x\}}\bigr)$ により達成される．そこで $g \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $g|_{K \setminus B} := v|_{K \setminus B}$, $g(B) := 0$ で定めると，$g \circ \pi_B = v \in \mathcal{F}$ より $g \in \mathcal{F}^B$ であり，また $g(x) = v(x) = 1$, $g(B) = 0$ なので $R_{\mathcal{E}}(x, B) = R_{\mathcal{E}^B}(x, B) \geq \mathcal{E}^B(g, g)^{-1} = \mathcal{E}(v, v)^{-1}$. 他方 (2.45)

より $h \in \mathcal{F}^B$ を $h(x) = 1, h(B) = 0, \mathcal{E}^B(h,h)^{-1} = R_{\mathcal{E}^B}(x,B)$ となるように取れるが，このとき $h \circ \pi_B \in \mathcal{F}(K \setminus B), h \circ \pi_B(x) = 1$ なので $\mathcal{E}(v,v)$ の最小性により $R_{\mathcal{E}}(x,B) = R_{\mathcal{E}^B}(x,B) = \mathcal{E}^B(h,h)^{-1} = \mathcal{E}(h \circ \pi_B, h \circ \pi_B)^{-1} \leq \mathcal{E}(v,v)^{-1}$. 以上から $R_{\mathcal{E}}(x,B) = \mathcal{E}(v,v)^{-1} = \bigl(\min\{\mathcal{E}(u,u) \mid u \in \mathcal{F}(K \setminus B), u(x) = 1\}\bigr)^{-1}$ であり，さらにこの $\mathcal{E}(v,v)^{-1}$ が (2.62) の最右辺の最大値を与えることが (2.22) と全く同様にして示される．これで証明が完了した． □

定理 2.48. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとし，$g_B = g_B^{\mathcal{E}} = g_B^{(\mathcal{E},\mathcal{F})} : K \times K \to \mathbb{R}$ を

$$g_B(x,y) := \frac{R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x),B) + R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(y),B) - R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(x),\pi_B(y))}{2} \tag{2.63}$$

で定める．このとき各 $x \in K$ に対し $v_x := g_B(x,\cdot)$ は任意の $u \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ について $\mathcal{E}(u,v_x) = u(x)$ となるような唯 1 つの $\mathcal{F}(K \setminus B)$ の元であり，さらに

$$0 \leq g_B(x,y) = g_B(y,x) \leq g_B(x,x) = R_{\mathcal{E}}(x,B), \quad x,y \in K, \tag{2.64}$$

$$|g_B(x,y) - g_B(x,z)| \leq R_{\mathcal{E}^B}(\pi_B(y),\pi_B(z)) \leq R_{\mathcal{E}}(y,z), \quad x,y,z \in K. \tag{2.65}$$

証明. 命題 2.47 と系 2.33 より $R_{\mathcal{E}^B} \in \mathcal{RF}(K_B)$ なので $R_{\mathcal{E}^B}$ は K_B 上の距離関数であり，すると (2.64), (2.65) は $R_{\mathcal{E}^B}$ に対する 3 角不等式と命題 2.47 から直ちに従う．次に $x \in K$ とし，主張の v_x と同じ性質を $v_1, v_2 \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ が持つとすると，$u := v_1 - v_2$ として $\mathcal{E}(v_1 - v_2, v_1 - v_2) = \mathcal{E}(u,v_1) - \mathcal{E}(u,v_2) = 0$ なので (RF1) より $v_1 - v_2 \in \mathbb{R}\mathbf{1}_K$ となり，これと $(v_1 - v_2)|_B = 0$ から $v_1 = v_2$ が従う．さらに $x \in B$ とすると，(2.63) より $v_x := g_B(x,\cdot) = 0 \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ であり，これは任意の $u \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ に対し $\mathcal{E}(u,v_x) = 0 = u(x)$ を満たす．

そこで後は $x \in K \setminus B$ として $v_x := g_B(x,\cdot)$ が主張の性質を持つことを示せばよい．$v_x|_B = 0$ なので，$u_x \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $u_x|_{K \setminus B} := v_x|_{K \setminus B}, u_x(B) := 0$ で定めると $u_x \circ \pi_B = v_x$. 任意に $y \in K_B \setminus \{x,B\}$ を取り $V := \{x,y,B\}$, $L := L_{\mathcal{E}^B|_V}$ とおく．このとき系 2.33 より $R_{\mathcal{E}^B}|_{V \times V} = R_L$ なので (2.63), (2.27) から $u_x|_V = g_B^L(x,\cdot)$ となり，すると補題 2.20 より $u_x|_V$ は $(\mathcal{E}_L, \mathbb{R}^V) = (\mathcal{E}^B|_V, \mathbb{R}^V)$ に関して $\{x,B\}$-調和，すなわち $u_x|_V = h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B|_V}(u_x|_{\{x,B\}})$ であるので，命題 2.32 から $u_x(y) = h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B|_V}(u_x|_{\{x,B\}})(y) = \bigl(h_V^{\mathcal{E}^B} \circ h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B|_V}(u_x|_{\{x,B\}})\bigr)(y) = h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B}(u_x|_{\{x,B\}})(y)$. ここで $y \in K_B \setminus \{x,B\}$ は任意だったので $u_x = h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B}(u_x|_{\{x,B\}}) \in \mathcal{F}^B$, 従って $v_x = u_x \circ \pi_B \in \mathcal{F}$ であり，$v_x|_B = 0$ より $v_x \in \mathcal{F}(K \setminus B)$. さらに $v \in \mathcal{F}(K \setminus B)$ に対し，$u \in \mathbb{R}^{K_B}$ を $u|_{K \setminus B} := v|_{K \setminus B}, u(B) := 0$ で定義すれば $v|_B = 0$ より $u \circ \pi_B = v \in \mathcal{F}$, よって $u \in \mathcal{F}^B$ であり，このとき (2.42), (2.43), (2.45) により

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(v,v_x) &= \mathcal{E}(u \circ \pi_B, u_x \circ \pi_B) = \mathcal{E}^B(u,u_x) = \mathcal{E}^B\bigl(u, h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B}(u_x|_{\{x,B\}})\bigr) \\
&= \mathcal{E}^B\bigl(h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B}(u|_{\{x,B\}}), h_{\{x,B\}}^{\mathcal{E}^B}(u_x|_{\{x,B\}})\bigr) = \mathcal{E}^B|_{\{x,B\}}(u|_{\{x,B\}}, u_x|_{\{x,B\}}) \\
&= u(x)u_x(x)R_{\mathcal{E}^B}(x,B)^{-1} = v(x)g_B(x,x)R_{\mathcal{E}^B}(x,B)^{-1} = v(x).
\end{aligned}$$

以上で $v_x = g_B(x,\cdot)$ が主張の性質を有することが分かり，証明が完了した． □

定義 2.49. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とし，B は K の空でない部分集合で $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たすとする．このとき (2.63) で定義される $g_B : K \times K \to \mathbb{R}$ を $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に関する B を境界とする **Green 関数**といい，どの $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ に関してかが文脈から明らかである場合には単に B を境界とする Green 関数という．

命題 2.47, 定理 2.48 では条件 $B^{\mathcal{F}} = B$ が「B は K の閉集合である」という仮定に相当している．実際 $B^{\mathcal{F}} = B$ を満たす $B \subset K$ は $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉集合であることが，(2.41) より各 $u \in \mathcal{F}$ が $(K, R_{\mathcal{E}})$ 上の連続関数であることと $B^{\mathcal{F}}$ の定義 (2.59) から分かる．しかし B が $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉部分集合であっても $B^{\mathcal{F}} = B$ は一般には成り立たず，$(K, R_{\mathcal{E}})$ が局所コンパクト可分完備である場合に限っても同様である．次の演習 2.2 はそのような抵抗形式 $(\mathcal{E},\mathcal{F})$ と $(K, R_{\mathcal{E}})$ の閉集合 B の例を与える．

演習 2.2 ([24, Example 5.5])**.** $m \geq 2$ なる $m \in \mathbb{N}$ に対し $V_m := \{0, 1, \ldots, m\}$ とおき，$L_m \in \mathcal{LA}(V_m)$ を次で定める：

$$(L_m)_{xy} := \begin{cases} 2 & |x-y| = 1 \text{ もしくは } |x-y| = m, \\ 1 & \text{ある } k \in \{1,\ldots,m\} \setminus \{1,m\} \text{ により } \{x,y\} = \{0,k\}, \\ 0 & x, y \in \{1,\ldots,m\}, |x-y| \geq 2. \end{cases} \tag{2.66}$$

(1) $\mathcal{S} := \{(V_m, L_m)\}_{m=2}^{\infty}$ は有限集合上の Laplacian の適合列であることを示せ．
(2) 各 $x, y \in \mathbb{N}$ に対し $R_{\mathcal{S}}(0,x) = \frac{1}{3}$, $R_{\mathcal{S}}(x,y) = \frac{2}{3}(1 - 2^{-|x-y|})$ であることを示せ．(従って $(\mathbb{N} \cup \{0\}, R_{\mathcal{S}})$ は局所コンパクト可分完備距離空間であり，さらにその位相は離散位相，すなわち $\mathbb{N} \cup \{0\}$ の任意の部分集合は開集合かつ閉集合である．)
(3) $\{u \in \mathcal{F}_{\mathcal{S}} \mid u|_{\mathbb{N}} = 0\} = \{0\}$ であることを示せ．(従って $\mathbb{N}^{\mathcal{F}_{\mathcal{S}}} = \mathbb{N} \cup \{0\}$ である．)

実は次の定理に述べる通り，B が $(K, R_{\mathcal{E}})$ のコンパクト部分集合であれば $B^{\mathcal{F}} = B$ が成り立つ．さらに次節の定理 2.51 において，$(K, R_{\mathcal{E}})$ が局所コンパクトである場合には，$(K, R_{\mathcal{E}})$ の任意の閉集合 B に対し $B^{\mathcal{F}} = B$ となるためには $\mathcal{F} \cap C_c(K)$ が $(C_c(K), \|\cdot\|_\infty)$ において稠密であることが必要十分であることを証明する．

定理 2.50. K を空でない集合，$(\mathcal{E},\mathcal{F}) \in \mathcal{RF}(K)$ とする．
(1) B を K の空でない部分集合とする．$x \in K$ は $\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) > 0$ を満たすとし，V は B の有限部分集合で $B \subset \bigcup_{y \in V} B_{R_{\mathcal{E}}}\bigl(y, \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x,B)\bigr)$ を満たすと仮定する．このとき $x \notin B^{\mathcal{F}}$ であり

$$(4 \cdot \#V)^{-1} \mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B) \leq R_{\mathcal{E}}(x, B^{\mathcal{F}}) \leq \mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x, B^{\mathcal{F}}). \tag{2.67}$$

(2) B が $(K, R_{\mathcal{E}})$ のコンパクト部分集合ならば $B^{\mathcal{F}} = B$.

証明. (1) $y \in K \setminus \{x\}$ とし $u_y := R_{\mathcal{E}}(x,y)^{-1} g_{\{y\}}(x, \cdot)$ とおく．(2.62), (2.45) より $g_{\{y\}}(x,x) = R_{\mathcal{E}}(x,\{y\}) = R_{\mathcal{E}}(x,y)$ であるので，定理 2.48 から $u_y \in \mathcal{F}(K \setminus \{y\})$,

$$R_{\mathcal{E}}(x,y)\mathcal{E}(u_y, u_y) = \mathcal{E}(u_y, g_{\{y\}}(x,\cdot)) = u_y(x) = 1, \tag{2.68}$$

$$0 \leq R_{\mathcal{E}}(x,y) u_y(z) = g_{\{y\}}(x,z) - g_{\{y\}}(x,y) \leq R_{\mathcal{E}}(y,z), \quad z \in K. \tag{2.69}$$

そこでさらに $y \in B$, $z \in B_{R_{\mathcal{E}}}\bigl(y, \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x,B)\bigr)$ と仮定すると，$R_{\mathcal{E}}(y,z) < \frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_{\mathcal{E}}}(x,B) \leq \frac{1}{2} R_{\mathcal{E}}(x,y)$ であるので (2.69) により $u_y(z) \leq \frac{1}{2}$ となる．

さて，$\mathrm{dist}_{R_\mathcal{E}}(x,B)>0$ より $x\in K\setminus B\subset K\setminus V$ なので各 $y\in V$ に対し前段落の $u_y\in\mathcal{F}$ が定まることに注意して，$v:=\min_{y\in V}u_y$ とおく．このとき系 2.38-(2) より $v\in\mathcal{F}$, (2.68) の最後の等号から $v(x)=1$, (2.69) の最初の不等式より $v\geq 0$ であり，さらに各 $z\in B$ に対し，仮定より $y\in V$ を $z\in B_{R_\mathcal{E}}\bigl(y,\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_\mathcal{E}}(x,B)\bigr)$ となるように選ぶことができるので前段落の最後の議論から $0\leq v(z)\leq u_y(z)\leq\frac{1}{2}$. そこで $u:=2v-(2v)^+\wedge 1$ とおけば，$u\in\mathcal{F}(K\setminus B)$ かつ $u(x)=1$, 従って $x\notin B^\mathcal{F}$ であり，さらに (2.62), 定理 2.37-(1), 系 2.38-(2), (2.68) と $V\subset B$ から

$$
\begin{aligned}
R_\mathcal{E}(x,B^\mathcal{F})^{-1}&\leq\mathcal{E}(u,u)\leq\mathcal{E}(2v,2v)=4\mathcal{E}(v,v)\\
&\leq 4\sum\nolimits_{y\in V}\mathcal{E}(u_y,u_y)=4\sum\nolimits_{y\in V}R_\mathcal{E}(x,y)^{-1}\leq(4\cdot\#V)\,\mathrm{dist}_{R_\mathcal{E}}(x,B)^{-1}
\end{aligned}
$$

となるので (2.67) の最初の不等式が得られる．最後に (2.67) の後半の不等式は命題 2.47 の最後の主張から分かる．

(2) 命題 2.46 より $\emptyset^\mathcal{F}=\emptyset$ であるので，$B\neq\emptyset$ と仮定してよい．$x\in K\setminus B$ とする．このとき B のコンパクト性から $\mathrm{dist}_{R_\mathcal{E}}(x,B)=\min_{y\in B}R_\mathcal{E}(x,y)>0$ であり，すると $B\subset\bigcup_{y\in B}B_{R_\mathcal{E}}\bigl(y,\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_\mathcal{E}}(x,B)\bigr)$ であるので再び B のコンパクト性から B の有限部分集合 V が存在して $B\subset\bigcup_{y\in V}B_{R_\mathcal{E}}\bigl(y,\frac{1}{2}\mathrm{dist}_{R_\mathcal{E}}(x,B)\bigr)$ となる．よって (1) より $x\notin B^\mathcal{F}$ であるので，$B^\mathcal{F}\subset B$, すなわち $B^\mathcal{F}=B$ が従う． □

2.4　対称正則 Dirichlet 形式としての抵抗形式

定理 2.51.

証明. □

第 2 章参考文献

本章で取り扱った抵抗形式の一般論は [20] において初めて導入され，[21, Chapter 2] で整理された後 [22, 24] でさらに詳しく研究されたものである．本章の記述は主に [21, Chapter 2] に従っているが，[24] で新しく得られた結果も一部盛り込んだ．

2.1 節の記述は，定理 2.16-(2) の証明と補題 2.20 以外は [21, Section 2.1] に従った．補題 2.20 とその証明は [24, Proof of Theorem 4.3] から採った．[21, Section 2.1] では定理 2.16-(2) は $\#V$ についての数学的帰納法を用いた具体的な計算により証明されている．ここで与えた補題 2.20 に基づく定理 2.16-(2) の証明も専門家には事実上既知であるはずだが，同じ証明を与えている文献の心当たりは筆者にはない．なお，2.1 節では有限集合上の Dirichlet 形式の解析的側面のみを取り扱ったが，これは実は有限集合上の Markov 連鎖を用いて確率論的に理解することが可能である．そういった確率論的側面の詳しい記述は例えば熊谷隆氏による日本語の教科書 [25, 第 3 章] で与えられているので合わせて参照されたい．

2.2 節の記述は [21, Section 2.2] に従った．

2.3 節は [21, Section 2.3] の記述を [24, Chapters 2–5 and 8] の内容と融合させ整理・改良するとともに，[21, Theorem 2.3.6] では省略されていた定理 2.35 の正確な主張と証明，及び抵抗形式の Markov 性にまつわる定理 2.37, 系 2.38 を補ったものである．補題 2.27 は [24, Proposition 3.2] から採った．定理 2.29 は [24, Chapter

8] によるが，そこでは仮定されていた $(K, R_{\mathcal{E}})$ の可分性を必要としない証明を本稿では与えた．定理 2.37, 系 2.38 と同様の性質は一般の Dirichlet 形式に対しても（多少の修正の下で）成り立つことが知られているが，これについては [11, Section 1.4], [9, Section 1.1], [29, Section I.4], [7, Sections I.2 and I.3] を参照のこと．定義 2.45 と命題 2.46 は [24, Chapter 2] から，命題 2.47, 定理 2.48, 定義 2.49 は [24, Chapter 4] から，演習 2.2 と定理 2.50 は [24, Chapter 5] から，それぞれ採った．

第3章

P.-c.f. 自己相似構造上の Laplacian の構成

参考文献

[1] M. T. Barlow, Diffusions on fractals, in: *Lectures on Probability Theory and Statistics (Saint-Flour, 1995)*, Lecture Notes in Math., vol. 1690, Springer, Berlin, 1998, pp. 1–121.

[2] M. T. Barlow, Analysis on the Sierpinski carpet, in: *Analysis and Geometry of Metric Measure Spaces: Lecture Notes of the 50th Seminaire de Mathematiques Superieures (SMS), Montreal, 2011*, CRM Proceedings and Lecture Notes, vol. 56, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 27–54.

[3] M. T. Barlow and R. F. Bass, The construction of Brownian motion on the Sierpinski carpet, *Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist.* **25** (1989), 225–257.

[4] M. T. Barlow and R. F. Bass, Brownian motion and harmonic analysis on Sierpinski carpets, *Canad. J. Math.* **51** (1999), 673–744.

[5] M. T. Barlow, R. F. Bass, T. Kumagai and A. Teplyaev, Uniqueness of Brownian motion on Sierpiński carpets, *J. Eur. Math. Soc.* **12** (2010), 655–701.

[6] M. T. Barlow and E. A. Perkins, Brownian motion on the Sierpinski gasket, *Probab. Theory Related Fields* **79** (1988), 543–623.

[7] N. Bouleau and F. Hirsch, *Dirichlet Forms and Analysis on Wiener Space*, de Gruyter Stud. Math., vol. 14, Walter de Gruyter, Berlin, 1991.

[8] N. Bourbaki, *General Topology: Chapters 5–10*, translated from the French, reprint of the 1966 edition, Elements of Mathematics (Berlin), Springer-Verlag, Berlin, 1989.

[9] Z.-Q. Chen and M. Fukushima, *Symmetric Markov Processes, Time Change, and Boundary Theory*, London Math. Soc. Monogr., vol. 35, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2012.

[10] A. Douady and J. H. Hubbard, Itération des polynômes quadratiques complexes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **294** (1982), 123–126.

[11] M. Fukushima, Y. Oshima and M. Takeda, *Dirichlet Forms and Symmetric Markov Processes*, 2nd ed., de Gruyter Stud. Math., vol. 19, Walter de Gruyter, Berlin, 2011.

[12] S. Goldstein, Random walks and diffusions on fractals, in: H. Kesten (ed.), *Percolation Theory and Ergodic Theory of Infinite Particle Systems*, IMA Vol. Math. Appl., vol. 8, Springer, New York, 1987, pp. 121–129.

[13] M. Hata, On the structure of self-similar sets, *Japan J. Appl. Math.* **2** (1985), 381–414.

[14] M. Hino, Upper estimate of martingale dimension for self-similar fractals, *Probab. Theory Related Fields* **156** (2013), 739–793.

[15] N. Kajino, Non-regularly varying and non-periodic oscillation of the on-diagonal heat kernels on self-similar fractals, *Contemp. Math.*, 2013, in press.

[16] I. Karatzas and S. E. Shreve, *Brownian Motion and Stochastic Calculus*, 2nd ed., Graduate Texts in Math. **113**, Springer-Verlag, New York - Berlin - Heidelberg, 1991.

[17] J. Kigami, A harmonic calculus on the Sierpinski spaces, *Japan J. Appl. Math.* **6** (1989), 259–290.

[18] J. Kigami, Harmonic calculus on p.c.f. self-similar sets, *Trans. Amer. Math. Soc.* **335** (1993), 721–755.

[19] J. Kigami, Effective resistances for harmonic structures on p.c.f. self-similar sets, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **115** (1994), 291–303.

[20] J. Kigami, Harmonic calculus on limits of networks and its application to dendrites, *J. Funct. Anal.* **128** (1995), 48–86.

[21] J. Kigami, *Analysis on Fractals*, Cambridge Tracts in Math., vol. 143, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.

[22] J. Kigami, Harmonic analysis for resistance forms, *J. Funct. Anal.* **204** (2003), 399–444.

[23] J. Kigami, Volume doubling measures and heat kernel estimates on self-similar sets, *Mem. Amer. Math. Soc.* **199** (2009), no. 932.

[24] J. Kigami, Resistance forms, quasisymmetric maps and heat kernel estimates, *Mem. Amer. Math. Soc.* **216** (2012), no. 1015.

[25] 熊谷 隆，確率論，新しい解析学の流れ，共立出版，2003.

[26] S. Kusuoka, A diffusion process on a fractal, in: K. Ito and N. Ikeda (eds.), *Probabilistic Methods in Mathematical Physics (Katata/Kyoto, 1985)*, Academic Press, Boston, MA, 1987, pp. 251–274.

[27] S. Kusuoka and X. Y. Zhou, Dirichlet forms on fractals: Poincaré constant and resistance, *Probab. Theory Related Fields* **93** (1992), 169–196.

[28] T. Lindstrøm, Brownian motion on nest fractals, *Mem. Amer. Math. Soc.* **83** (1990), no. 420.

[29] Z.-M. Ma and M. Röckner, *Introduction to the Theory of (Non-Symmetric) Dirichlet Forms*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin - Heidelberg, 1992.

[30] B. B. Mandelbrot, *Fractals: Form, Chance, and Dimension*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1977.

[31] B. B. Mandelbrot, *The Fractal Geometry of Nature*, W. H. Freeman and Co., San Francisco, CA, 1982.

[32] P. A. P. Moran, Additive functions of intervals and Hausdorff measure, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **42** (1946), 15–23.

[33] M. Shishikura, The Hausdorff dimension of the boundary of the Mandelbrot set and Julia sets, *Ann. of Math. (2)* **147** (1998), 225—267.

[34] R. S. Strichartz, *Differential Equations on Fractals: A Tutorial*, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 2006.

[35] S. J. Taylor, The Hausdorff α-dimensional measure of Brownian paths in n-space, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* **49** (1953), 31—39.