Thm 10.3の証明 $N\in\mathbb{N}$に対し$T_N:=\sum_{n=1}^N|f_n|$, $S_N:=\sum_{n=1}^N M_n$とおく. $\varepsilon>0$とする. 仮定(M2)とProp4.2より, $\exists L\in\mathbb{N}, \forall M>\forall N\geq L$, $\sum_{n=N+1}^M M_n=S_M-S_N<\varepsilon$ であるが, このときさらに仮定(M1)により, $\forall M>\forall N\geq L, \forall x\in I, |T_M(x)-T_N(x)|=\sum_{n=N+1}^M|f_n(x)|\leq\sum_{n=N+1}^M M_n<\varepsilon$となる. 従ってThm10.7により$\{T_N\}_{N=1}^\infty$はI上で一様収束する, つまり$\sum_{n=1}^\infty f_n$はI上で一様に絶対収束する. ■

Date 1月22日ここまで

§10 関数項級数の一様収束・一様収束に対するCauchyの条件

Def 10.1 $I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:I\to\mathbb{R}$とする.

(1) $\sum_{n=1}^\infty f_n$がI上で一様収束する

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\{\sum_{n=1}^N f_n\}_{N=1}^\infty$が(ある$g:I\to\mathbb{R}$に)I上で一様収束する.

(当然このとき$\forall x\in I$に対し$\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$は収束して$g(x)=\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$)

(2) $\sum_{n=1}^\infty f_n$がI上で一様に絶対収束する

$\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^\infty|f_n|$がI上で一様収束する.

Thm 10.2 $I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:I\to\mathbb{R}$とする. このとき, $\sum_{n=1}^\infty f_n$がI上で一様に絶対収束するならば$\sum_{n=1}^\infty f_n$はI上で一様収束する.

(Thm4.6「絶対収束する級数は収束する」の一様収束版)

次の判定法は極めて実用的である.

Thm 10.3 (Weierstrass(ワイエルストラス)のM-test)

$I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:I\to\mathbb{R}$とする. さらにある$\{M_n\}_{n=1}^\infty\subset[0,\infty)$が存在して次の(M1), (M2)が成り立つとする:

(M1) $\forall n\in\mathbb{N}, \forall x\in I, |f_n(x)|\leq M_n$.

(M2) $\sum_{n=1}^\infty M_n$は収束する.

このとき$\sum_{n=1}^\infty f_n$はI上で一様に絶対収束する.

1月15日ここから　1月8日ここまで＋系10.6の主張

Thm 10.2, Thm 10.3の証明は後で行う. まずThm8.4, Thm9.2, Thm9.5の「級数版」を系として述べる.

系10.4 $I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:I\to\mathbb{R}$は連続とする. このとき, $\sum_{n=1}^\infty f_n$がI上で一様収束するならば$\sum_{n=1}^\infty f_n:I\to\mathbb{R}$は連続である.

☺ 各$N\in\mathbb{N}$に対し$\sum_{n=1}^N f_n$はI上の連続関数であるので, そのI上での一様収束極限である$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N f_n$すなわち$\sum_{n=1}^\infty f_n$はThm8.4によりI上の連続関数である. ■

系10.5 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$は連続とする. このとき, $\sum_{n=1}^\infty f_n$が$[a,b]$上で一様収束するならば, ($\sum_{n=1}^\infty f_n$は連続で)

$$\int_a^b\sum_{n=1}^\infty f_n(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n(x)dx.$$

☺ $\{\sum_{n=1}^N f_n\}_{N=1}^\infty$にThm9.2が適用できるので,

$$\int_a^b\sum_{n=1}^\infty f_n(x)dx=\lim_{N\to\infty}\int_a^b\sum_{n=1}^N f_n(x)dx=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N\int_a^b f_n(x)dx=\sum_{n=1}^\infty\int_a^b f_n(x)dx$$ となる. ■

系10.6 $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$は微分可能かつf_n'は連続とする. このとき

(i) $\forall x\in[a,b]$, $\sum_{n=1}^\infty f_n(x)$は収束, かつ

(ii) $\sum_{n=1}^\infty f_n'$が$[a,b]$上で一様収束する

ならば, $\sum_{n=1}^\infty f_n$は微分可能で$(\sum_{n=1}^\infty f_n)'=\sum_{n=1}^\infty f_n'$.

☺ $(\sum_{n=1}^N f_n)'=\sum_{n=1}^N f_n'$が連続, かつ$N\to\infty$のとき$[a,b]$上で一様収束するので, Thm9.5が$\{\sum_{n=1}^N f_n\}_{N=1}^\infty$, $f:=\sum_{n=1}^\infty f_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^N f_n$, $g:=\sum_{n=1}^\infty f_n'=\lim_{N\to\infty}(\sum_{n=1}^N f_n)'$に対して適用でき, よって$f=\sum_{n=1}^\infty f_n$は微分可能で$(\sum_{n=1}^\infty f_n)'=f'=g=\sum_{n=1}^\infty f_n'$となる. ■

次の定理はThm10.2, Thm10.3の証明に用いられ, 理論的にも重要である.

Thm 10.7 (一様収束に対するCauchyの条件)

$I\subset\mathbb{R}$とし, 各$n\in\mathbb{N}$に対し$f_n:I\to\mathbb{R}$とする. このとき次の(1), (2)は互いに同値である:

(1) $\{f_n\}_{n=1}^\infty$がある$f:I\to\mathbb{R}$にI上で一様収束する.

(2) $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n,m\geq N, |f_n(x)-f_m(x)|<\varepsilon$.

N: εだけに依存して決まる($x\in I$に依らない!)

☺ (1)⟹(2): $\varepsilon>0$を任意に取る. (1)により, $\exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n\geq N, |f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$ (Def8.3参照). すると$\forall x\in I, \forall n,m\geq N$に対し3角不等式より

$$|f_n(x)-f_m(x)|\leq|f_n(x)-f(x)|+|f(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

(2)⟹(1): 条件(2)より特に, 各$x\in I$に対し$\{f_n(x)\}_{n=1}^\infty$はCauchy列であり, 従ってThm4.4により$\exists\lim_{n\to\infty}f_n(x)\in\mathbb{R}$. そこで$f:I\to\mathbb{R}$を$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)$で定める. $\{f_n\}_{n=1}^\infty$がfにI上で一様収束することを示すために, $\varepsilon>0$を任意に取る. (2)より$\exists N\in\mathbb{N}, \forall x\in I, \forall n,m\geq N, |f_n(x)-f_m(x)|<\frac{\varepsilon}{2}$, 特に$m\to\infty$とすることにより, $\forall x\in I, \forall n\geq N$,

$$|f_n(x)-f(x)|=|\lim_{m\to\infty}(f_n(x)-f_m(x))|\overset{演習7.2}{=}\lim_{m\to\infty}|f_n(x)-f_m(x)|\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon.$$

よって$\{f_n\}_{n=1}^\infty$はfにI上で一様収束する. ■

Thm 10.2の証明　1月22日ここから　1月15日ここまで

$N\in\mathbb{N}$に対し$S_N:=\sum_{n=1}^N f_n$, $T_N:=\sum_{n=1}^N|f_n|$とおき, $\varepsilon>0$とする. Thm10.7により, $\exists L\in\mathbb{N}, \forall M>\forall N\geq L, \forall x\in I$,

$$\sum_{n=N+1}^M|f_n(x)|=T_M(x)-T_N(x)<\varepsilon \quad\cdots\cdots(10.1)$$

となるが, 3角不等式と(10.1)よりさらに$\forall M>\forall N\geq L, \forall x\in I$に対し$|S_M(x)-S_N(x)|=|\sum_{n=N+1}^M f_n(x)|\leq\sum_{n=N+1}^M|f_n(x)|<\varepsilon$となるので, Thm10.7により$\{S_N\}_{N=1}^\infty$は(すなわち$\sum_{n=1}^\infty f_n$は)I上で一様収束する. ■