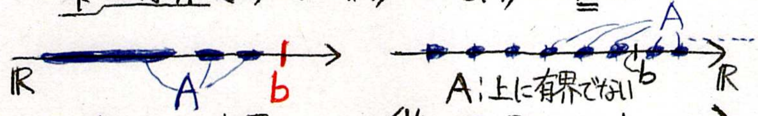
Date 10月2日ここから

§1 上限・下限 (sup, inf)

Def1.1 $A\subset\mathbb{R}$ とする.

A: $\substack{上\\下}$ に有界 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \exists b\in\mathbb{R},\ \forall a\in A,\ a \substack{\leqq\\ \geqq} b.$ ----(1.1)



A:上に有界　$(\forall b\in\mathbb{R}, \exists a\in A, b<a.)$

(1.1)のようなbをAの$\substack{上\\下}$界という.

Def1.2 $A\subset\mathbb{R}$, $b\in\mathbb{R}$とする.

b: Aの最$\substack{大\\小}$値 $\overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \text{(i)}\ b\in A \\ \text{(ii)}\ \forall a\in A,\ a \substack{\leqq\\ \geqq} b. \end{cases}$

$(b = \substack{\max\\ \min} A)$

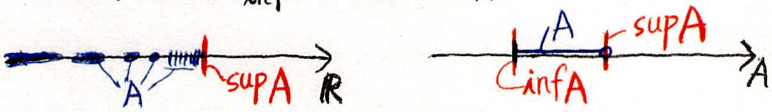
Prop1.3 $A\subset\mathbb{R}$とする. このときAの最$\substack{大\\小}$値は存在すれば唯1つに定まる(「一意的である」「uniqueである」とも言う).

∵ b,cがAの最大値であるとすると, Def1.2-(i)より $b,c\in A$, 従ってbに対してのDef1.2-(ii)から$c\leqq b$,

またcに対するDef1.2-(ii)から$b\leqq c$.

∴ $b=c$. 最小値についても同様. ■

Def1.4 $A\subset\mathbb{R}$とする. $\{b\in\mathbb{R} \mid b$はAの$\substack{上\\下}$界$\}$に最$\substack{小\\大}$値が存在するとき, その値をAの$\substack{上\\下}$限(最$\substack{小\\大}$$\substack{上\\下}$界)といい, これを $\substack{\sup\\ \inf} A$ と書き表す.



Prop1.5 $A\subset\mathbb{R}$とする. $\substack{\max\\ \min} A$が存在すれば$\substack{\max\\ \min} A = \substack{\sup\\ \inf} A$.

∵ $\max A$が存在すると仮定し $b:=\max A$ とおく.

(注:「$X:=Y$」は「XをYで定義する」の意.)

すると$b\in A\subset\mathbb{R}$より$b\in\mathbb{R}$であり, また$\forall a\in A$, $a\leqq b$である.

すなわちbはAの上界である.①

他方, cをAの上界とすると$b\in A$なので$b\leqq c$.②

①,②より$b=\sup A$. 最小値についても同様. ■

例1.6 $A:=\left\{1+\frac{1}{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$とする($\mathbb{N}$は正の整数全体を表す).

このとき $\sup A=2$, $\inf A=1$ である. 実際,

$2=1+\frac{1}{1}\in A$であり, $\forall n\in\mathbb{N}$, $1+\frac{1}{n}\leqq 1+1=2$なので

$2=\max A \underset{\text{Prop1.5}}{=} \sup A$. また, $\forall n\in\mathbb{N}$, $1+\frac{1}{n}>1$ なので

1はAの下界である. bをAの下界とするとき,

$b>1$と仮定すると $n>\frac{1}{b-1}$ なる $n\in\mathbb{N}$ に対し

$\frac{1}{n}<b-1$, $1+\frac{1}{n}<b$ となり, bがAの下界であることに反する. よって $b\leqq 1$であり, 従って $\inf A=1$.

(注 $\min A$は存在しない.)

10月9日ここから

$\mathbb{R}$の極めて重要な性質として, 次が成り立つ. 10月2日ここまで

Thm1.7 (実数の連続性の「公理」) $A\subset\mathbb{R}$, $A\neq\emptyset$とする.

Aが$\substack{上\\下}$に有界ならば $\substack{\sup\\ \inf} A$ が存在する.

(注: Thm1.7は有理数の全体$\mathbb{Q}$においては成り立たない!)

Thm1.7は微分積分学(のみならず, 現代数学)の根幹!

応用例:

Prop1.8 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とし, $\forall n\in\mathbb{N}$, $a_n \substack{\leqq\\ \geqq} a_{n+1}$と仮定する.

このとき, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$が$\substack{上\\下}$に有界ならば $\lim_{n\to\infty} a_n = \substack{\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n \\ \inf_{n\in\mathbb{N}} a_n}$.

∵ $a_n\leqq a_{n+1}$, 上に有界の場合を示す.

(他方の主張も同様にして示される.)

$a:=\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ とおく. $\varepsilon>0$とする.

$a-\varepsilon<a$であるので, $a=\sup_{n\in\mathbb{N}} a_n$ の最小性から,

$a-\varepsilon$は$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の上界ではない, すなわち

$\exists N\in\mathbb{N}$, $a_N>a-\varepsilon$. すると$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の非減少性と

aが$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の上界であることから,

$\forall n\geqq N$, $a-\varepsilon<a_N\leqq a_n\leqq a<a+\varepsilon$.

∴ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■

演習1.1 $A:=\left\{\frac{(-1)^n}{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$とおく.

$\sup A$, $\inf A$の値を求め, またそれを証明せよ.

演習1.2 $B:=\left\{(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right) \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$とおく.

$\sup B$, $\inf B$の値を求め, またそれを証明せよ.

演習1.3 $C:=\left\{n\cdot\sin\frac{\pi}{n} \,\middle|\, n\in\mathbb{N}\right\}$とおく.

$\sup C$, $\inf C$の値を求め, またそれを証明せよ.