§2 上極限・下極限 ($\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$)

10月16日ここから

☆ $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ の $n\to\infty$ のときの挙動をどう調べる?

困難な点：極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ は存在するとは限らない!

今日の話：$\lim_{n\to\infty} a_n$ に代わるある値が，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ が有界（つまり上下両方に有界）である限り常に定義でき，$\lim_{n\to\infty} a_n$ の存在を調べたりするのに有用!

Def 2.1 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は有界とする。このとき次の実数

$$\limsup_{n\to\infty} a_n := \inf_{n\ge1}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right),\quad \liminf_{n\to\infty} a_n := \sup_{n\ge1}\left(\inf_{k\ge n} a_k\right)$$

をそれぞれ $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の上極限，下極限という。

(注 $\{\sup_{k\ge n} a_k\}_{n=1}^\infty$ は下に有界，$\{\inf_{k\ge n} a_k\}_{n=1}^\infty$ は上に有界。
実際 $\sup_{k\ge n} a_k \ge a_n \ge \inf_{m\ge1} a_m$, $\inf_{k\ge n} a_k \le a_n \le \sup_{m\ge1} a_m$.)

Lemma 2.2 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は有界とする。

(1) $\limsup_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right)$, $\liminf_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(\inf_{k\ge n} a_k\right)$.

(2) $\liminf_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} a_n$.

☺ (1) $n\in\mathbb{N}$ とすると，$\forall k\ge n+1$ に対し，$k\ge n$ なので
$\inf_{l\ge n} a_l \le a_k \le \sup_{l\ge n} a_l$. よって $\sup_{l\ge n} a_l$, $\inf_{l\ge n} a_l$ は $\{a_k\}_{k\ge n+1}$ に対する上界，下界であるので，上限，下限をとれば $\sup_{k\ge n+1} a_k \le \sup_{l\ge n} a_l$, $\inf_{k\ge n+1} a_k \ge \inf_{l\ge n} a_l$.
つまり $\{\sup_{k\ge n} a_k\}_{n=1}^\infty$ は非増加，$\{\inf_{k\ge n} a_k\}_{n=1}^\infty$ は非減少なので，Prop 1.8 より主張が従う。

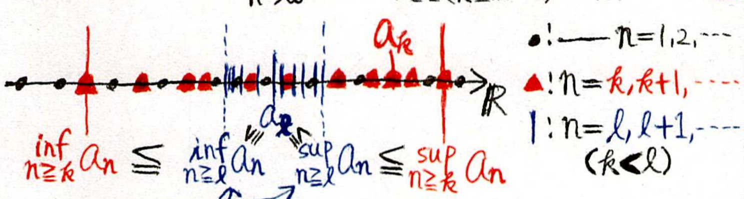
(2) $m,n\in\mathbb{N}$ とすると，

$$\inf_{k\ge m} a_k \le a_{\max\{m,n\}} \le \sup_{k\ge n} a_k$$

なので $\inf_{k\ge m} a_k$ は $\{\sup_{k\ge n} a_k\}_{n=1}^\infty$ の下界であり，従って

$$\inf_{k\ge m} a_k \le \inf_{n\ge1}\left(\sup_{k\ge n} a_k\right) = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

すると今度は $\limsup_{n\to\infty} a_n$ が $\{\inf_{k\ge m} a_k\}_{m=1}^\infty$ の上界であるということになるので，$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_{m\ge1}\left(\inf_{k\ge m} a_k\right) \le \limsup_{n\to\infty} a_n$. ■



この左右の壁が同じ値に収束するときが，すなわち極限 $\lim_{n\to\infty} a_n$ が するとき，である：

Prop 2.3 $\{a_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ とする。このとき

$\exists \lim_{n\to\infty} a_n \in \mathbb{R}$ (つまり $\exists a\in\mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} a_n = a$)

$\iff \{a_n\}_{n=1}^\infty$ は有界で $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

また，このとき $\lim_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$.

10月9日ここまで

☺ ($\Longrightarrow$) $a := \lim_{n\to\infty} a_n$ とおく。極限の定義から $\exists N_1\in\mathbb{N}$, $\forall n\ge N_1$, $|a_n-a|<1$ すなわち $a-1<a_n<a+1$.
よって $\forall n\in\mathbb{N}$, $\min\{a-1,a_1,\cdots,a_{N_1}\} \le a_n \le \max\{a+1,a_1,\cdots,a_{N_1}\}$
となるので，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は有界。さらに $\varepsilon>0$ とすると，
$\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\ge N, |a_n-a|<\varepsilon$ すなわち $a-\varepsilon<a_n<a+\varepsilon$
となるので $n\ge N$ に関する上限，下限をとれば

$$a-\varepsilon \le \inf_{n\ge N} a_n \le \liminf_{n\to\infty} a_n \overset{\text{(Lem 2.2-(2))}}{\le} \limsup_{n\to\infty} a_n \le \sup_{n\ge N} a_n \le a+\varepsilon.$$

∴ $|\limsup_{n\to\infty} a_n - a| \le \varepsilon$, $|\liminf_{n\to\infty} a_n - a| \le \varepsilon$.
$\varepsilon>0$ は任意なので $|\limsup_{n\to\infty} a_n - a| = |\liminf_{n\to\infty} a_n - a| = 0$
となり，よって $\limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n = a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

($\Longleftarrow$) $a := \limsup_{n\to\infty} a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n$ とおく。$\varepsilon>0$ とすると
上下極限の定義から $\exists N_1\in\mathbb{N}$, $\sup_{k\ge N_1} a_k < a+\varepsilon$,
$\exists N_2\in\mathbb{N}$, $a-\varepsilon < \inf_{k\ge N_2} a_k$.
そこで $\forall n \ge \max\{N_1,N_2\}$,

$$a-\varepsilon < \inf_{k\ge N_2} a_k \le a_n \le \sup_{k\ge N_1} a_k < a+\varepsilon,$$

従って $|a_n-a|<\varepsilon$. ∴ $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. ■

Prop 2.4 $\{a_n\}_{n=1}^\infty, \{b_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ は有界とし，

$$\forall n\in\mathbb{N},\ a_n \le b_n$$

と仮定する。このとき

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \le \limsup_{n\to\infty} b_n,\quad \liminf_{n\to\infty} a_n \le \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

☺ $n\in\mathbb{N}$ とすると，$\forall k\ge n$, $a_k \le b_k \le \sup_{l\ge n} b_l$.
よって $\sup_{l\ge n} b_l$ は $\{a_k\}_{k\ge n}$ に対する上界になっているので $\sup_{k\ge n} a_k \le \sup_{l\ge n} b_l$. ところが $\limsup_{m\to\infty} a_m \le \sup_{k\ge n} a_k$ なので $\limsup_{m\to\infty} a_m \le \sup_{l\ge n} b_l$ となり，$n\in\mathbb{N}$ は任意なのでこれは $\limsup_{m\to\infty} a_m$ が $\{\sup_{l\ge n} b_l\}_{n\ge1}$ に対する下界であることを意味する。
∴ $\limsup_{m\to\infty} a_m \le \inf_{n\ge1}\left(\sup_{l\ge n} b_l\right) = \limsup_{n\to\infty} b_n$. $\liminf_{n\to\infty}$ についても同様。■

演習 2.1 $a_n := (-1)^n$ とするとき $\limsup_{n\to\infty} a_n$, $\liminf_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

演習 2.2 $b_n := \sin\frac{2n\pi}{3}$ とするとき $\limsup_{n\to\infty} b_n$, $\liminf_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。

演習 2.3 $c_n := \cos\left(\left(\frac{2}{3}n + \frac{(-1)^n}{n}\right)\pi\right)$ とするとき $\limsup_{n\to\infty} c_n$, $\liminf_{n\to\infty} c_n$ を求めよ。