No. 3

Date

§3 集積値と上極限・下極限

Def3.1 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ とする．ある狭義単調増加な自然数の列 $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ により

$$\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$$

の形に表される数列を，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列という．

例3.2 次は $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ の部分列：
(i) $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^\infty$ (ii) $\{a_{2n}\}_{n=1}^\infty$ (iii) $\{a_{3n}\}_{n=1}^\infty$

$\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ が収束しない場合でも，その部分列は収束する場合がある（もちろん，収束しない場合もある）：

例3.3 $a_n:=(-1)^n\left(1-\frac{1}{n}\right)$ (cf.演習1.2) とする．
(i) $\{a_{2n}\}_{n=1}^\infty$ は収束：$a_{2n}=1-\frac{1}{2n}\xrightarrow{n\to\infty}1$.
(ii) $\{a_{2n-1}\}_{n=1}^\infty$ は収束：$a_{2n-1}=-1+\frac{1}{2n-1}\xrightarrow{n\to\infty}-1$.
(iii) $\{a_{3n}\}_{n=1}^\infty$ は収束しない（演習3.3）

Def3.4 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ とする．
$a\in\mathbb{R}$ が $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値
$\overset{\text{def}}{\iff}$ $\exists\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$: $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列, $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$.

10月30日ここから — 10月23日休講 — 10月16日ここまで

Thm3.5 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ は有界とする．このとき
$\limsup_{n\to\infty}a_n$, $\liminf_{n\to\infty}a_n$ は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の最大，最小の集積値

∵ $\limsup_{n\to\infty}a_n$ について示す．($\liminf_{n\to\infty}a_n$ についても同様)
$a:=\limsup_{n\to\infty}a_n$ とおく．

claim1 $b\in\mathbb{R}$ が $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値 $\Rightarrow b\le a$.
∵ $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=b$ となる $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列 $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ をとる．このとき Prop2.3より

$$b=\limsup_{k\to\infty}a_{n_k}=\inf_{k\ge1}\left(\sup_{l\ge k}a_{n_l}\right).$$

そこで $k\in\mathbb{N}$ とすると $b\le\sup_{l\ge k}a_{n_l}$ であるが，さらに $\forall l\ge k$ に対し $n_l\in\mathbb{N}$, $n_l\ge n_k\ge k$ より $a_{n_l}\le\sup_{m\ge k}a_m$.
∴ $b\le\sup_{l\ge k}a_{n_l}\le\sup_{m\ge k}a_m$
となり，$k\in\mathbb{N}$ は任意だったので
$b\le\inf_{k\ge1}\sup_{m\ge k}a_m=\limsup_{n\to\infty}a_n=a$. //(claim1)

claim2 [redacted] $\forall\varepsilon>0,\ \forall n\in\mathbb{N},\ \exists k\ge n$,
$a-\varepsilon<a_k<a+\varepsilon$.

∵ $\varepsilon>0,\ n\in\mathbb{N}$ とする．$a+\varepsilon>a=\inf_{m\ge1}\sup_{k\ge m}a_k$ より，
$\exists m\in\mathbb{N}$, $\sup_{k\ge m}a_k<a+\varepsilon$. そこで $N:=\max\{n,m\}$ とおくと $N\ge m$ より

$\sup_{k\ge N}a_k\le\sup_{k\ge m}a_k<a+\varepsilon$. ------①

一方，$a-\varepsilon<a=\inf_{l\ge1}\sup_{k\ge l}a_k\le\sup_{k\ge N}a_k$ なので，

$\exists k$ [redacted] N, $a-\varepsilon<a_k\le\sup_{l\ge N}a_l$. ------②

①,② より，② の k に対し $a-\varepsilon<a_k<a+\varepsilon$
であり，また $k\ge N\ge n$ より $k\ge n$. //(claim2)

claim3 $\exists\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$: $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列, $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$.
∵ $\{n_k\}_{k=1}^\infty\subset\mathbb{N}$ を帰納的に次で定める：
▷ $n_1:=\min\{n\in\mathbb{N}\mid a-1<a_n<a+1\}$,
▷ $n_{k+1}:=\min\{n\ge n_k+1\mid a-\frac{1}{k+1}<a_n<a+\frac{1}{k+1}\}$.
(claim2より，右辺の集合は ϕ でない)
$\Longrightarrow \forall k\in\mathbb{N}$, $n_{k+1}\ge n_k+1>n_k$, かつ
$a-\frac{1}{k}<a_{n_k}<a+\frac{1}{k}$.
∴ $\{a_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列, $\lim_{k\to\infty}a_{n_k}=a$. //(claim3)

claim1, claim3 より a は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の最大の集積値. ■

系3.6 (Bolzano-Weierstrassの定理)
有界な $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ は収束する部分列を持つ．

系3.7 $\{a_n\}_{n=1}^\infty\subset\mathbb{R}$ とする．このとき
$\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}\iff\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は有界，かつ集積値を1つしか持たない．
∵ ($\Longrightarrow$) Prop2.3より $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ は有界．また $a\in\mathbb{R}$ を $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値とすると Thm3.5 [redacted] と Prop2.3より
$\lim_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n\le a\le\limsup_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}a_n$.
∴ $a=\limsup_{n\to\infty}a_n$. よって $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値は唯1つ．
($\Longleftarrow$) Thm3.5 [redacted] より $\limsup_{n\to\infty}a_n$, $\liminf_{n\to\infty}a_n$ は $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の集積値なので仮定により等しく，よって Prop2.3より $\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$. ■

演習3.1 $a_n:=(-1)^n$ とするとき，$\{a_n\}_{n=1}^\infty$ の部分列で $\limsup_{n\to\infty}a_n$, $\liminf_{n\to\infty}a_n$ に収束するものを1つずつ求めよ．

演習3.2 $b_n:=\sin\left(\frac{2}{3}n\pi\right)$ とするとき，$\{b_n\}_{n=1}^\infty$ の収束する部分列でその極限が $\limsup_{n\to\infty}b_n$ でも $\liminf_{n\to\infty}b_n$ でもないものを1つ求めよ．

演習3.3 $\{(-1)^{3n}(1-1/(3n))\}_{n=1}^\infty$ は収束しないことを示せ．