演習4.6 (1) $p\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$ に対し $\sum_{k=2^n+1}^{2^{n+1}}\frac{1}{k^p}\leqq 2^{(1-p)n}$ であることを示せ。
(2) $p>1$ のとき級数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^p}$ が収束することを示せ。

演習4.4 $\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty}$ が0に収束しないことを定義に基づいて示せ。

演習4.5 $\{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列でないことを定義に基づいて示せ。

§4 Cauchy列とその収束性

Def 4.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ が Cauchy列
$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0, \exists N\in\mathbb{N}, \forall n,m\geqq N, |a_n-a_m|<\varepsilon.$

$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ の情報だけで書けている!

Prop 4.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とする。$\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$ ならば $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy列である。(「収束する実数列はCauchy列である。」)

(証) $a:=\lim_{n\to\infty}a_n$ とおく。$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が a に収束することの定義から、$\varepsilon>0$ とすると、$\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqq N, |a_n-a|<\frac{\varepsilon}{2}.$
すると $\forall n,m\geqq N$, $|a_n-a_m|\underset{\text{3角不等式}}{\leqq}|a_n-a|+|a-a_m|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$
よって $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列。 ■

11月6日ここから

10月30日ここまで

例4.3 演習3.3の数列 $\left\{(-1)^{3n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ はCauchy列ではない(従ってProp4.2の対偶により、収束しない)。実際、どんな $N\in\mathbb{N}$ に対しても、$n\geqq N$ なる偶数 n をとれば、$3n$ は偶数、$3(n+1)$ は奇数で $\frac{1}{3(n+1)}<\frac{1}{3n}\leqq\frac{1}{6}$ なので
$$\left|(-1)^{3n}\left(1-\frac{1}{3n}\right)-(-1)^{3(n+1)}\left(1-\frac{1}{3(n+1)}\right)\right|=2-\frac{1}{3n}-\frac{1}{3(n+1)}$$
$$>2-\frac{1}{6}-\frac{1}{6}=\frac{5}{3}>0$$
となり、$\varepsilon:=\frac{5}{3}>0$ に対しCauchy列の定義の条件が不成立。

Prop4.2の逆が重要である:

Thm 4.4 (Cauchyの収束条件定理) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ がCauchy列ならば $\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$. (「($\mathbb{R}$においては)Cauchy列は収束する。」)

Thm4.4の証明のため、まず次の補題を準備する。

Lemma 4.5 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ がCauchy列ならば、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界である。

(証) $\varepsilon:=1$ に対してCauchy列の定義の条件から、$\exists N\in\mathbb{N}$, $\forall n,m\geqq N, |a_n-a_m|<1$. 特に $\forall n\geqq N$,
$$|a_n|\leqq|a_n-a_N|+|a_N|<|a_N|+1. \quad\cdots\cdots(4.1)$$
そこで $M:=\max\{|a_N|+1, |a_1|, \cdots, |a_N|\}$ とおけば(4.1)とMの定義より、任意の $n\in\mathbb{N}$ に対し
- $n\geqq N$ ならば $|a_n|<|a_N|+1\leqq M$,
- $n\leqq N$ ならば $|a_n|\leqq\max\{|a_1|,\cdots,|a_N|\}\leqq M$,

よって $\forall n\in\mathbb{N}$, $|a_n|\leqq M$ となり、$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界。 ■

Thm4.4の証明 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ はCauchy列であるとする。Lemma 4.5により $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は有界なので、Prop2.3より、$\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$ を得るには
$$\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n \quad\cdots\cdots(4.2)$$
を示せばよい。そのために、$\varepsilon>0$ を任意にとる。
Cauchy列の定義の条件から、$\exists N\in\mathbb{N}, \forall n\geqq N$,
$$|a_n-a_N|<\frac{\varepsilon}{2}, \text{ すなわち } a_N-\frac{\varepsilon}{2}<a_n<a_N+\frac{\varepsilon}{2} \cdots(4.3)$$
(4.3)の後者の不等式は $\forall n\geqq N$ で成り立つので、$\sup_{n\geqq N}$, $\inf_{n\geqq N}$ をとって
$$a_N-\frac{\varepsilon}{2}\leqq\inf_{n\geqq N}a_n\leqq\liminf_{n\to\infty}a_n$$
$$\underset{\text{Lemma 2.2-(2)}}{\leqq}\limsup_{n\to\infty}a_n\leqq\sup_{n\geqq N}a_n\leqq a_N+\frac{\varepsilon}{2},$$
従って
$$0\leqq\limsup_{n\to\infty}a_n-\liminf_{n\to\infty}a_n\leqq\left(a_N+\frac{\varepsilon}{2}\right)-\left(a_N-\frac{\varepsilon}{2}\right)=\varepsilon. \quad(4.4)$$
$\varepsilon>0$ は任意なので $\limsup_{n\to\infty}a_n=\liminf_{n\to\infty}a_n$
($\limsup_{n\to\infty}a_n\neq\liminf_{n\to\infty}a_n$ と仮定すると、$\varepsilon:=\frac{1}{2}(\limsup_{n\to\infty}a_n-\liminf_{n\to\infty}a_n)$ とおけば(4.4)より $2\varepsilon\leqq\varepsilon$, よって $\varepsilon\leqq0<\varepsilon$ となり矛盾が生じる。)
よって Prop2.3 により $\exists\lim_{n\to\infty}a_n\in\mathbb{R}$. ■

Thm4.4の応用例として、次を証明しよう。

Thm 4.6 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とし、級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は絶対収束する、すなわち極限 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|:=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|\in\mathbb{R}$ が存在すると仮定する。このとき極限 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n:=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\in\mathbb{R}$ も存在する。(「絶対収束する級数は収束する。」)

(証) $N\in\mathbb{N}$ に対し $S_N:=\sum_{n=1}^{N}a_n$, $T_N:=\sum_{n=1}^{N}|a_n|$ とおく。
$\{T_N\}_{N\in\mathbb{N}}$ は収束する実数列なので Prop4.2 によりCauchy列。
そこで $\varepsilon>0$ とすると、$\exists L\in\mathbb{N}, \forall M>\forall N\geqq L$,
$$\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|=T_M-T_N<\varepsilon. \quad\cdots\cdots(4.5)$$
ところが3角不等式により、$\left|\sum_{n=N+1}^{M}a_n\right|\leqq\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|$ であるので、(4.5)と合わせると $\forall M>\forall N\geqq L$,
$$|S_M-S_N|=\left|\sum_{n=N+1}^{M}a_n\right|\leqq\sum_{n=N+1}^{M}|a_n|<\varepsilon$$
となる。よって $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$ はCauchy列、であり、ゆえにThm4.4より
$\exists\lim_{N\to\infty}S_N=\exists\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\in\mathbb{R}$. ■

11月6日ここまで

注意4.7 $\exists\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\left\{\sum_{n=1}^{N}|a_n|\right\}_{N=1}^{\infty}$ は上に有界。
((証) ($\Rightarrow$)はProp2.3より分かる。($\Leftarrow$)は、$|a_n|\geqq0$ より $\forall N\in\mathbb{N}$, $\sum_{n=1}^{N}|a_n|\leqq\sum_{n=1}^{N+1}|a_n|$ であることとProp1.8より分かる。)

演習4.1 「この教室のどの学生にも兄がいる」の否定を述べよ。

演習4.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ がCauchy列でないとはどういうことか述べよ。

演習4.3 $\{n\}_{n=1}^{\infty}$, $\left\{\cos\left(\frac{2}{3}n\pi+\frac{(-1)^n}{n}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ がCauchy列でないことを定義に基づいて示せ。