§5 正項級数の収束判定条件

Def 5.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ とする.
級数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が<u>収束する</u> $\overset{def}{\Longleftrightarrow}$ ${}^{\exists}\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n\in\mathbb{R}$.
収束しないとき, <u>発散する</u>という.

<u>記号</u> $a\in\mathbb{R}$ に対し $[a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}\mid a\leqq x\}$,
$(a,\infty):=\{x\in\mathbb{R}\mid a<x\}$, $(-\infty,a]:=\{x\in\mathbb{R}\mid x\leqq a\}$, $(-\infty,a):=\{x\in\mathbb{R}\mid x<a\}$.

Prop 5.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{c_n\}_{n=1}^{\infty},\{d_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ で $\sum_{n=1}^{\infty}c_n$ は収束, $\sum_{n=1}^{\infty}d_n$ は発散するとする. このとき:
(1) ${}^{\exists}n_0\in\mathbb{N}$, ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $a_n\leqq c_n$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束.
(2) ${}^{\exists}n_0\in\mathbb{N}$, ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $a_n\geqq d_n$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散.

☺ (1) $N\in\mathbb{N}$, $N\geqq n_0$ に対し仮定より
$$\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{N}a_n\leqq\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{N}c_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}(a_n-c_n)+\sum_{n=1}^{N}c_n$$
であり, 最右辺は N に関する数列として有界であるので $\{\sum_{n=1}^{N}a_n\}_{N=1}^{\infty}$ も有界, 従って注意4.7より $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束.
(2) $N\in\mathbb{N}$, $N\geqq n_0$ に対し, (1)と同様に仮定より
$$\sum_{n=1}^{N}a_n\geqq\sum_{n=1}^{n_0-1}a_n+\sum_{n=n_0}^{N}d_n=\sum_{n=1}^{n_0-1}(a_n-d_n)+\sum_{n=1}^{N}d_n.$$
注意4.7より $\{\sum_{n=1}^{N}d_n\}_{N=n_0}^{\infty}$ は上に非有界なので, 上の不等式から $\{\sum_{n=1}^{N}a_n\}_{N=n_0}^{\infty}$ も上に非有界であり, 従って再び注意4.7により $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する. ∎

Thm 5.3 (ratio test) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset(0,\infty)$ とする.
(1) $\{\frac{a_{n+1}}{a_n}\}_{n=1}^{\infty}$ が(上に)有界で $\limsup_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}<1$ ならば) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.
(2) ${}^{\exists}n_0\in\mathbb{N}$, ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $a_{n+1}\geqq a_n$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}>1$ もしくは $\frac{a_{n+1}}{a_n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ならば)
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

☺ (1) ${}^{\exists}n_0\in\mathbb{N}$, $\sup_{n\geqq n_0}\frac{a_{n+1}}{a_n}=:r<1$ であるので, ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $\frac{a_{n+1}}{a_n}\leqq r$ すなわち $a_{n+1}\leqq ra_n$, 従ってこれを繰り返し用いることで ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $a_n\leqq r^{n-n_0}a_{n_0}$ となる. すると $\sum_{n=1}^{\infty}r^{n-n_0}a_{n_0}$ が収束することと Prop 5.2-(1) から, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束.
(2) ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $a_{n+1}\geqq a_n$ を繰り返し用いることで, ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $a_n\geqq a_{n_0}>0$ が分かる. 特に, ${}^{\forall}N\in\mathbb{N}$ に対し $n\in\mathbb{N}$ を $n\geqq\max\{n_0,N\}$ となるように取れば $n\geqq N$, $a_n\geqq a_{n_0}>0$ なので, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ は0に収束しない. 従って演習5.1の対偶により $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する. ∎

Thm 5.4 (root test) $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ とする.
(1) $\{a_n^{1/n}\}_{n=1}^{\infty}$ が(上に)有界で $\limsup_{n\to\infty}a_n^{1/n}<1$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}a_n^{1/n}<1$ ならば) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.
(2) $\cancel{\exists}{}^{\forall}n_0\in\mathbb{N}$, ${}^{\exists}n\geqq n_0$, $a_n^{1/n}\geqq 1$ ならば
(従って特に $\lim_{n\to\infty}a_n^{1/n}>1$ もしくは $a_n^{1/n}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$ ならば)
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する.

☺ (1) ${}^{\exists}n_0\in\mathbb{N}$, $r:=\sup_{n\geqq n_0}a_n^{1/n}<1$ であるので, ${}^{\forall}n\geqq n_0$, $a_n^{1/n}\leqq r$ すなわち $a_n\leqq r^n$. すると $\sum_{n=1}^{\infty}r^n$ が収束することと Prop 5.2-(1) から, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は収束する.
(2) 仮定より ${}^{\forall}n_0\in\mathbb{N}$, ${}^{\exists}n\geqq n_0$, $a_n\geqq 1$ となりこれは $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ が0に収束しないことを意味するので, 演習5.1の対偶により $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ は発散する. ∎

Thm 5.5 (Euler-Maclaurin の判定法) (オイラー マクローリン)
a を整数とし, $f:[a,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ は単調非増加 (つまり $a\leqq{}^{\forall}s\leqq{}^{\forall}t$, $f(s)\geqq f(t)$) とする. このとき:
$\sum_{n=a}^{\infty}f(n)$ が収束 $\Longleftrightarrow$ ${}^{\exists}\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx\in\mathbb{R}$.

<u>注</u> f が単調非増加であることから, ${}^{\forall}t\in[a,\infty)$ に対し f は $[a,t]$ 上 Riemann 可積分であることが示される. また, ${}^{\exists}\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx\in\mathbb{R}\Leftrightarrow\{\int_a^N f(x)dx\}_{N=a}^{\infty}$ が上に有界であることが注意4.7と同様にして分かる.

11月13日ここまで

Thm 5.5の証明 11月20日ここから
$n\geqq a$ なる整数 n に対し, $n\leqq x\leqq n+1$ ならば
$$f(n)\geqq f(x)\geqq f(n+1)$$
であるので, この各辺を $n\leqq x\leqq n+1$ で積分することにより
$$f(n)\geqq\int_n^{n+1}f(x)dx\geqq f(n+1).\quad\cdots\cdots(5.1)$$
$N\geqq a$ なる整数 N に対して, (5.1)を $a\leqq n\leqq N$ に対して各辺加えると $\sum_{n=a}^{N}f(n)\geqq\int_a^{N+1}f(x)dx\geqq\sum_{n=a}^{N+1}f(n)-f(a)$.
これは $\{\sum_{n=a}^{N}f(n)\}_{N=a}^{\infty}$ が上に有界 $\Leftrightarrow$ $\{\int_a^N f(x)dx\}_{N=a}^{\infty}$ が上に有界 を意味し, 前者は注意4.7により $\sum_{n=a}^{\infty}f(n)$ が収束することと同値, 後者は ${}^{\exists}\lim_{N\to\infty}\int_a^N f(x)dx\in\mathbb{R}$ と同値であるので, Thm 5.5の主張の"$\Leftrightarrow$"が従う. ∎

<u>演習5.1</u> $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束するならば $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ であることを示せ.
<u>演習5.2</u> (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$ の収束・発散を判定せよ.
<u>演習5.3</u> $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ は $p>1$ で収束, $0<p\leqq 1$ で発散することを Thm 5.5を用いて示せ.