(Thm 6.7の証明の続き) そこで$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$の並べ替え$\{a_{\sigma(n)}\}_{n=1}^{\infty}$を
$b_1,\cdots,b_{k_1},c_1,\cdots,c_{l_1},b_{k_1+1},\cdots,b_{k_2},c_{l_1+1},\cdots,c_{l_2},b_{k_2+1},\cdots\cdots$
で定める. すると$N\in\mathbb{N}$に対し, $k_{n(N)}+l_{n(N)}\geqq N>k_{n(N)-1}+l_{n(N)-1}$となる$n(N)\in\mathbb{N}$がただ1つ存在し, このとき$s_n,t_n$の定義から$\min\{t_{n(N)-1},t_{n(N)}\}\leqq\sum_{m=1}^{N}a_{\sigma(m)}\leqq s_{n(N)}$となる. そして容易に分かる↗

↘ように$n(N)\xrightarrow{N\to\infty}\infty$なので, $N\to\infty$とすれば$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\alpha$となる. ■

注意6.8 Thm6.6で"$\alpha\in\mathbb{R}$"の代わりに$\alpha=\infty,-\infty$としても成立. 証明も同様.

演習6.1 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が絶対収束するとき$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$は収束することを示せ.

演習6.2 $a,b\in(0,\infty)$に対し$\sum_{n=1}^{\infty}(a+1)(2a+1)\cdots\cdots(na+1)/(b+1)(2b+1)\cdots\cdots(nb+1)$の収束・発散を判定せよ.

演習6.3 $\sum_{n=2}^{\infty}n^{-1}(\log n)^{-p}$は$p>1$で収束, $0<p\leqq1$で発散, を示せ.

§6 絶対収束と条件収束

Def6.1 $a\in\mathbb{R}$に対し$a^+,a^-\in[0,\infty)$を次で定める:

$$a^+:=\max\{a,0\}=\frac{1}{2}(|a|+a)=\begin{cases}a & (a\geqq0)\\ 0 & (a\leqq0),\end{cases}$$
$$a^-:=-\min\{a,0\}=\frac{1}{2}(|a|-a)=\begin{cases}0 & (a\geqq0)\\ -a & (a\leqq0).\end{cases}$$

明らかに$a=a^+-a^-$, $|a|=a^++a^-$である.

Prop6.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とするとき, (絶対収束の定義はThm4.6参照)
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が絶対収束 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$が共に収束.

∵ ($\Rightarrow$) $0\leqq a_n^{\pm}\leqq|a_n|$なので, Prop5.2-(1)より分かる.
($\Leftarrow$) $N\in\mathbb{N}$とすると
$$\sum_{n=1}^{N}|a_n|=\sum_{n=1}^{N}(a_n^++a_n^-)=\sum_{n=1}^{N}a_n^++\sum_{n=1}^{N}a_n^-\xrightarrow[N\to\infty]{}\sum_{n=1}^{\infty}a_n^++\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-(\in\mathbb{R}).$$ ■

Prop6.3 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$とし, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$は全単射とする.
このとき$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$が収束 $\Leftrightarrow$ $\left\{\sum_{n\in A}a_n\ \middle|\ A\subset\mathbb{N}\text{ 有限集合}\right\}$は有界.
また「収束」のとき$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\sup_{A\subset\mathbb{N}\text{ 有限}}\sum_{n\in A}a_n$.
(ただし$A=\emptyset$のとき$\sum_{n\in A}a_n:=0$.)

∵ $\left\{\sum_{n\in A}a_n\ \middle|\ A\subset\mathbb{N}\text{ 有限}\right\}$が有界のとき, $\left\{\sum_{n=1}^{N}a_{\sigma(n)}\ \middle|\ N\in\mathbb{N}\right\}$はその部分集合なのでやはり有界で, 従って注意4.7により$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$は収束する.

そこで以下$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$は収束すると仮定する. このとき$A\subset\mathbb{N}$は有限とすると$\exists N\in\mathbb{N}$, $A\subset\{\sigma(1),\cdots,\sigma(N)\}$であることが$\sigma$の全射性から分かり, 従って
$$\sum_{n\in A}a_n\leqq\sum_{n=1}^{N}a_{\sigma(n)}\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}.$$
よって最左辺は$A\underset{\text{有限}}{\subset}\mathbb{N}$について有界かつ
$$\sup_{A\subset\mathbb{N}:\text{有限}}\sum_{n\in A}a_n\leqq\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}.\ \cdots\cdots①$$
一方$N\in\mathbb{N}$に対し, $A_N:=\{\sigma(1),\cdots,\sigma(N)\}$とおくと
$\sum_{n=1}^{N}a_{\sigma(n)}=\sum_{n\in A_N}a_n\leqq\sup_{A\subset\mathbb{N}:\text{有限}}\sum_{n\in A}a_n$であるので
$N\to\infty$とすれば$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}\leqq\sup_{A\subset\mathbb{N}:\text{有限}}\sum_{n\in A}a_n\ \cdots\cdots②$
①, ②より$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\sup_{A\subset\mathbb{N}:\text{有限}}\sum_{n\in A}a_n$であり, この右辺は$\sigma$に依存しないので$\sigma$として$\mathbb{N}$の恒等写像をとれば主張が得られる. ■

11月27日ここから

11月20日ここまで

Thm6.4 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とし, $\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$は全単射とする.
このとき, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が絶対収束 $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$が絶対収束,
であり, 「絶対収束」のとき$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$.

∵ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が絶対収束 $\underset{\text{Prop6.2}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$が共に収束 $\underset{\text{Prop6.3}}{\Longleftrightarrow}$
$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$が絶対収束 $\Longleftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^+,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^-$が共に収束
であり, 「絶対収束」のときProp6.3より$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^{\pm}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^{\pm}$なので
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_n^+-a_n^-)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}(a_{\sigma(n)}^+-a_{\sigma(n)}^-)=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^+-\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}^-$$ ■

Def6.5 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とする.
級数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が<u>条件収束する</u> $\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$は収束するが絶対収束はしない.

Thm6.6 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とし, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$は条件収束すると仮定する.
このとき$\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\exists\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$全単射, $\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}=\alpha$.

系6.7 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$とするとき,
$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$が絶対収束 $\Longleftrightarrow$ $\exists\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall\sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$全単射, $\alpha=\sum_{n=1}^{\infty}a_{\sigma(n)}$.

∵ Thm6.4とThm6.6より直ちに従う. ■

Thm6.6の証明 $\alpha\in\mathbb{R}$を任意に取り固定する.
注意4.7より$\left\{\sum_{n=1}^{N}|a_n|\right\}_{N=1}^{\infty}$は上に有界でなく, 単調非減少なので$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}|a_n|=\infty$である. Prop6.2より$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$と$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$の少なくとも一方は発散するが, $\sum_{n=1}^{N}a_n=\sum_{n=1}^{N}a_n^+-\sum_{n=1}^{N}a_n^-$が$N\to\infty$のとき$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\in\mathbb{R}$に収束するので, 仮に$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+$と$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$の一方が収束すれば両方収束することになり矛盾する. 従って$\sum_{n=1}^{\infty}a_n^+,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_n^-$は共に発散し, すると冒頭の議論と同様にして$\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n^{\pm}=\infty$が分かる.

さて, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$のうち$a_n\geqq0$であるような項だけを順に並べたものを$\{b_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_n<0$であるような項だけを順に並べたものを$\{c_l\}_{l=1}^{\infty}$とする; $\lim_{N\to\infty}\sum_{n=1}^{N}a_n^{\pm}=\infty$より, どちらの種類の項も無限個ありかつ$\lim_{N\to\infty}\sum_{k=1}^{N}b_k=\infty$, $\lim_{N\to\infty}\sum_{l=1}^{N}c_l=-\infty$, となる.

$k_0:=l_0:=t_0:=0$とおき, $n\in\mathbb{N}$に対し帰納的に
$k_n:=\min\{k\geqq k_{n-1}+1\mid t_{n-1}+b_{k_{n-1}+1}+\cdots\cdots+b_k>\alpha\}$,
$s_n:=t_{n-1}+b_{k_{n-1}+1}+\cdots\cdots+b_{k_n}>\alpha$, 定義可能!
$l_n:=\min\{l\geqq l_{n-1}+1\mid s_n+c_{l_{n-1}+1}+\cdots\cdots+c_l<\alpha\}$,
$t_n:=s_n+c_{l_{n-1}+1}+\cdots\cdots+c_{l_n}<\alpha$, と定めると,
$n\geqq2$のときs_n,t_nの定義から$s_n-b_{k_n}\leqq\alpha<s_n$, $t_n<\alpha\leqq t_n+c_{l_n}$なので$|s_n-\alpha|\leqq b_{k_n}$, $|t_n-\alpha|\leqq c_{l_n}$であり, 演習5.1より$b_k\xrightarrow{k\to\infty}0$, $c_l\xrightarrow{l\to\infty}0$なので$\lim_{n\to\infty}s_n=\lim_{n\to\infty}t_n=\alpha$となる. (ページ左上へ続く)