No. 7

Date

演習7.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$, $a\in\mathbb{R}$とし, $\lim_{n\to\infty}a_{2n-1}=a$, $\lim_{n\to\infty}a_{2n}=a$ と仮定する. このとき $\lim_{n\to\infty}a_n=a$ であることを示せ.

演習7.2 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$が収束するとき $\lim_{n\to\infty}|a_n|=\left|\lim_{n\to\infty}a_n\right|$ を示せ.

演習7.3 (1) $n\in\mathbb{N}$, $0\leqq x\leqq 1$とする. $\left|\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k x^k-\frac{1}{1+x}\right|\leqq x^n$ を示せ.

(2) $\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=\log 2$ を示せ.

§7 一般の級数の収束条件・条件収束級数の例

Thm 7.1 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ は単調非増加$\left(\text{つまり } {}^{\forall}n\in\mathbb{N},\ a_n\geqq a_{n+1}\right)$とする. このとき $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ ならば, 次の級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \ (\text{交代級数}) \quad \text{は収束する.}$$

(証) $n\in\mathbb{N}$ に対し $S_n:=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}a_k$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
{}^{\forall}n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}-S_{2n-1}&=a_{2n+1}-a_{2n}\leqq 0,\\
S_{2n+2}-S_{2n}&=-a_{2n+2}+a_{2n+1}\geqq 0,\\
S_{2n+2}-S_{2n+1}&=-a_{2n+2}\leqq 0,\ \text{よって}
\end{aligned}
$$

$$S_2\leqq S_{2n}\leqq S_{2n+2}\leqq S_{2n+1}\leqq S_{2n-1}\leqq S_1 \ \text{となる.}$$

ゆえに $\{S_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ は下に有界で単調非増加,
$\{S_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ は上に有界で単調非減少
であり, 従って Prop 1.8 により $t:={}^{\exists}\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}\in\mathbb{R}$ かつ $s:={}^{\exists}\lim_{n\to\infty}S_{2n}\in\mathbb{R}$. ところが $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ なので

$$
\begin{aligned}
s-t=\lim_{n\to\infty}S_{2n}-\lim_{n\to\infty}S_{2n-1}&=\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_{2n-1})\\
&=\lim_{n\to\infty}(-a_{2n})=0.
\end{aligned}
$$

よって $s=t$ となり, すると演習7.1により ${}^{\exists}\lim_{n\to\infty}S_n\in\mathbb{R}$. ■

12月4日ここから

11月27日ここまで

例7.2 Thm 7.1 により $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots$ は収束し, 演習4.5(または演習5.3)によりこれは条件収束.

実は(演習7.3)
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots\cdots=\log 2$$

これを用いると, 次のようにしてこの級数の「配置替え」

cf. Thm 6.6

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{\sigma(n)-1}}{\sigma(n)},\ \sigma:\mathbb{N}\to\mathbb{N}\ \text{全単射},$$

が別の値に収束し得ることが具体的に見てとれる.

上の級数を $\frac{1}{2}$ 倍すると
$$\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots\cdots=\frac{1}{2}\log 2.$$

各項の前に0を挿入しても級数の収束性や和は不変なので
$$0+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{4}+0+\frac{1}{6}+0-\frac{1}{8}+\cdots\cdots+0+\frac{1}{4n-2}+0-\frac{1}{4n}+\cdots=\frac{1}{2}\log 2.$$

これと元の級数, すなわち
$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n-2}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{4n}+\cdots\cdots=\log 2$$

の和をとった級数を考えれば
$$1+0+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+0+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots=\frac{3}{2}\log 2.$$

0に等しい項を除いた級数も同じ和を持つので, 結局
$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4n-3}+\frac{1}{4n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots\cdots=\frac{3}{2}\log 2>\log 2.$$

Thm 7.1 は次の Thm 7.3 の特別な場合である.

Thm 7.3 $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ は単調非増加とし, また $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{R}$ で $\left\{\sum_{k=1}^{n}a_k\right\}_{n=1}^{\infty}$ は有界と仮定する.
このとき, もし $\lim_{n\to\infty}p_n=0$ であるか
または $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する ならば,
$\sum_{n=1}^{\infty}p_na_n$ は収束し, $C:=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k=1}^{n}a_k\right|$ とおくと
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}p_na_n\right|\leqq Cp_1.$$

(証) $s_0:=t_0:=0$ とし, $n\in\mathbb{N}$ に対し
$$s_n:=\sum_{k=1}^{n}a_k,\qquad t_n:=\sum_{k=1}^{n}p_ka_k$$
とおく. $m>n\geqq 0$ なる整数 m, n を任意にとると,

$$
\begin{aligned}
t_m-t_n&=\sum_{k=n+1}^{m}p_ka_k \qquad (\text{注 } {}^{\forall}k\in\mathbb{N},\ a_k=s_k-s_{k-1})\\
&=\sum_{k=n+1}^{m}p_k(s_k-s_{k-1})\\
&=\sum_{k=n+1}^{m}p_ks_k-\sum_{k=n}^{m-1}p_{k+1}s_k\\
&=p_ms_m-p_{n+1}s_n+\sum_{k=n+1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})s_k.
\end{aligned}
$$

アーベルの(Abel)変形(部分積分の離散版)

よって, ${}^{\forall}k\in\mathbb{N}$, $p_k-p_{k+1}\geqq 0$ と3角不等式により

$$
\begin{aligned}
|t_m-t_n|&\leqq p_m|s_m|+p_{n+1}|s_n|+\sum_{k=n+1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})|s_k|\\
&\leqq C\left(p_m+p_{n+1}+\sum_{k=n+1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})\right)\\
&=2Cp_{n+1}. \qquad\cdots\cdots (7.1)
\end{aligned}
$$

$n=0$ の場合には $s_n=0=t_n$ より, ${}^{\forall}m\in\mathbb{N}$,

$$
\begin{aligned}
|t_m|&\leqq p_m|s_m|+\sum_{k=1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})|s_k|\\
&\leqq C\left(p_m+\sum_{k=1}^{m-1}(p_k-p_{k+1})\right)=Cp_1. \qquad\cdots\cdots (7.2)
\end{aligned}
$$

さて, $\lim_{n\to\infty}p_n=0$ である場合には, $\varepsilon\in(0,\infty)$ に対し $N\in\mathbb{N}$ を ${}^{\forall}n\geqq N$, $p_n\leqq\frac{\varepsilon}{2C+1}$ となるように取ることができ, すると(7.1)より ${}^{\forall}m>{}^{\forall}n\geqq N$,
$$|t_m-t_n|\leqq 2Cp_{n+1}\leqq\frac{2C}{2C+1}\varepsilon<\varepsilon,$$
すなわち $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ は Cauchy 列であり Thm 4.4 により収束する.

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ が収束する場合には, $p:=\inf_{n\in\mathbb{N}}p_n$ とおくと Prop 1.8 より $\lim_{n\to\infty}p_n=p$, 従って $\lim_{n\to\infty}(p_n-p)=0$ であり, また $\{p_n-p\}_{n=1}^{\infty}\subset[0,\infty)$ でこれは単調非増加なので, 前段落の結果から $\sum_{n=1}^{\infty}(p_n-p)a_n$ は収束する. また $\sum_{n=1}^{\infty}pa_n$ も収束するので $\sum_{n=1}^{\infty}p_na_n=\sum_{n=1}^{\infty}\left((p_n-p)a_n+pa_n\right)$ も収束する.

以上よりいずれの場合にも $\sum_{n=1}^{\infty}p_na_n$ は収束し, (7.2)で $m\to\infty$ として Prop 2.3, Prop 2.4 を用いれば,
$$\left|\sum_{n=1}^{\infty}p_na_n\right|=\left|\lim_{m\to\infty}t_m\right|\underset{\text{演習7.2}}{=}\lim_{m\to\infty}|t_m|\leqq Cp_1. \ ■$$

12月4日ここまで