演習7.4 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\log n}{n}$ が (1)収束すること (2)絶対収束しないこと を示せ.

12月11日ここから

演習7.5 級数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\sin\frac{1}{n}$ が (1)収束すること (2)絶対収束しないこと を示せ.

§8 関数列の極限と一様収束

☆連続関数の列 $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ の極限 f は連続か?

答1 一般に連続とは限らない!(例8.2参照)

まず,次を思い出そう:

Def 8.1 (関数の連続性) $I\subset\mathbb{R}$ とし, $f:I\to\mathbb{R}$ とする.

● f が $x\in I$ において連続

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists\delta>0,\ \forall y\in I$, 「$|y-x|<\delta\Rightarrow|f(y)-f(x)|<\varepsilon$」

● f が連続

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall x\in I$, f は x において連続.

例8.2 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f_n(x):=x^n$ で定める. このとき $x\in[0,1]$ に対し

$$f(x):=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\begin{cases}0 & (0\le x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

となり, 極限関数

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ は明らかに 1 において連続でない.

(演習8.1)

答2 連続関数列の一様収束極限は連続!

(Thm 8.4)

Def 8.3 (一様収束) $I\subset\mathbb{R}$ とし, $f:I\to\mathbb{R}$, また各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:I\to\mathbb{R}$ とする.

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I上で一様収束する

$\overset{\text{def}}{\Longleftrightarrow}$ $\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N},\ \forall x\in I,\ \forall n\ge N,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$.

ε だけに依存して決まる($x\in I$ に依らない!)

Thm 8.4 $I\subset\mathbb{R}$ とし, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:I\to\mathbb{R}$ は連続とする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が $f:I\to\mathbb{R}$ に I上で一様収束するならば f は連続である.

∵ $x\in I$ を任意に取る. f が x において連続であることを示せばよい. その為に, $\varepsilon>0$ を任意に取る. まず $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ が f に I上で一様収束するという仮定から,

$$\exists N\in\mathbb{N},\ \forall y\in I,\ \forall n\ge N,\ |f_n(y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

特に, $n=N$ とすれば

$$\forall y\in I,\quad |f_N(y)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{3}. \quad\cdots\cdots(8.1)$$

さらに f_N は x において連続であるので,

$$\exists\delta>0,\ \forall y\in I,\ \text{「}|y-x|<\delta\Rightarrow|f_N(y)-f_N(x)|<\frac{\varepsilon}{3}\text{」} \quad\cdots\cdots(8.2)$$

よって3角不等式と(8.1),(8.2)から, $|y-x|<\delta$ であるような任意の $y\in I$ に対し

$$|f(y)-f(x)|\le|f(y)-f_N(y)|+|f_N(y)-f_N(x)|+|f_N(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

よって f は x において連続である. ■

12月18日ここから

一様収束の定義は次のように言い換えられる:

Prop 8.5 $I\subset\mathbb{R}$ とし, $f:I\to\mathbb{R}$, また各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:I\to\mathbb{R}$ とする. このとき次の(1),(2),(3)は互いに同値:

(1) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I上一様収束する.

(2) ($\exists N\in\mathbb{N},\ \forall n\ge N$, f_n-f は有界, かつ)

$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$. (ただし, $\sup\emptyset:=0$ と定める.)

(3) $\exists N\in\mathbb{N},\ \exists\{a_n\}_{n=N}^{\infty}\subset[0,\infty)$, $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ かつ

$\forall n\ge N,\ \forall x\in I,\ |f_n(x)-f(x)|\le a_n$.

12月11日ここまで

∵ (1)⟹(2): $\varepsilon=1$ に対して $\exists N_1\in\mathbb{N}$,

$$\forall x\in I,\ \forall n\ge N_1,\ |f_n(x)-f(x)|<1$$

であるので, 特に $\forall n\ge N_1$ に対し f_n-f は有界である.

さらに $\varepsilon>0$ を任意に取ると,(1)より $\exists N\in\mathbb{N}$,

$$\forall x\in I,\ \forall n\ge N,\ |f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \quad\cdots\cdots(8.3)$$

であるので, 特に $\forall n\ge N$ に対し,(8.3)の $x\in I$ についての上限を取ることで $0\le\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|\le\varepsilon$ が分かる.

従って $\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|=0$.

(2)⟹(3): 各 $n\ge N$ に対し $a_n:=\sup_{x\in I}|f_n(x)-f(x)|$ とおくと, $\{a_n\}_{n=N}^{\infty}\subset[0,\infty)$ であり, (2)により $\lim_{n\to\infty}a_n=0$. また上限 sup の定義より各 $n\ge N$ に対し $\forall x\in I$, $|f_n(x)-f(x)|\le a_n$.

(3)⟹(1): $\varepsilon>0$ を任意に取る. $\lim_{n\to\infty}a_n=0$ より

$$\exists M\ge N,\ \forall n\ge M,\ a_n=|a_n|<\varepsilon. \quad\cdots\cdots(8.4)$$

すると $\forall x\in I,\ \forall n\ge M$ に対し(3)と(8.4)より

$$|f_n(x)-f(x)|\underset{(3)}{\le}a_n\underset{(8.4)}{<}\varepsilon.$$

よって $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ は f に I上一様収束する. ■

演習8.1 例8.2の f が 1 において連続でないことを定義に基づき示せ.

演習8.2 $g, g_n:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ を $g(x):=\frac{1}{x}$, $g_n(x):=\frac{n}{1+nx}$ で定める. $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $[1,\infty)$上で一様収束することを示せ.

演習8.3 $h_n:[0,2]\to\mathbb{R}$ を $x\le\frac{1}{n}$ で $h_n(x):=2n^2x$, $x\ge\frac{2}{n}$ で $h_n(x):=0$, $\frac{1}{n}\le x\le\frac{2}{n}$ で $h_n(x):=4n-2n^2x$, により定める. 次を示せ.

(1) $\forall x\in[0,2]$, $h_n(x)\xrightarrow{n\to\infty}0$. (2) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 に $[0,2]$上一様収束しない.