No. 9

Date

<u>Thm 9.4'</u> $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続とする. $F:[a,b]\to\mathbb{R}$ を $F(x):=\int_a^x f(t)\,dt$ で定めると, $F$ は微分可能で $\forall x\in[a,b]$, $F'(x)=f(x)$.

☺ $x\in[a,b]$, $\varepsilon>0$ とする. $f$ は $x$ において連続なので $\exists\delta>0$, $\forall y\in[a,b]$, "$|y-x|<\delta \Rightarrow |f(y)-f(x)|<\varepsilon$." すると, $0<|h|<\delta$, $x+h\in[a,b]$ であるような任意の $h\in\mathbb{R}$ に対し

$$-\varepsilon\leqq h^{-1}\int_x^{x+h}(f(t)-f(x))\,dt = h^{-1}(F(x+h)-F(x))-f(x)\leqq\varepsilon,$$

($h<0$ であっても正しいことに注意)

すなわち $|h^{-1}(F(x+h)-F(x))-f(x)|\leqq\varepsilon$.

これは $\displaystyle\lim_{h\to0}\frac{F(x+h)-F(x)}{h}=f(x)$,

つまり $F$ が $x$ において微分可能で $F'(x)=f(x)$ であることを意味する. ■

# §9 一様収束と微積分

☆ $[a,b]$ 上 $f_n\to f$ のとき, $\int_a^b f_n(x)\,dx \longrightarrow \int_a^b f(x)\,dx$ ?

<u>答1</u> 一般には正しくない!(例9.1参照)

<u>例9.1</u> $n\in\mathbb{N}$ に対し $h_n:[0,2]\to\mathbb{R}$ を

$$h_n(x):=\begin{cases}2n^2x & (0\leqq x\leqq 1/n)\\ 4n-2n^2x & (\frac{1}{n}\leqq x\leqq\frac{2}{n})\\ 0 & (2/n\leqq x\leqq 2)\end{cases}$$

で定めると, 演習8.3-(1)より

$$\forall x\in[0,2],\ \lim_{n\to\infty}h_n(x)=0$$

であるが, 一方明らかに

$$\int_0^2 h_n(x)\,dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{n}\cdot 2n=2 \;\cancel{\xrightarrow{n\to\infty}}\; 0=\int_0^2 0\,dx.$$

(収束しない!)

<u>答2</u> <u>一様収束</u>する(連続)関数列に対しては正しい! (Thm 9.2)

<u>Thm 9.2</u> $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ は連続であるとする. このとき, $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上で一様収束するならば, ($f$ は連続で) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$.

☺ Thm 8.4より $f$ は連続であり, 従ってその積分 $\int_a^b f(x)\,dx$ が定義される. Prop 8.5-(3)のような $N\in\mathbb{N}$ と $\{a_n\}_{n=N}^\infty\subset[0,\infty)$ を取ると, $\forall n\geqq N$ に対し,

$$\forall x\in[a,b],\ -a_n\leqq f_n(x)-f(x)\leqq a_n \quad\cdots\cdots(9.1)$$

であるので(9.1)を $[a,b]$ 上で積分すれば

$$-a_n(b-a)\leqq\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\leqq a_n(b-a).$$

そこで $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n(b-a)=0\cdot(b-a)=0$ なので挟み撃ちの原理により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\int_a^b f_n(x)\,dx-\int_a^b f(x)\,dx\right)=0$,

すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,dx=\int_a^b f(x)\,dx$. ■

12月18日ここまで

1月8日ここから

☆ $f_n, f$ が微分可能で $f_n\to f$ のとき, $f_n'\longrightarrow f'$ か?

<u>答1</u> ($f_n$ が $f$ に一様収束していても) 一般には正しくない! (例9.3参照)

<u>例9.3</u> 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ を $f_n(x):=\dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ で定める. このとき $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ は $[0,1]$ 上で $0$ に一様収束する(演習9.1)が, 一方 $f_n'(x)=x^n$ なので

$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\begin{cases}0 & (0\leqq x<1)\\ 1 & (x=1)\end{cases}$$

となり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n'(1)$ は $(0)'=0$ と等しくない.

<u>答2</u> $f_n'$ が(連続であって) <u>一様収束</u>するならば正しい! (Thm 9.5)

まず次の重要な定理を思い出そう:

<u>Thm 9.4</u> (微分積分学の基本定理)

$a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ は微分可能かつ $f'$ は連続とする. このとき $\forall x\in[a,b]$ に対し

$$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\,dt.$$

<u>Thm 9.5</u> $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$ とし, 各 $n\in\mathbb{N}$ に対し $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ は微分可能かつ $f_n'$ は連続とする. また $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ とする. このとき,

(i) $\forall x\in[a,b]$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$, かつ

(ii) $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ がある $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ に $[a,b]$ 上で一様収束する

ならば, $f$ は微分可能で $f'=g$ である.

☺ $f_n'$ は連続なので Thm 8.4より $g$ は連続であり, $\forall x\in[a,b]$ に対し $\{f_n'\}_{n=1}^\infty$ は $g$ に $[a,x]$ 上で一様収束するので Thm 9.2 により $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt=\int_a^x g(t)\,dt$. すると Thm 9.4と(i)により

$$f(x)-f(a)=\lim_{n\to\infty}(f_n(x)-f_n(a)) =\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n'(t)\,dt=\int_a^x g(t)\,dt,$$

すなわち

$$\forall x\in[a,b],\quad f(x)=f(a)+\int_a^x g(t)\,dt. \quad\cdots\cdots(9.2)$$

ところが $g$ は連続なので, ページ上の Thm 9.4' により

$$\frac{d}{dx}\int_a^x g(t)\,dt=g(x)$$

であり, よって(9.2)の右辺(すなわち $f$)は微分可能で $f'(x)=g(x)$ となる. ■

<u>注意9.6</u> 実は

- Thm 9.2で「連続」を「Riemann積分可能」としたもの
- Thm 9.5で「かつ $f_n'$ は連続」を除いたもの

も成り立つ(松坂和夫著「解析入門」(岩波書店)2巻9.1節参照).

<u>演習9.1</u> 例9.3の $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ が $0$ に $[0,1]$ 上一様収束することを示せ.

<u>演習9.2</u> 演習8.2のように $g_n, g$ を <u>$(0,\infty)$ 上で</u>定めるとき, $\{g_n\}_{n=1}^\infty$ が $g$ に $(0,\infty)$ 上で一様収束しないことを示せ.

<u>演習9.3</u> (1) $a\in(0,1)$ とする. $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ が $[0,a]$ 上で $0$ に一様収束することを示せ.

(2) $\{x^n\}_{n=1}^\infty$ が $[0,1)$ 上で $0$ に一様収束しないことを示せ.