

学籍番号:

氏名:

演習問題 10 (2015 年 1 月 8 日)

注意. 答案作成に際しては以下の点に注意すること:

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと. 試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから, 自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない.
- 数学的に厳密な議論を行うこと. 厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない.

演習 10.1. $a \in (0, \infty)$ とし, 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $f_n: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ を $f_n(x) := nx^a e^{-nx^2}$ で定める.

(1) 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し関数 f_n の最大値を求めよ.

(2) $a > 4$ ならば $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ は $[0, \infty)$ 上で一様収束することを示せ.

演習 10.2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $g_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ を $g_n(x) := \frac{1}{n^2+x^2}$ で定める.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} g_n$ が \mathbb{R} 上で一様収束することを示せ.

(2) $g := \sum_{n=1}^{\infty} g_n$ とおく. g は微分可能であり, かつ任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し次が成り立つことを示せ.

$$g'(x) = -2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{(n^2 + x^2)^2}.$$