学籍番号：　　　　　　　　　　　　　　　　**氏名：**

演習問題 8（2014 年 12 月 11 日）

注意. 答案作成に際しては以下の点に注意すること：

- なるべくきれいな字で丁寧に書くこと．試験答案やレポートも「他人に読んでもらう文章」なのだから，自分にしか読めないような雑な字で書くべきではない．
- 数学的に厳密な議論を行うこと．厳密さを欠いた曖昧な議論は数学では許されない．

演習 8.1. 次の関数 $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ が 1 において連続でないことを定義に基づいて示せ：

$$f(x) := \begin{cases} 0 & (0 \leq x < 1) \\ 1 & (x = 1) \end{cases}$$

演習 8.2. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $g_n : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g_n(x) := \dfrac{n}{1+nx}$ で定める．
(1) 任意の $x \in [1,\infty)$ に対し $\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \frac{1}{x}$ であることを示せ．
(2) $g : [1,\infty) \to \mathbb{R}$ を $g(x) := \frac{1}{x}$ で定める．$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ が g に $[1,\infty)$ 上で一様収束することを示せ．

演習 8.3. 各 $n \in \mathbb{N}$ に対し $h_n : [0,2] \to \mathbb{R}$ を次で定める：

$$h_n(x) := \begin{cases} 2n^2 x & (0 \leq x \leq \frac{1}{n}) \\ 4n - 2n^2 x & (\frac{1}{n} \leq x \leq \frac{2}{n}) \\ 0 & (\frac{2}{n} \leq x \leq 2) \end{cases}$$

(1) 任意の $x \in [0,2]$ に対し $\lim_{n\to\infty} h_n(x) = 0$ であることを示せ.
(2) $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ が 0 に $[0,2]$ 上で一様収束**しない**ことを示せ.